Computergraphik II

Prof. Dr. Andreas Kolb

Fachgruppe Computergraphik und Multimediasysteme

Universität Siegen – Fachbereich 12

Version: 14. Oktober 2004

<u>Motivation:</u> Modellierung

Geometrische Modelle: Grundlegend für alle graphischen 3D-Anwendungen

Kriterien aus Anwendersicht:

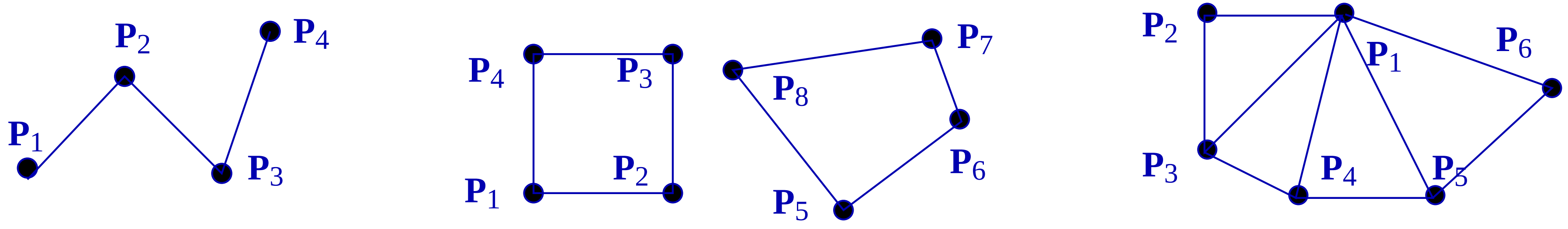
- problem-orientierte Erstellungsmethoden (z.B. Genauigkeit und Freiheit)
- intuitive Erstellungstechnik $\Longrightarrow$ **Kontrollparameter**
- sinnvolle Weiterverarbeitung/Wiederverwendung

Kriterien aus Informations-technischer Sicht:

- Geometrie als Funktion von Modellparametern (interne Repräsentation)
- Unabhängigkeit der Geomtrie von bestimmten Änderungen der Kontrollparameter (z.B. **affine Invarianz**)
- Darstellung von Geometrien in Echtzeit-Graphik oder Offline-Rendering

2.1 Wiederholung CG-I

Bisherige Modellierung: Spezielle Formen polygonaler Geometrien



Bewertung: + beliebige Formen erzeugbar

+/– Manipulation der Geometrie auf feinster Ebene

– keine glatten Oberflächen

Rendering basiert (fast) immer auf Polygonen

Bezeichnung: Affiner Raum

Alle geometrischen Objekte werden durch Punkte in einem *Affinen Raum* beschrieben.

Affiner Raum A**:** Ein um *Punkte* erweiterter Vektorraum.

Für Vektoren $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in A$, Punkte $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in A$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ ist Vektor
- $\mathbf{P} + \vec{\mathbf{v}}, \mathbf{P} + a\vec{\mathbf{v}}$ sind Punkte

Koordinatensystem von A**:** Besteht aus einer Vektorbasis $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n\}$ von A und einem *Ursprungspunkt* O.

Koordinatendarstellung von $\mathbf{P} \in A$ mittels des Ortsvektors $\vec{\mathbf{p}}$ von $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = O + \vec{\mathbf{p}} = O + p_1\vec{\mathbf{u}}_1 + p_2\vec{\mathbf{u}}_2 + \ldots + p_n\vec{\mathbf{u}}_n, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Bezeichnung: Affine Kombination, konvexe Hülle

Affine Kombination: Für Punkte $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k \in A$ und skalare Werte $s_1, \ldots, s_k$ mit $\sum_{i=1}^{k} s_i = 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{P}_i \in A \quad \text{ist ebenfalls wieder Punkt, denn}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{P}_i &= s_1\mathbf{P}_1 + s_2\mathbf{P}_2 + \ldots + s_k\mathbf{P}_k \\ &= \underbrace{(s_1 + \ldots + s_k)}_{=1}\mathbf{P}_1 + s_2\underbrace{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)}_{\vec{\mathbf{v}}_2} + \ldots s_k\underbrace{(\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_1)}_{\vec{\mathbf{v}}_k}\end{aligned}$$

Konvexe Hülle: Für Punkte $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k \in A$ ist sie die *kleinste, umfassende, konvexe Menge*.

Sie besteht aus den Punkten

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{P}_i, \text{ mit } \sum_{i=1}^{k} s_i = 1 \text{ und } s_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, k$$

Beispiel: Affine Kombination

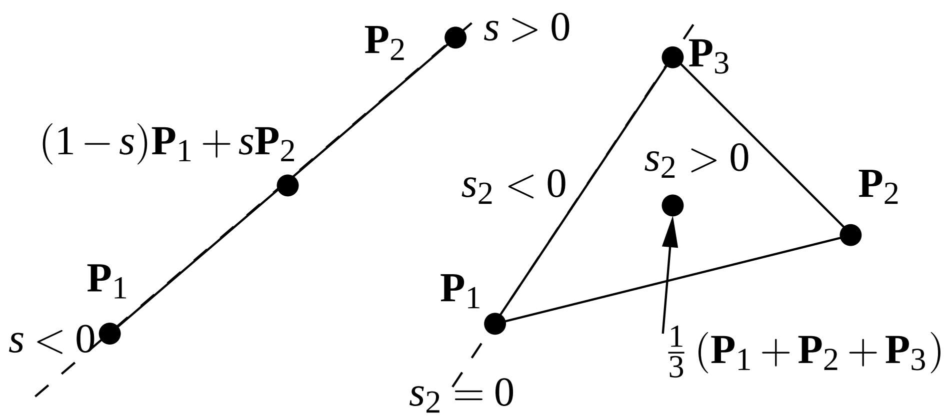
Gerade durch zwei Punkte $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$: $G : \mathbf{P}_1 + s\,(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = (1-s)\mathbf{P}_1 + s\mathbf{P}_2,\ s \in \mathbb{R}$

Abbildung ist bijektiv. Konvexe Hülle: Strecke $\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$

Ebene durch drei nicht kollineare Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$

$$E : \mathbf{P}_1 + s_1\,(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + s_2\,(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) = (1 - s_1 - s_2)\mathbf{P}_1 + s_1\mathbf{P}_2 + s_2\mathbf{P}_3,\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Abbildung ist bijektiv. Konvexe Hülle: Dreieck $\Delta\,(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$



Bezeichnung: Baryzentrische Koordinaten

Verallgemeinerung der Beispiele Gerade und Ebene

Affine Unabhängigkeit: $\mathbf{P}_i \in A,\ i = 0, \ldots, k$ mit $\dim(A) \geq k$ sind affin unabhängig, wenn

Vektoren $\vec{\mathbf{v}}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_1,\ i = 1, \ldots, k$ linear unabhängig sind

bzw. wenn $\sum_{i=0}^{k} s_i \mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{k} t_i \mathbf{P}_i$ mit $\sum_{i=0}^{k} s_i = \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \Longleftrightarrow s_i = t_i\ \forall i = 0, \ldots, k$

Baryzentrische Koordinaten: Eindeutige Gewichte s_i eines Punktes $\mathbf{P}$ bzgl. affine unabhängiger Punkte $\mathbf{P}_i$

Erinnerung: Affine Abbildung

- Abbildungen T, die affine Kombinationen invariant lassen
- Lineare Abbildung plus Translation (4×4-Matrix)

Bezeichnung:

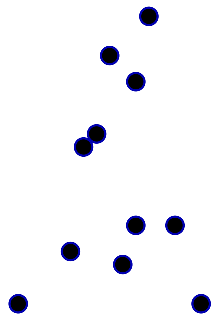
Geometrie: Eine Menge von Punkten (für uns meist im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) ohne spezifische Struktur

Kurve: Eine Geometrie, die (lokal) eine eindimensionale Struktur besitzt.

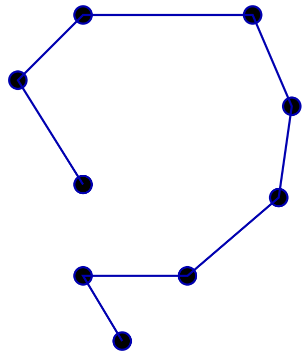
Fläche: Eine Geometrie, die (lokal) eine zweidimensionale Struktur besitzt.

Körper/Volumen: Eine Geometrie, die (lokal) eine dreidimensionale Struktur besitzt. Körper können durch ihre Begrenzungsflächen beschrieben werden

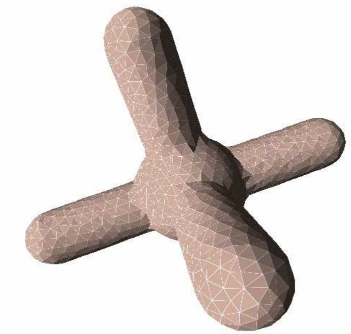
Modell/Objekt: Eine Geometrie, die eine Semantik besitzt (Modell eines Hauses)



Punkte



Kurve



Fläche

Bezeichnung: Mannigfaltigkeit und Orientierbarkeit

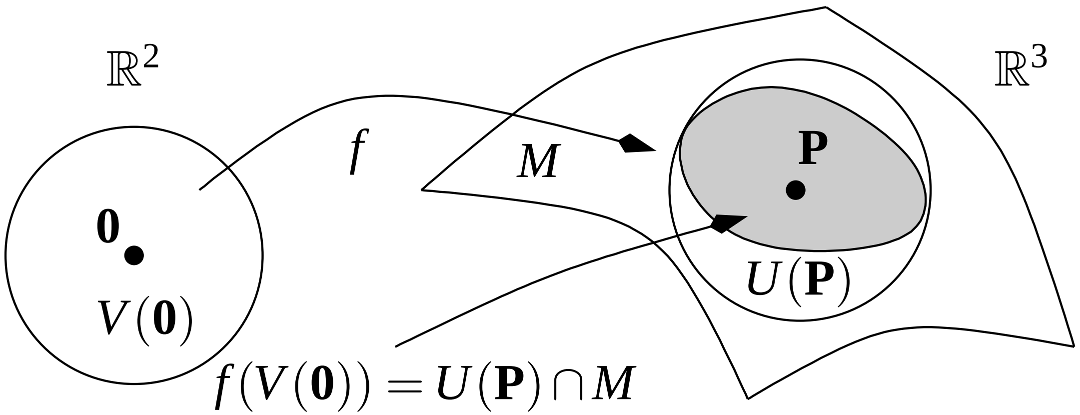
Problem: „Lokal n-dimensionale Struktur“ ist eine rein intuitiv Definition

k-Mannigfaltigkeit: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d,\ k \le d$ mit

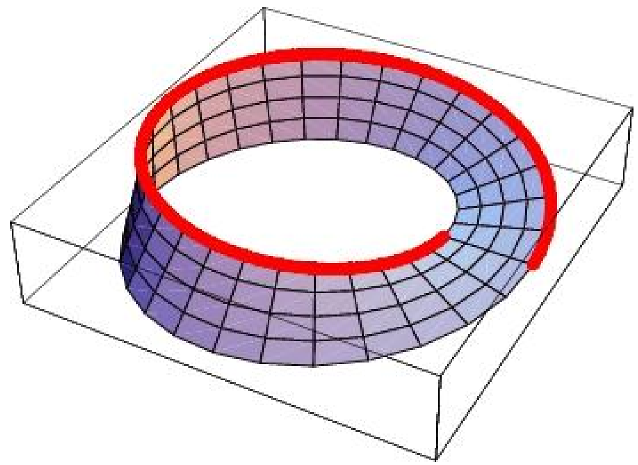
$$\forall \mathbf{P} \in M\ \exists \text{ Umgebungen } U(\mathbf{P}) \subset \mathbb{R}^d, V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^k \text{ von } \mathbf{P} \text{ bzw. von } \mathbf{0}$$

$$\text{und eine stetige bijektive Abbildung } f : V(\mathbf{0}) \longrightarrow U(\mathbf{P}) \cap M$$

Orientierbarkeit ($k = 2,\ d = 3$): Mannigfaltigkeit (Fläche) mit zwei Seiten



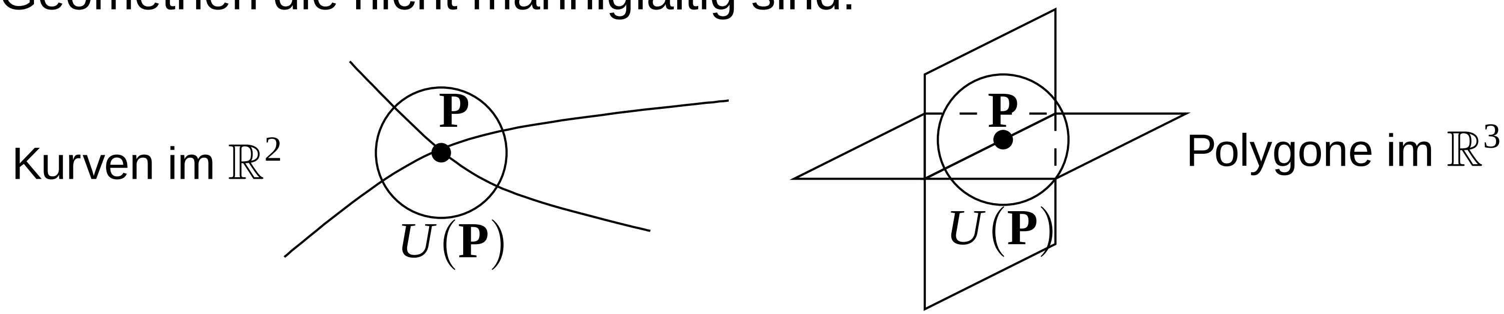
Beispiel 2-Mannigfaltigkeit



Moebius-Band (einseitig)

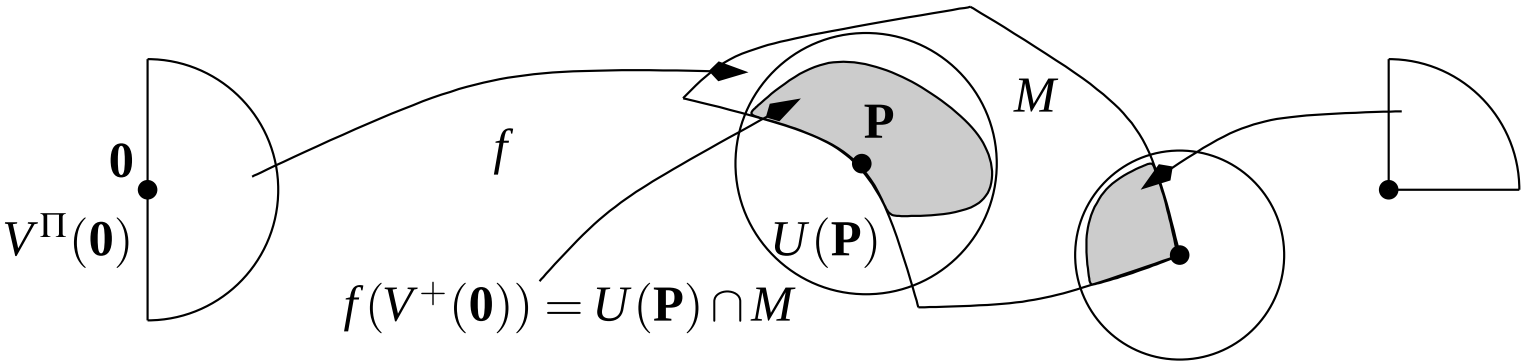
Bemerkung:

- Beispiel für Geometrien die nicht mannigfaltig sind:



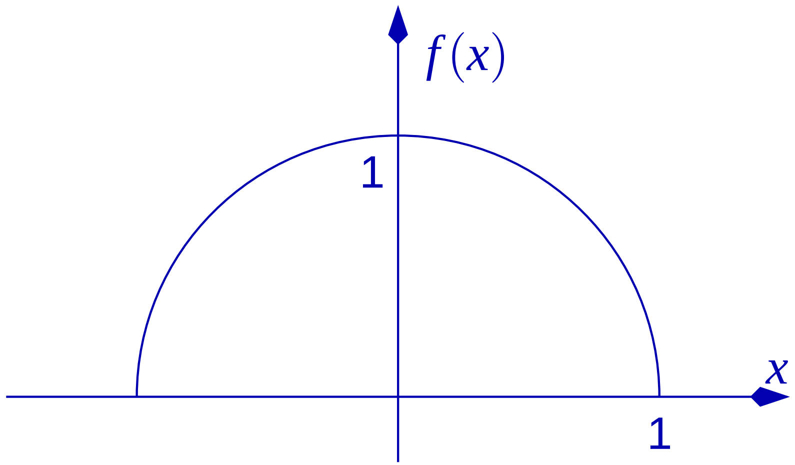
- Jede Mannigfaltigkeit ist zunächst unbegrenzt (Beispiel: Kugel, Ebene)
- Der *Rand einer Mannigfaltigkeit* ∂M definieren sich über *halb-offene Umgebungen*

$$\Pi \subset \{1,\ldots,k\}, V^{\Pi}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{Q} \in V(\mathbf{0}) \; : \; q_i \geq 0 \forall i \in \Pi\} \subset \mathbb{R}^k$$



Mathematische Repräsentation von Flächen und Körpern

Polygon-Netz: Explizite Vorgabe von Eckpunkten und Polygonen. *Polygon-Netz* = Polygone mit gemeinsamen Eckpunkten



Parametrische Repräsentation: Funktionale Beschreibung, z.B. Halbkreis:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1,1]$$

Implizite Repräsentation: Definition einer $n-1$-dim. Geometrie in einem n-dim. Raum über Auswertung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n = 2$: Kurve, $= 3$: Fläche) zu einem *Isowert* a:

Allgemein: $\{\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^n \ : \ f(\mathbf{P}) = a\}$

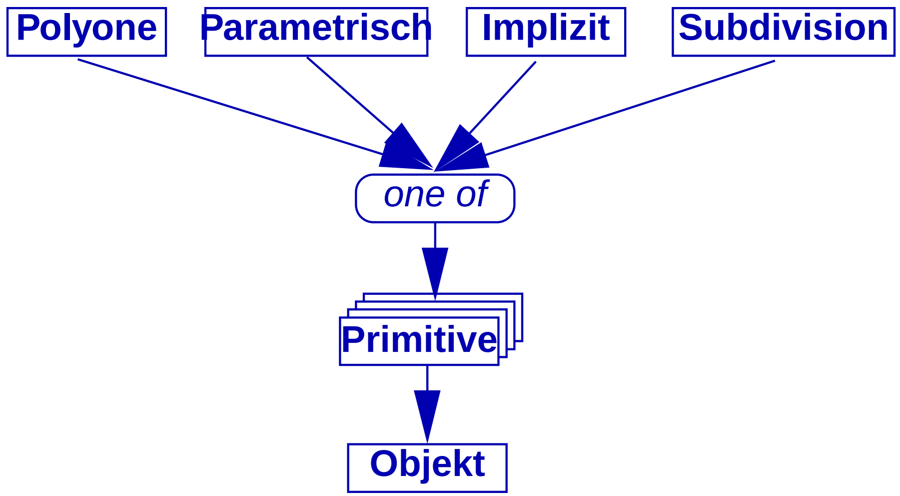
Beispiel: $f(\mathbf{P}) = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2,\ a = r^2 \Longrightarrow$ Kugel

Subdivisionsflächen: Rekursive Unterteilung eines vorgegebenen Kontrollpolyeders; Grenzfall: glatte Fläche.

Primitiv, Objekt und Modellierungstechnik

Primitive: • Grundformen der Modellierung

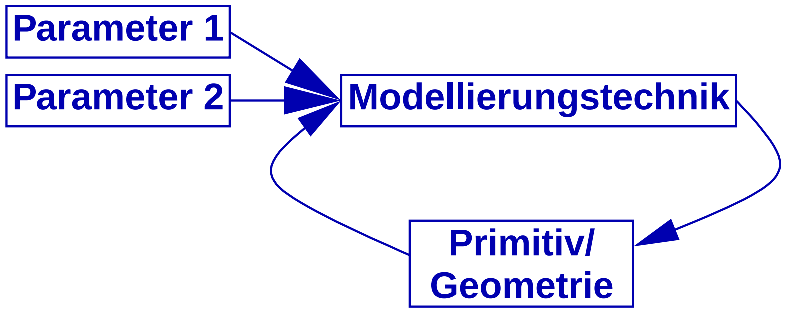
- beruhen auf konkreter math. Repräsentation
- Beispiel *Kugel*: exakte Darstellung durch NURBS oder implizit, Approximation durch Polygone



Objekte: Verknüpfung mehrerer Primitive mit Modellierungstechniken, z.B. boolschen Operationen.

Modellierungstechnik: • Verfahren zur Verknüpfung mehrerer Primitive/Objekte

- Eingabeparameter sind Werte oder andere Geometrie.



Flächenbasierte Modelle: Die meisten Objekte werden flächenbasiert beschrieben