Computergraphik II

Prof. Dr. Andreas Kolb

Fachgruppe Computergraphik und Multimediasysteme

Universität Siegen – Fachbereich 12

Version: 24. November 2004

Grundlagen (Flächen)

Zielsetzung: Verbindung der Vorteile von Freiformflächen und Polygon-Netzen:

- effiziente Speicherung und einfache Kontrolle (Freiformflächen)
- beliebige komplexe Form ohne Teilflächen (Polygon-Netze)

Ansatz: Rekursive Verfeinerung (*Subdivision*) eines *groben Polygon-Netzes* $\mathcal{P}^0$

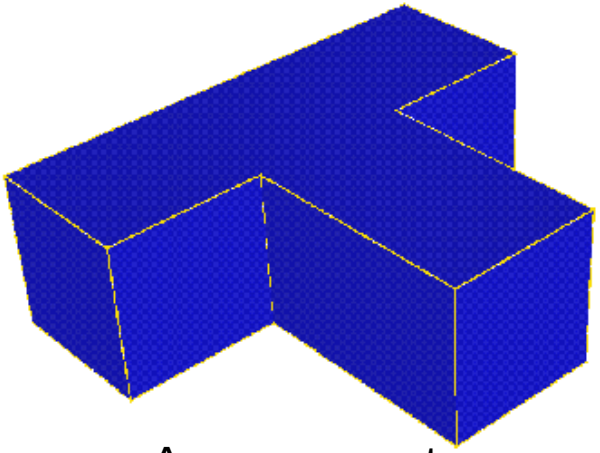
$\mathcal{P}^0 \longrightarrow \mathcal{P}^1 \longrightarrow \cdots \mathcal{P}^\infty$ so dass

1. der Verfeinerungsprozeß konvergiert
2. im Grenzfall ($\longrightarrow \infty$) eine glatte Fläche (C^1 oder C^2) entsteht

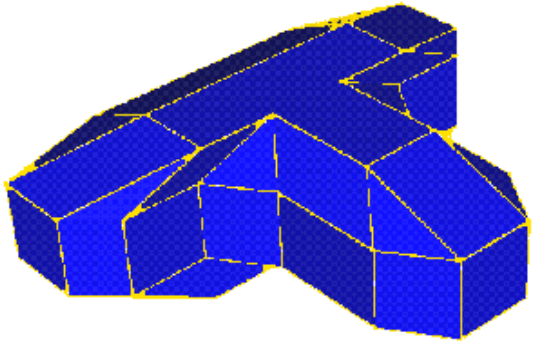
Arten von Punkten: Punkte des verfeinerten Netzes sind alte (*even*) oder neue (*odd*) Punkte

Arten von Subdivisions-Verfahren: *Approximierend* oder *interpolierend*

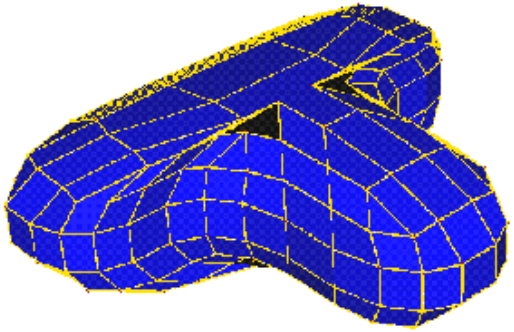
Beispiel:



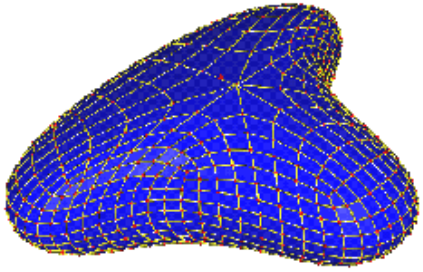
Ausgangsnetz



eine Subdivision



zwei Subdivisionen



drei Subdivisionen

Subdivisions-Kurven nach Chaikin ’74

Gegeben: Sequenz von $k+1$ Punkten $\{\mathbf{P}_0^0, \ldots, \mathbf{P}_k^0\}$

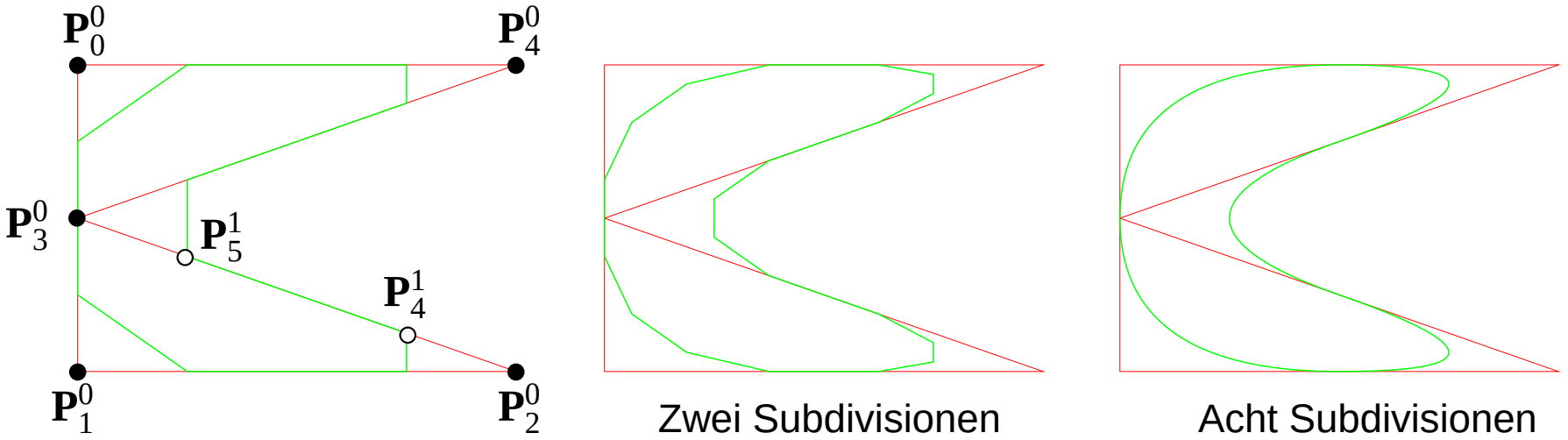
Subdivisionsregel: Auf jeder Kante werden *zwei* neue Punkte definiert:

$$\mathbf{P}_{2j}^{i+1} = \frac{3}{4}\mathbf{P}_j^i + \frac{1}{4}\mathbf{P}_{j+1}^i \qquad \mathbf{P}_{2j+1}^{i+1} = \frac{1}{4}\mathbf{P}_j^i + \frac{3}{4}\mathbf{P}_{j+1}^i$$

es ergibt sich ein *approximierendes Schema*.

Das Schema entspricht *quadratischen B-Splines*, insb. gilt die Konvexe-Hülle Eigenschaft

Beispiel-Kurve (geschlossen):



Zwei Subdivisionen

Acht Subdivisionen

4-Point Subdivisions-Schema

Gegeben: Sequenz von $k+1$ Punkten $\{\mathbf{P}_0^0, \ldots, \mathbf{P}_k^0\}$

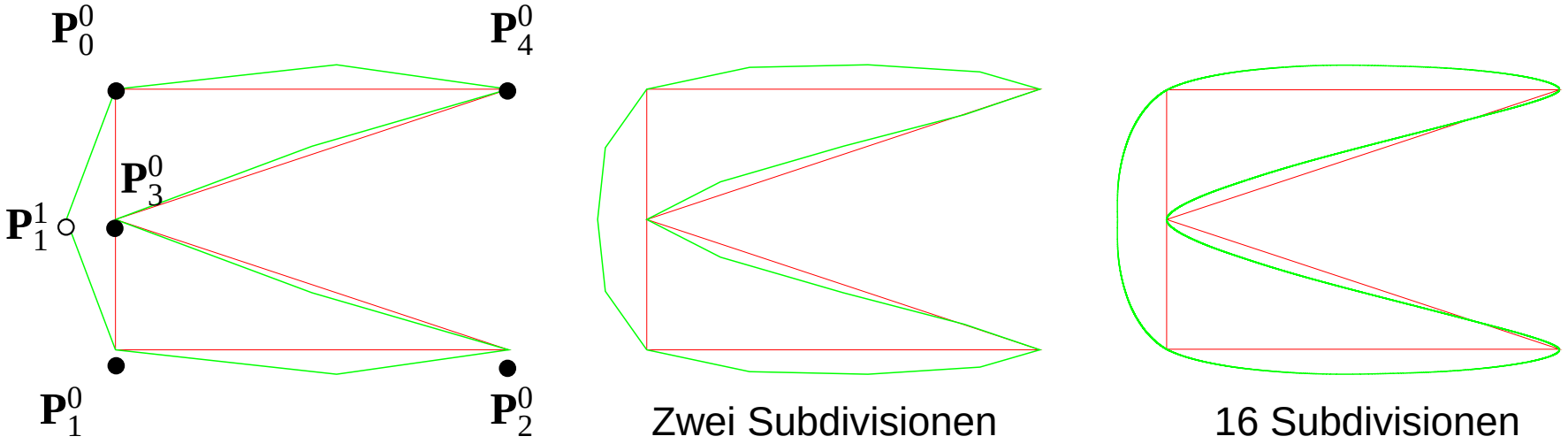
Subdivisionsregel: Auf jeder Kante werden *zwei* neue Punkte definiert:

$$\mathbf{P}_{2j}^{i+1} = \mathbf{P}_j^i, \qquad \mathbf{P}_{2j+1}^{i+1} = \left(\frac{1}{2} + w\right)\left(\mathbf{P}_j^i + \mathbf{P}_{j+1}^i\right) - w\left(\mathbf{P}_{j-1}^i + \mathbf{P}_{j+2}^i\right)$$

Eigenschaften: Originalpunkte bleiben erhalten (*interpolierendes Schema*)

Für $w = \frac{1}{16}$ entsteht eine visuell glatte Kurve.

Beispiel-Kurve (geschlossen): $w = \frac{1}{16}$



Zwei Subdivisionen

16 Subdivisionen

Doo-Sabin Subdivision

Gegeben: 2-mannigfaltiges Polygon-Netz $\mathcal{P}^0$ mit den Eckpunkten $\mathbf{P}^0$

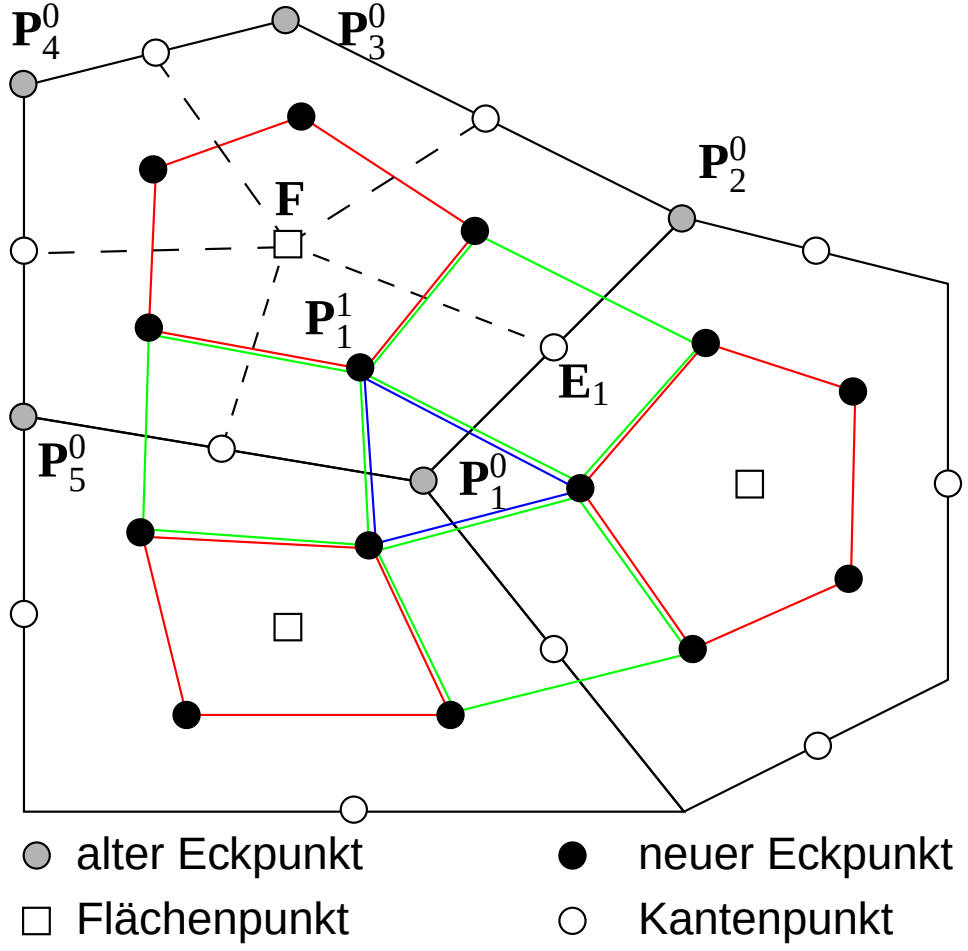
Subdivisionsregel: Betrachte Polygon $(\mathbf{P}_1^0, \ldots, \mathbf{P}_k^0)$ von $\mathcal{P}^0$. Konstruktion:

Flächenpunkt: $\mathbf{F} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}_i^0$

Kantenpunkt: $\mathbf{E}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_i^0 + \mathbf{P}_{i+1}^0),$

$i = 1, \ldots, k,\ \mathbf{P}_{k+1}^0 = \mathbf{P}_1^0$

Eckpunkt: $\mathbf{P}_i^1 = \frac{1}{4}(\mathbf{F} + \mathbf{E}_{i-1} + \mathbf{E}_i + \mathbf{P}_i^0)$



In jedem Schritt

$\mathcal{P}^i$	$\mathcal{P}^{i+1}$
k-seitiges Polygon	k-seitiges Polygon
k-wertiger Eckpunkt	k-seitiges Polygon
Kante	4-seitiges Polygon

Subdivisions-Maske: Matrix-Darstellung eines Subdivisions-Schritts:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_k^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8k} \underbrace{\begin{pmatrix} 4k+2 & k+2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & k+2 \\ k+2 & 4k+2 & k+2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & k+2 & 4k+2 & k+2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 & k+2 & 4k+2 & k+2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & k+2 & 4k+2 & k+2 \\ k+2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & k+2 & 4k+2 \end{pmatrix}}_{=:S} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^0 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_k^0 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Doo-Sabin-Subdivisions-Schema:

- pro Polygon, innerem Eckpunkt und innerer Kante von $\mathcal{P}^0$ entsteht ein Polygon für $\mathcal{P}^1$
- Doo-Sabin Flächen sind eine Verallgemeinerung *quadratischer* B-Splineflächen.
- k-wertige Ecken/k-seitige Flächen, $k \neq 4$ liefern für $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\infty$ *extraordinäre Punkte*:
  - Außerhalb dieser Punkte: $\mathcal{P}$ ist lokal C^1-stetige, quadratische B-Splinefläche.
  - Extraordinäre Punkte: U.u. „unschönes“ Verhalten (keine eindeutige Tangentialebene)

Catmull-Clark Subdivisionsflächen

Gegeben: 2-mannigfaltiges Polygon-Netz $\mathcal{P}^0$

Subdivisionsregel: Betrachte Eckpunkt $\mathbf{V}^0$ (Valenz k), angrenzende *Punkte* $\mathbf{P}_i^0$ und *Mittelpunkte* $\mathbf{F}_i^1,\ i = 1,\ldots,k$ der angrenzenden Polygone.

Kantenpunkt: $\mathbf{P}_i^1 = \dfrac{\mathbf{P}^0 + \mathbf{P}_i^0 + \mathbf{F}_i^1 + \mathbf{F}_{i-1}^1}{4}$

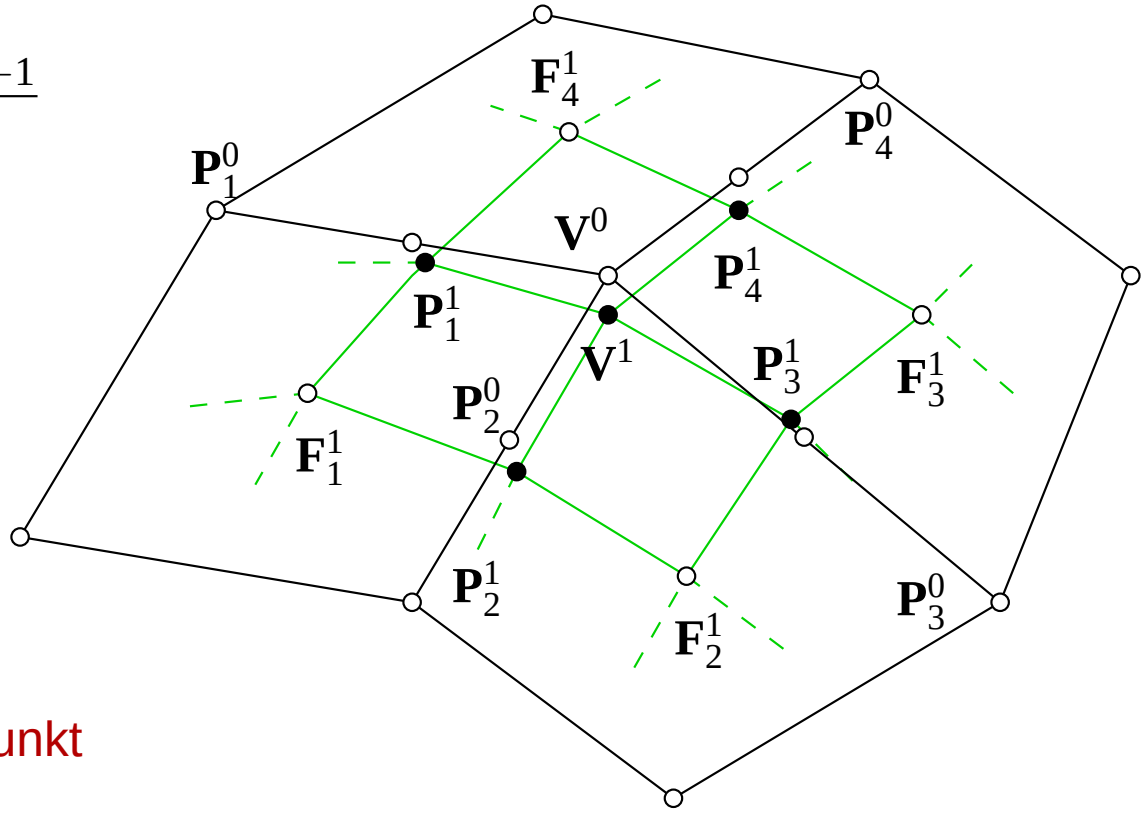
Neue Lage des Eckpunktes:

$$\mathbf{V}^1 = \frac{k-2}{k}\mathbf{V}^0 + \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}_i^0 + \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\mathbf{F}_i^1$$

In jedem Schritt:

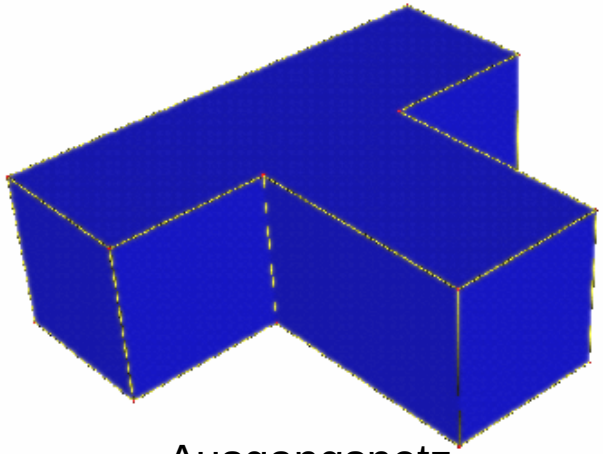
k-seitiges Polygon $\Rightarrow$ k Vierecke

k-wertiger Eckpunkt
k-seitiges Polygon
} $\Rightarrow$ k-wertiger Eckpunkt

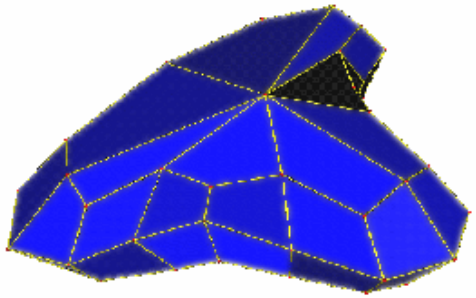


Eigenschaften des Catmull-Clark Subdivisions-Schemas

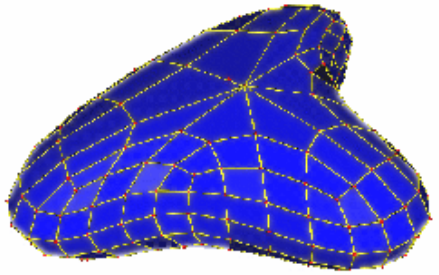
1. pro k-seitiges Polygon entstehen k Vierecke
2. Catmull-Clark Flächen sind eine Verallgemeinerung *kubischer* B-Splineflächen.
3. k-wertige Ecken/k-seitige Flächen, $k \neq 4$ liefern für $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{\infty}$ extraordinäre Punkte:
   - Außerhalb dieser Punkte: $\mathcal{P}$ ist lokal C^2-stetige, kubische B-Splinefläche.
   - Extraordinäre Punkte: U.u. „unschönes“ Verhalten (geringere Stetigkeit)



Ausgangsnetz



eine Subdivision



zwei Subdivisionen

Loop Subdivisionflächen (Ch. Loop 87)

Gegeben: 2-mannigfaltiges Dreiecks-Netz $\mathcal{P}^0$

Subdivisionsregel: Betrachte Eckpunkt $\mathbf{V}^0$ (Valenz k) und angrenzende *Punkte*

$\mathbf{P}_i^0,\ i = 1,\ldots,k$

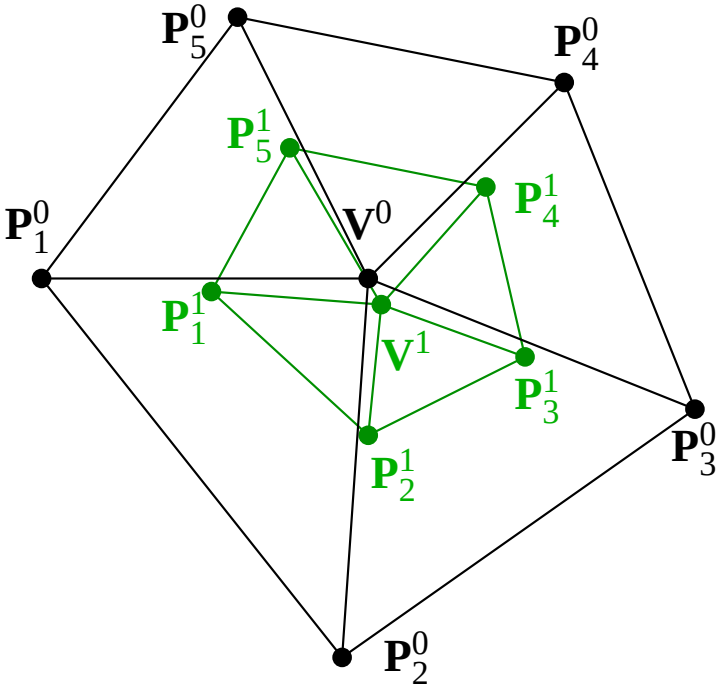
Neue Lage des Eckpunktes:

$$\mathbf{V}^1 = (1-\beta)\mathbf{V}^0 + \beta \cdot \frac{1}{k}(\mathbf{P}_1^0 + \ldots \mathbf{P}_k^0)$$

$$\beta = \frac{5}{8} - \frac{(3+2\cos(2\pi/k))^2}{64}$$

Kantenmittelpunkt:

$$\mathbf{P}_i^1 = \frac{3\mathbf{V}^0 + 3\mathbf{P}_i^0 + \mathbf{P}_{i-1}^0 + \mathbf{P}_{i+1}^0}{8}$$



In jedem Schritt:

Vier neue Dreiecke pro Dreieck

Eigenschaften des Loop-Subdivisions-Schema

1. jedes Dreieck wird in vier Dreiecke unterteilt
2. *extraordinäre Punkte* entstehen bei Eckpunkten mit Valenz $\neq 6$ (reguläre Valenz 6):
   - Außerhalb dieser Punkte: $\mathcal{P}$ ist lokal C^2-stetig
   - Extraordinäre Punkte: U.u. „unschönes“ Verhalten (geringere Stetigkeit)