Computergraphik II

Prof. Dr. Andreas Kolb

Fachgruppe Computergraphik und Multimediasysteme

Universität Siegen – Fachbereich 12

Version: 12. November 2004

6 Implizite Flächen

Ziel: Modellierung geschlossener, glatter (komplexer) Objekte

Vorteile implizter Flächen:

- einfache Modellierung (keine zusammengesetzten NURBS-Flächen)
- Modellierung geschlossener, glatter Körper wie Sphären; Beispiel:

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}, \quad \text{Radius: } r > 0$$

- z.T. einfache Schnitt- und Abstandsberechnungen (z.B für Kollision)
- Anwendung als Bounding Volume

Nachteile impliziter Flächen:

- Rastergraphik: Polygonalisierung impliziter Flächen aufwendig
- Geometrische Größen z.T. schwer ermittelbar

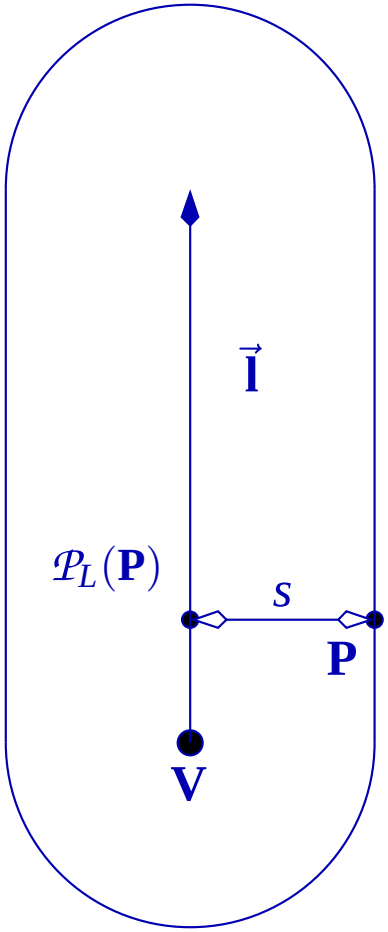
Bemerkung:

- Die Begriffe *implizite Fläche* und *Isofläche* werden hier synonym verwendet
- Im folgenden stellen Graphiken immer den $2D$-Fall dar (*implizite Kurven*)

Definition:

Implizite Geometrien werden definiert durch:

Implizite Fläche	**Kapsel**
Basisgeometrie B	Strecke L $\mathbf{L}(\alpha) = \mathbf{V} + \alpha\vec{\mathbf{l}},\ \alpha \in [0,1]$
Distanzfunktion $d_B(\mathbf{P})$ Abstand von $\mathbf{P}$ zur Basisgeometrie	$d_L(\mathbf{P}) = \min\{\|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\| \ :\ \mathbf{Q} \in L\}$ (Abstand von $\mathbf{P}$ zur L)
Schwellwert/*Isowert*: $s > 0$	$s > 0$
Geometrie: $M_s = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 \ :\ d_B(\mathbf{P}) = s\}$	Kapsel: $M_s = \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 \ :\ d_L(\mathbf{P}) = s\}$



Abstandsberechnung

Ermittlung der Projektion $\mathcal{P}_L(\mathbf{P})$ von $\mathbf{P}$ auf L, also

$$\mathcal{P}_L(\mathbf{P}) \in L \text{ mit } \|\mathcal{P}_L(\mathbf{P}) - \mathbf{P}\| = d_L(\mathbf{P})$$

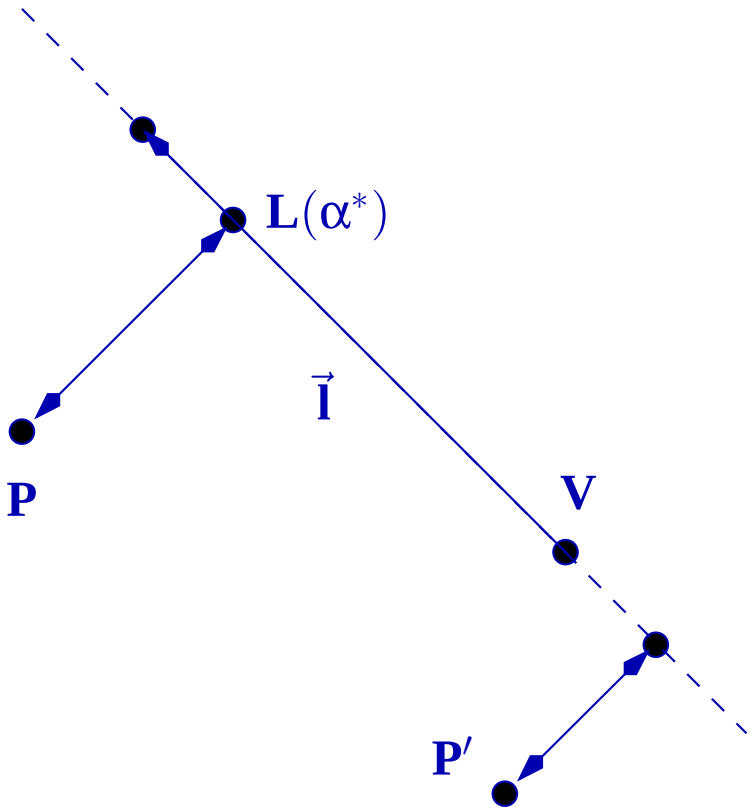
Somit ist entsprechend: $d_L(\mathbf{P}) = \|\mathbf{P} - \mathcal{P}_L(\mathbf{P})\|$

1. Projektion von $\mathbf{P}$ auf *Gerade*:

   $\mathbf{L}(\alpha^*) = \mathbf{V} + \alpha^*\vec{\mathbf{l}}$ für ein $\alpha^* \in \mathbb{R}$.

   Es muß gelten:

$$\begin{aligned} & \left((\mathbf{P} - \mathbf{L}(\alpha^*)) \cdot \vec{\mathbf{l}}\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(\left(\mathbf{P} - (\mathbf{V} + \alpha^*\vec{\mathbf{l}}\right) \cdot \vec{\mathbf{l}}\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha^* = \frac{\left((\mathbf{P} - \mathbf{V}) \cdot \vec{\mathbf{l}}\right)}{\left(\vec{\mathbf{l}} \cdot \vec{\mathbf{l}}\right)} \end{aligned}$$



2. Mit $\alpha^P = \text{clip}\,(\alpha^*, [0,1])$ ist dann: $\mathcal{P}_L(\mathbf{P}) = \mathbf{L}(\alpha^P)$

6.1.2 Lozenges (Rhombus)

Ansatz: Analog wie Kapsel, nur *Rechteck* R als Basisgeometrie:

$$R = \{\mathbf{V} + \alpha_1\vec{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2\vec{\mathbf{e}}_2 \,:\, \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]\}, \quad \text{wobei } \vec{\mathbf{e}}_1 \perp \vec{\mathbf{e}}_2$$

Abstandsberechnung: Projektion $\mathcal{P}_R(\mathbf{P})$ von $\mathbf{P}$ auf R:

1. Projiziere $\mathbf{P}$ auf Ebene

   $\mathbf{V}(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = \mathbf{V} + \alpha_1^*\vec{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2^*\vec{\mathbf{e}}_2$ für $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \in \mathbb{R}^2$:

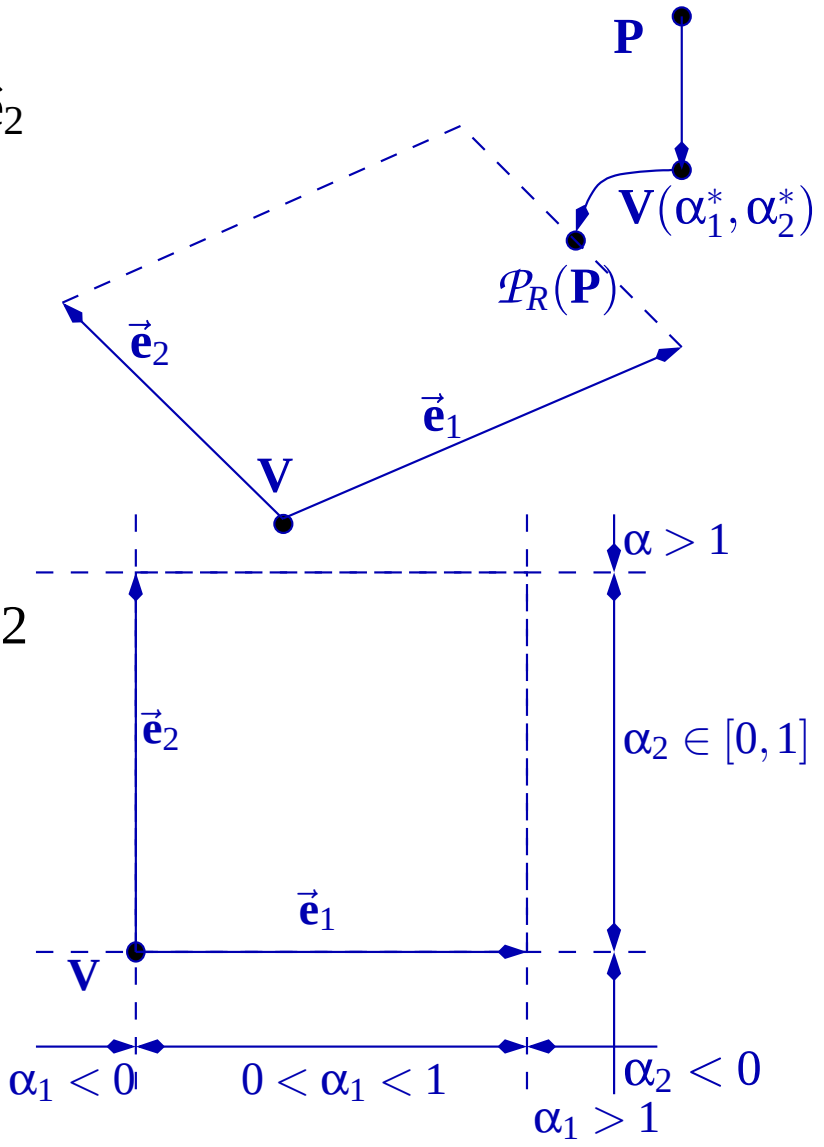
$$(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{V}(\alpha_1^*, \alpha_2^*))) = 0,\ i = 1,2$$

$$\iff \quad (\vec{\mathbf{e}}_i \cdot (\mathbf{P} - (\mathbf{V} + \alpha_1^*\vec{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2^*\vec{\mathbf{e}}_2)) = 0,\ i = 1,2$$

$$\overset{(\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2)=0}{\iff} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{V}))}{(\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)} \\ \dfrac{(\vec{\mathbf{e}}_2 \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{V}))}{(\vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2)} \end{pmatrix}$$

2. $\mathcal{P}_R(\mathbf{P})$ durch Clipping:

$$\mathcal{P}_R(\mathbf{P}) = \mathbf{V}(\alpha_1^P, \alpha_2^P) \text{ mit } \alpha_i^P = \text{clip}\,(\alpha_i^*, [0,1])$$



Ansatz: Minimaler Abstand

Vorgabe: Basisgeometrie besteht aus mehreren Teilen $B = \bigcup\{B_1, \ldots, B_k\}$ und Schwellwert s

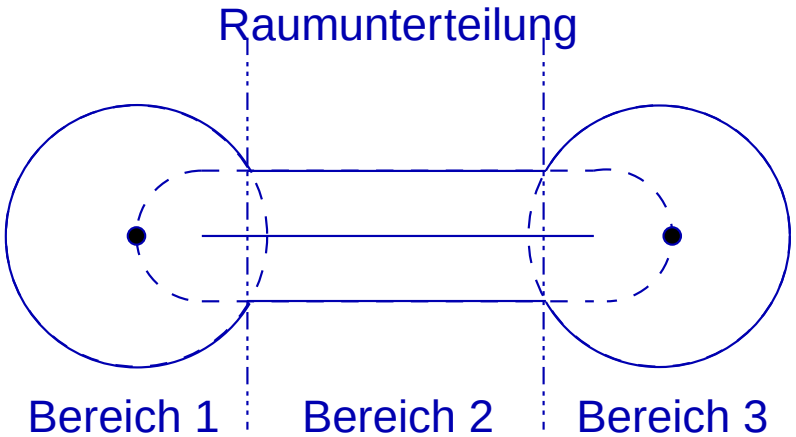
Abstand: Der Abstand ergibt sich zu: $d_B(\mathbf{P}) = \min\{d_{B_i}(\mathbf{P}) \ : \ i = 1, \ldots, k\}$

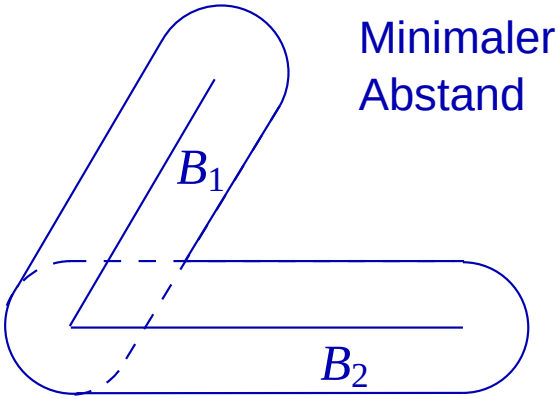
Ansatz: Raumunterteilung

Vorgabe: 1. Basisgeometrie besteht aus mehreren Teilen $B_1, \ldots, B_k$

2. Schwellwerte $s_1, \ldots, s_k$
3. Disjunkte Zerlegung des Raumes: $\mathbb{R}^2 = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} U_i$

Abstand: Der Abstand ergibt sich zu: $d(\mathbf{P}) = d_{B_i}(\mathbf{P}) \iff \mathbf{P} \in U_i$





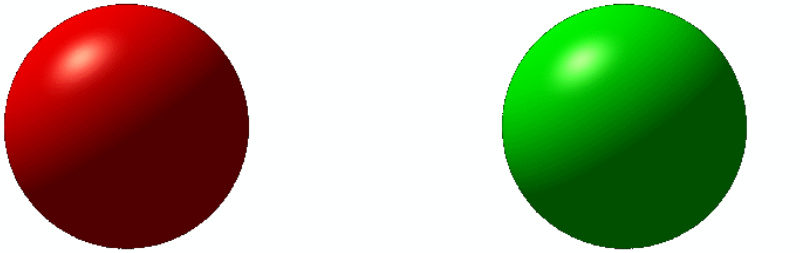
6.2 Verallgemeinerte Implizite Funktionen

Bislang: Einfache implizite Geometrien, Komposition ergibt stets scharfe Kanten

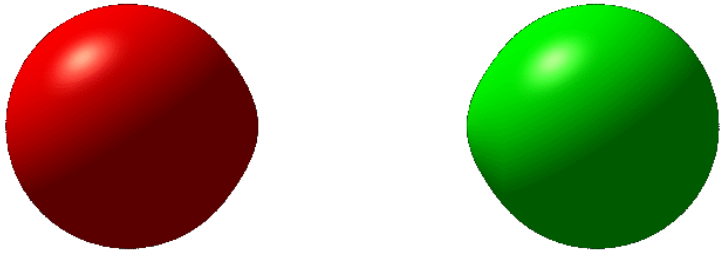
Ziel: Komposition komplexer glatter Modelle, evtl. mehr Freiheitsgrade

Idee: Eingeschränkter und kontrollierbarer Einflußbereich der einzelnen Basisgeometrien

Beispiele:



Zwei separate Kugeln



Verknüpfte Kugeln („lose Bindung“)

Zunehmend stärkere Bindung

Definition: Feldfunktion und Potentialfunktion

Ansatz: Verwende zusätzlich zur Distanzfunktion eine *Feldfunktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$F(\mathbf{P}) = f(d_B(\mathbf{P})) \quad \text{(Potentialfunktion)}$$

Verknüpfung: Mehrere Potentialfunktionen F_i mit Basisgeometrien B_i werden einfach addiert

$$F(\mathbf{P}) = \sum_i F_i(\mathbf{P}) = \sum_i f_i(d_{B_i}(\mathbf{P}))$$

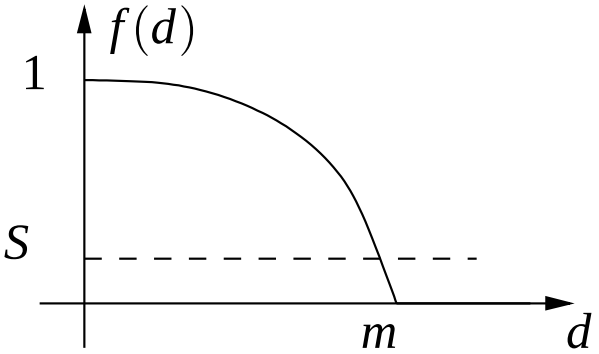
Implizite Fläche: Definiert sich als

$$M_s = \{\mathbf{P} \ : \ F(\mathbf{P}) = s\} \quad \text{für Schwellwert } s$$

Beispiel: Wärmeverteilungsfunktion in Abhängigkeit vom Abstand d:

$$f(d) = \max\{1 - \frac{d^2}{m^2}, 0\}$$

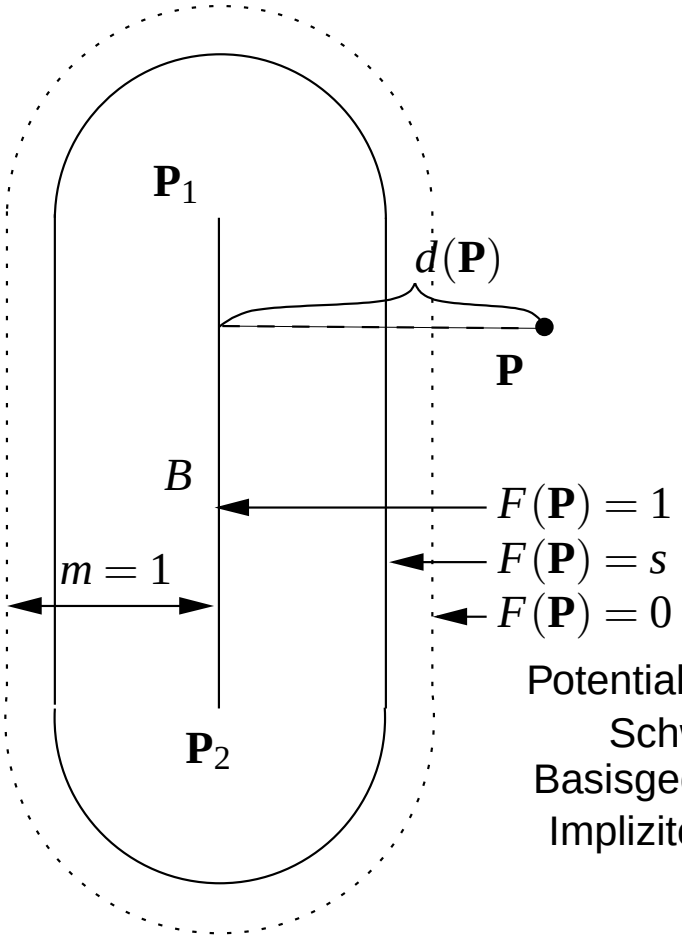
m die max. Distanz zur Basisgeometrie.



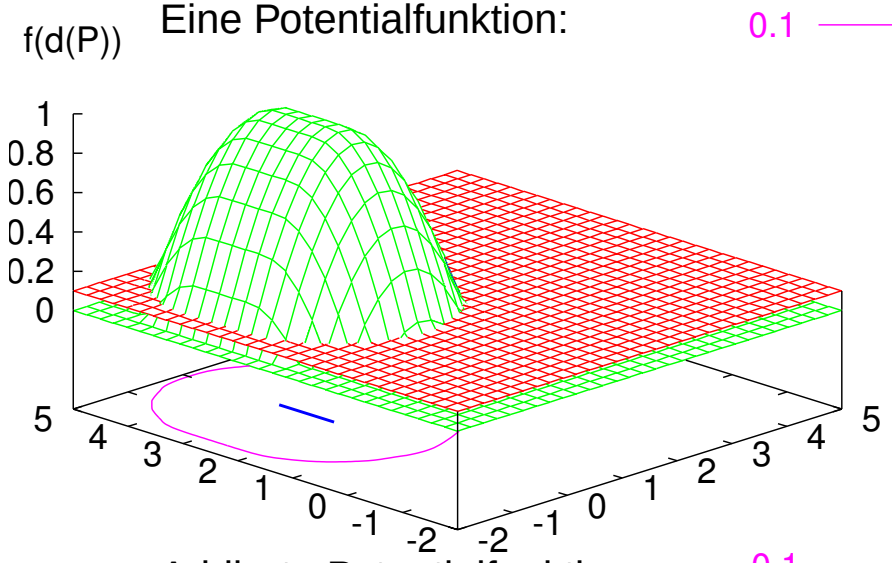
Wärmeverteilungsfunktion

Beispiel: Verknüpfung von Zylindern

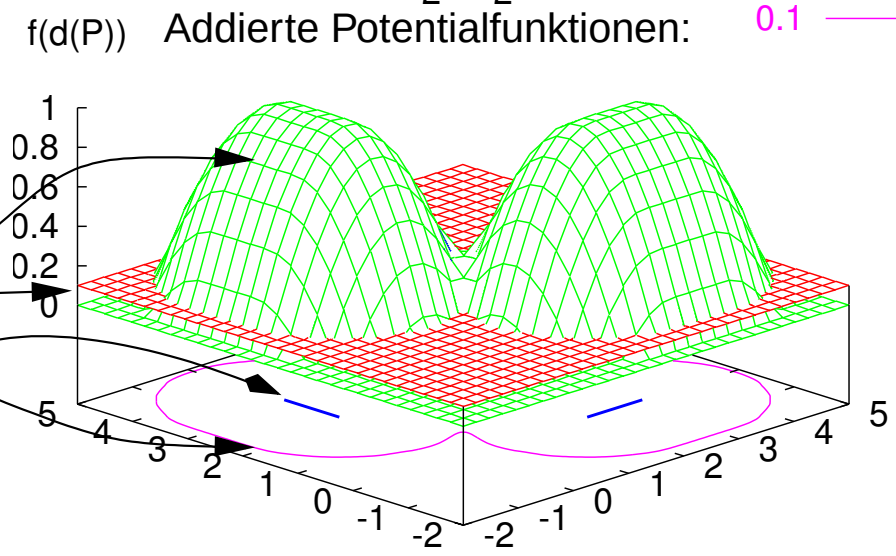
Potentialfunktion: Kurven mit konstanten Schwellwerten:



Eine Potentialfunktion:

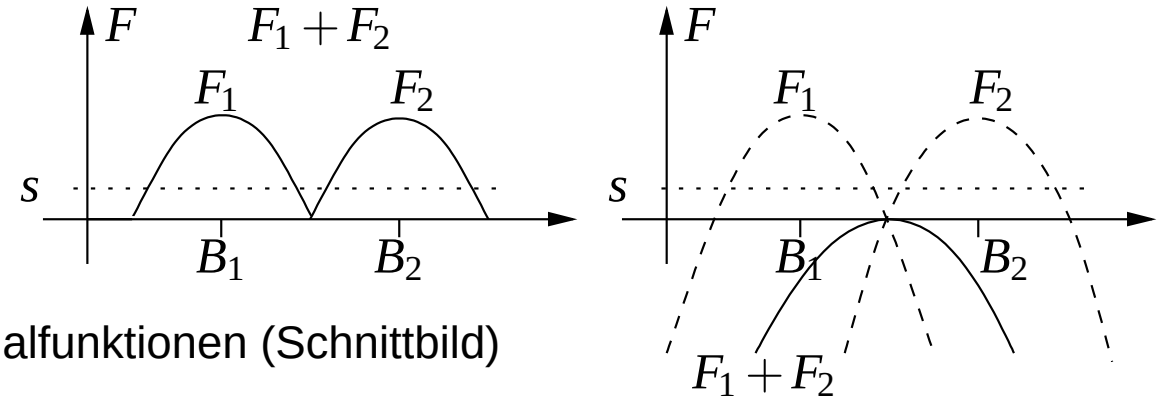


Addierte Potentialfunktionen:



Anforderungen an die Feldfunktion f

Positivität: Die Bedingung $f \geq 0$ ist für implizite Flächen sehr wichtig:



Addierte Potentialfunktionen (Schnittbild)

Lokalität: Träger $\mathrm{supp}(f)$ legt Einflußbereich fest

Stetigkeitsgrad der Geometrie durch Stetigkeitsgrad der Feldfunktion bestimmt

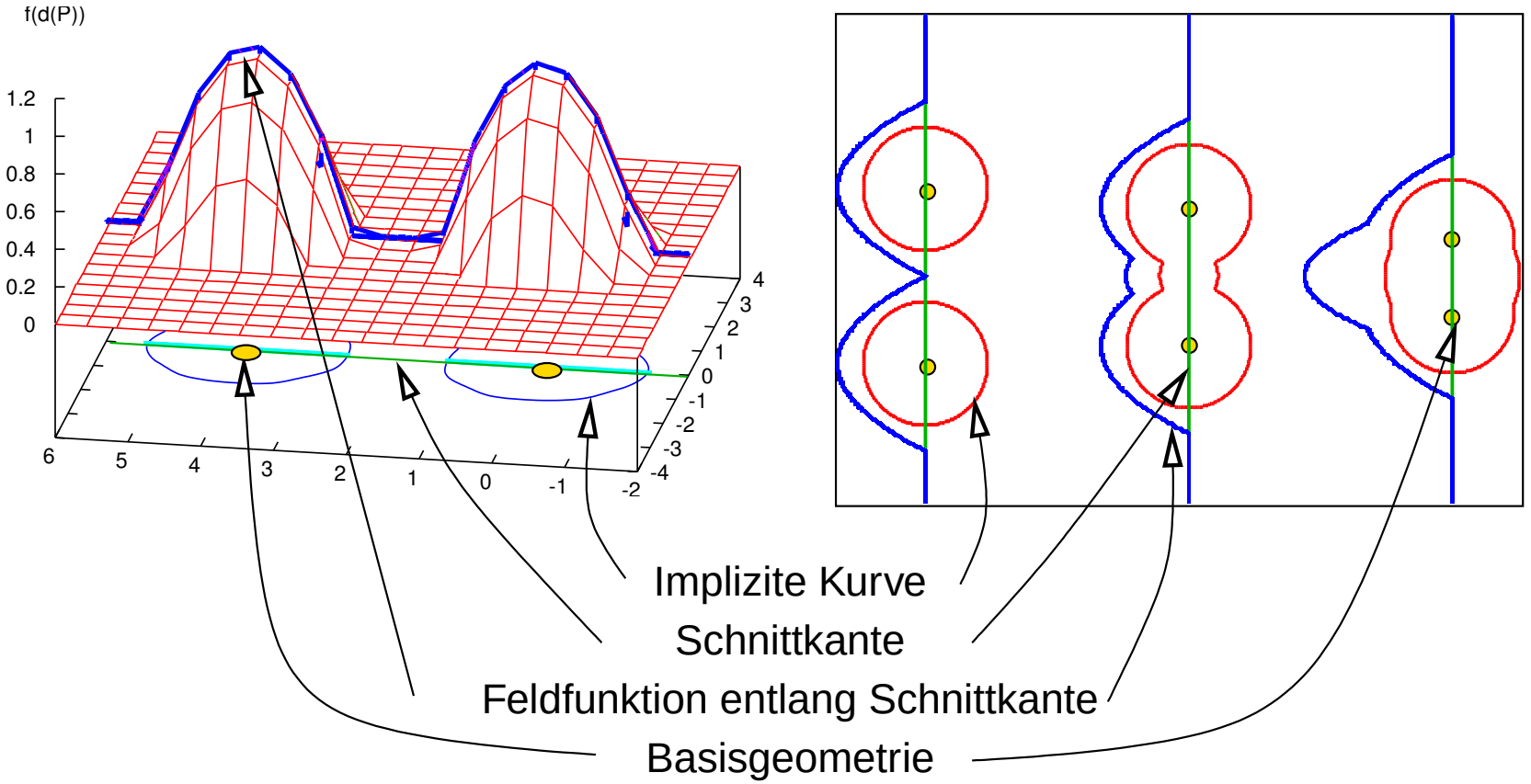
Beispiele: 1. Quadratische Wärmeverteilung: $f(d) = \left(\max(1 - \frac{d^2}{m^2}, 0)\right)^2$, C^1-stetig

2. Kubische Wärmeverteilung (Wyvill '89): $f(d) = \left(\max(1 - \frac{d^2}{m^2}, 0)\right)^3, C^2 - stetig$

3. Exponentialfunktion: $f(d) = e^{-\frac{d^2}{m^2}}$ (kein lokaler Träger!)

Beispiel verschiedener Feldfunktionen

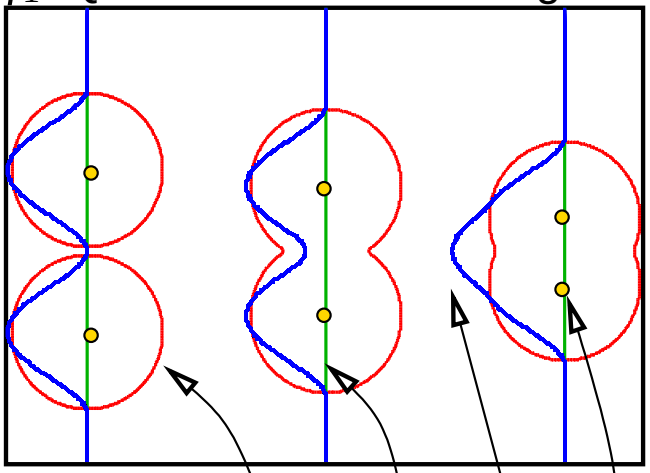
Schnittbild der Wärmeverteilungsfunktion:



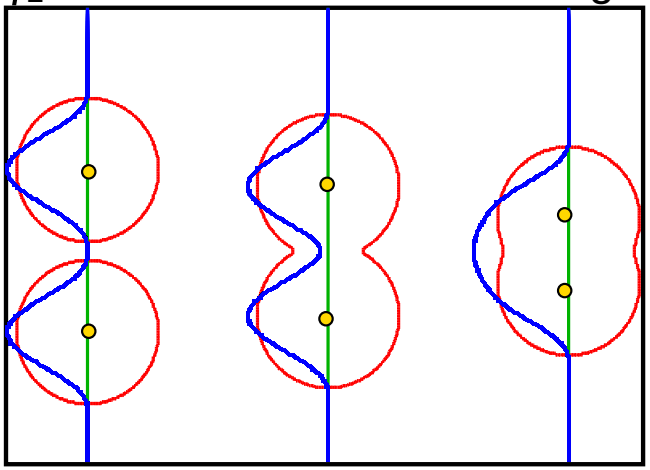
Beachte: Nur C^0-Stetigkeit am Übergang zu 0 und entsprechende Kurven-Spitzen

Beispiel verschiedener Feldfunktionen (Forts.)

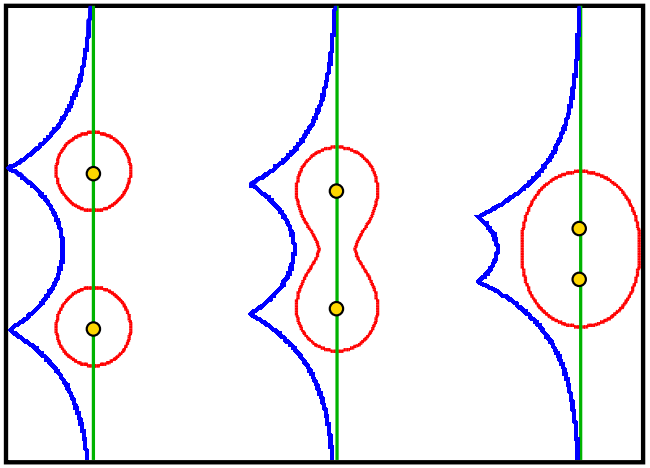
f_1: Quadr. Wärmeverteilungsfkt:



f_2: Kubische Wärmeverteilungsfkt:



f_3: Exponentialfunktion:



$$f_1(d) = \left(\max(1 - \frac{d^2}{m^2}, 0)\right)^2$$
$$f_2(d) = \left(\max(1 - \frac{d^2}{m^2}, 0)\right)^3$$
$$f_3(d) = e^{-\frac{d^2}{m^2}}$$

6.3 Polygonalisierung impliziter Flächen

Ziel: Polygonale Approximation z.B. für Echtzeitgraphik-Anwendungen

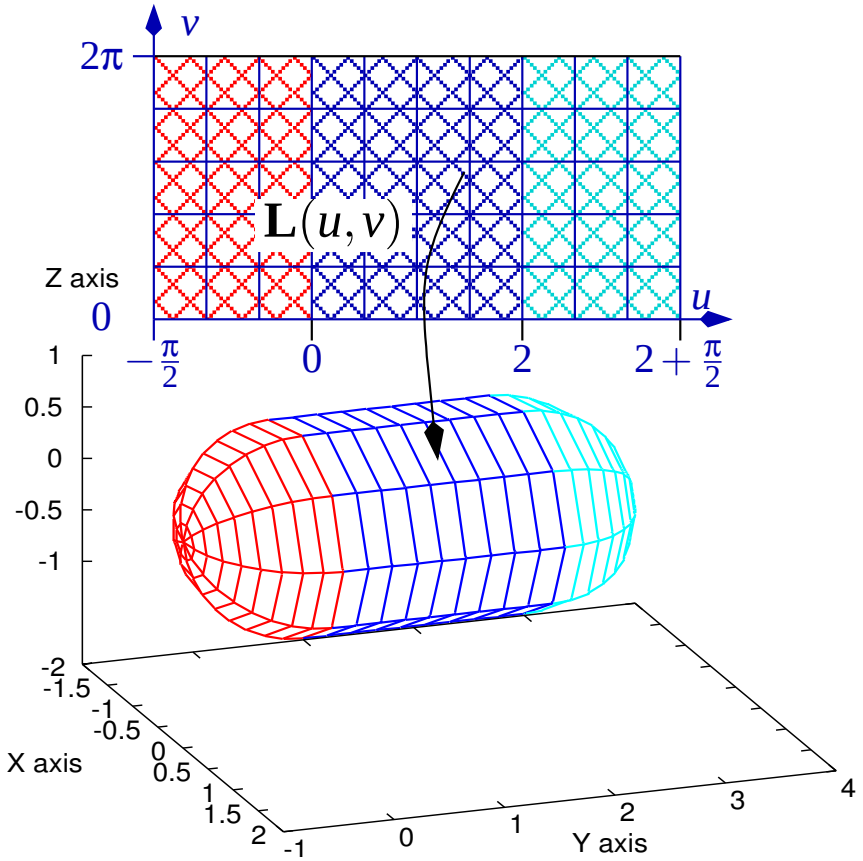
Ansatz: Polygonalisierung durch Parametrisierung

Idee: Parametrisierung impliziter Flächen und Zerlegung des Parametergebietes

Problem: Nur für einfache implizite Geometrien geeignet

Beispiel: Parametrisierung der Kaspel $\mathbf{V} = (0,0,0), \vec{\mathbf{I}} = (0,2,0), s = 1$ über $[-\frac{\pi}{2}, 2+\frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$:

$$\mathbf{L}(u,v) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \cos(u)\sin(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix} & \text{falls } u \in [\frac{-\pi}{2}, 0[\\ \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ u \end{pmatrix} & \text{falls } u \in [0, 2[\\ \begin{pmatrix} \cos(u-2)\cos(v) \\ \cos(u-2)\sin(v) \\ 2+\sin(u-2) \end{pmatrix} & \text{falls } u \in [2, 2+\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

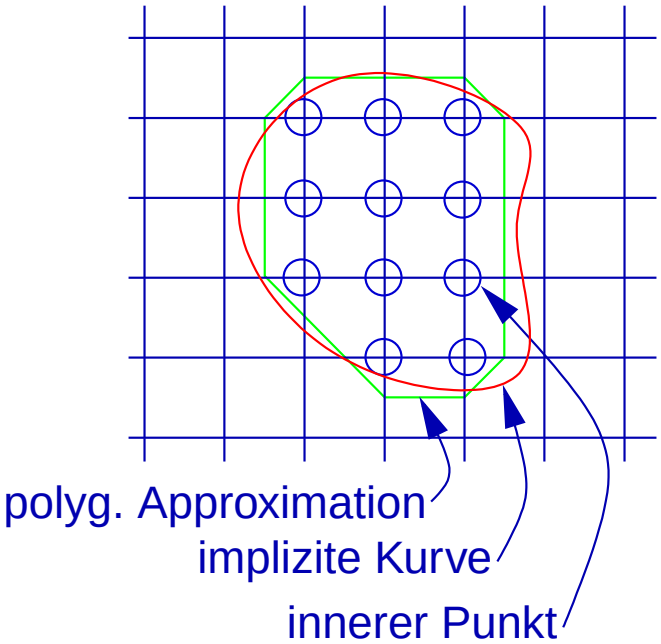


Beliebige implizite Geometrien (2D-Marching Cube Algorithmus)

Ausgangslage: Implizite Geometrie $\{\mathbf{P} : F(\mathbf{P}) = s\} = \{\mathbf{P} : h(\mathbf{P}) = F(\mathbf{P}) - s = 0\}$

Diskretisierung: Betrachte regelmäßiges Gitter:

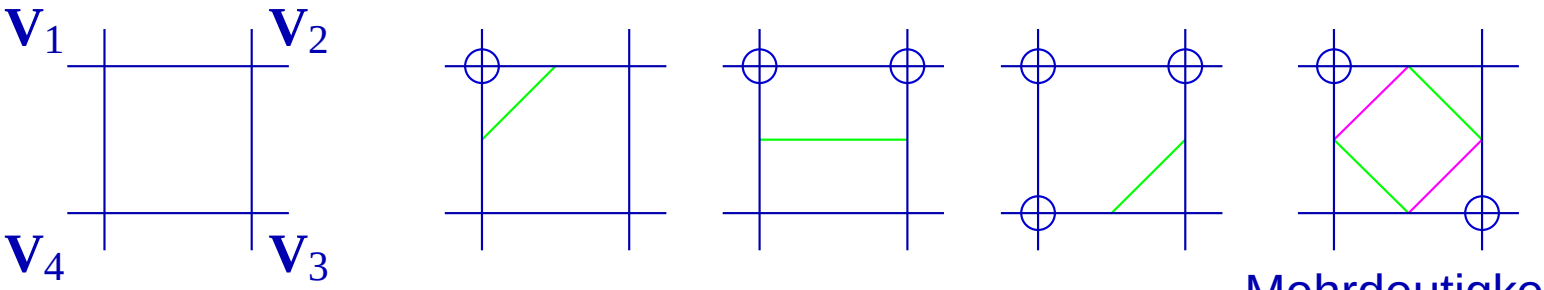
$$\mathbf{P}_{ij} = O + \begin{pmatrix} i\Delta_x \\ j\Delta_y \end{pmatrix}, \quad i \in \{0,\ldots,N_x\},\ j \in \{0,\ldots,N_y\}$$



Klassifikation: Vier grundsätzliche Fälle:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{P}_{ij}, \mathbf{V}_2 = \mathbf{P}_{i+1,j}, \mathbf{V}_3 = \mathbf{P}_{i+1,j+1}, \mathbf{V}_4 = \mathbf{P}_{i,j+1}$$

$\mathbf{V}_k$ Innen/Außen $\Longleftrightarrow h(\mathbf{V}_k) < 0$ bzw. > 0



Beliebige implizite Geometrien (2D-Marching Cube Algorithmus) (Forts.)

Schnittpunkt-Kriterium für Schnitt Kante $\overline{\mathbf{V}_k\mathbf{V}_l}$ schneidet implizite Kurve

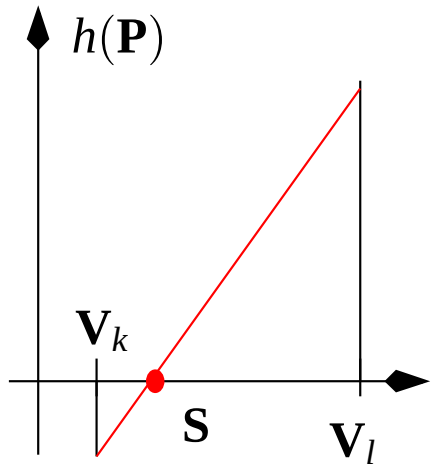
$$\mathbf{S} \Longleftrightarrow h(\mathbf{V}_k) \cdot h(\mathbf{V}_l) < 0$$

Schnittpunktabschätzung mittels Regula-Falsi:

$$\text{Schnittpunkt } \mathbf{S} = \overline{\mathbf{V}_k\mathbf{V}_l} \cap \{\mathbf{P} \ : \ h(\mathbf{P}) = 0\}$$

$$\text{Approximation von } \mathbf{S} : \mathbf{S} \approx (1-\alpha)\mathbf{V}_k + \alpha\mathbf{V}_l$$

$$\text{mit } \alpha = h(\mathbf{V}_k)/(h(\mathbf{V}_k) - h(\mathbf{V}_l))$$

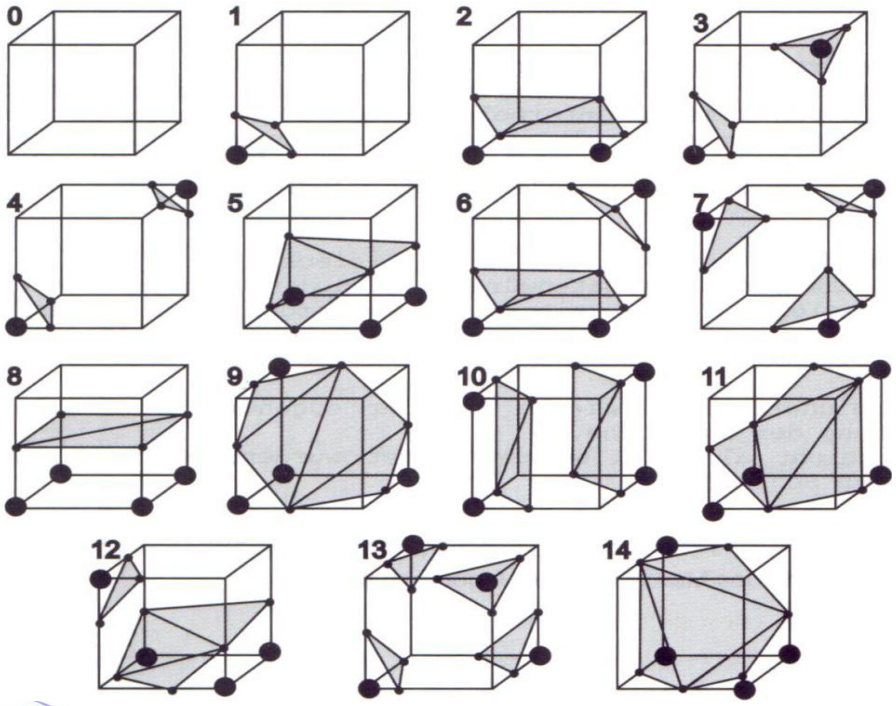


Linearisierung: Verbinde Schnittpunkte durch Kanten entsprechend der Klassifikation

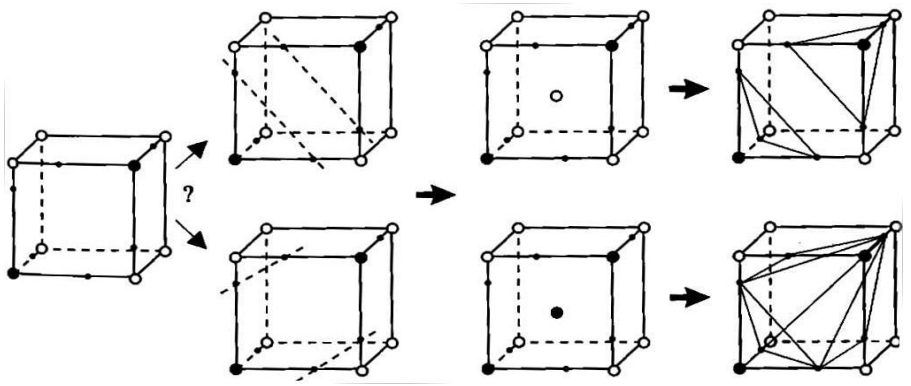
Algorithmus: Marching Cube Algorithmus ($3D$)

- grundsätzlich $2^8 = 256$ mögliche Kombinationen; 15 relevante Fälle
- eine größere Zahl von Problemfällen: fünf Stück
- Linearisierung: Schnittpunkte werden zu Dreiecken verknüpft (Lookup-Table)

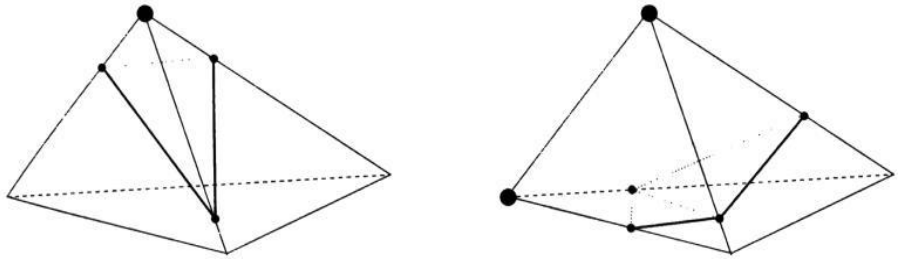
3D-Marching Cube: Klassifikation



Behandlung eines Problemfalls



Marching Tetrahedra



Normalen einer impliziten Fläche

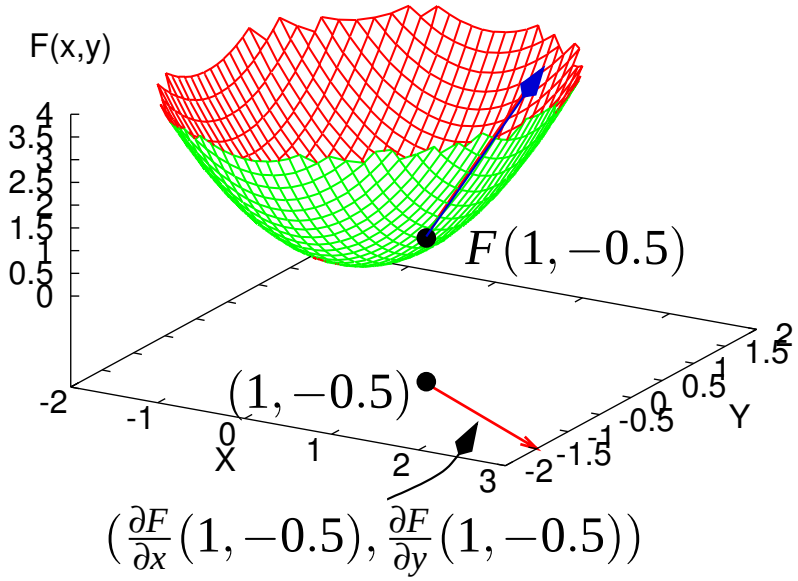
Ziel: Effiziente Bestimmung von Normalenvektoren für implizite Fläche

Beobachtung: Ableitung „zeigt“ in Richtung des steilsten Anstiegs einer Funktion, z.B.:

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = (2x, 2y)$$

Gradient: $\nabla F = \text{grad}\,[F] := \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$



Implizite Fläche:

- Definitionsbereich = Wertebereich = 3D $\Rightarrow$ Gradient Vektor in 3D: $\nabla F = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$
- Implizite Fläche = Iso-Fläche (konstanter Funktionswert)
- Richtung max. und min. Steigung sind orthogonal $\Rightarrow$ Gradient orthogonal zur Fläche