Computergraphik II

Prof. Dr. Andreas Kolb

Fachgruppe Computergraphik und Multimediasysteme

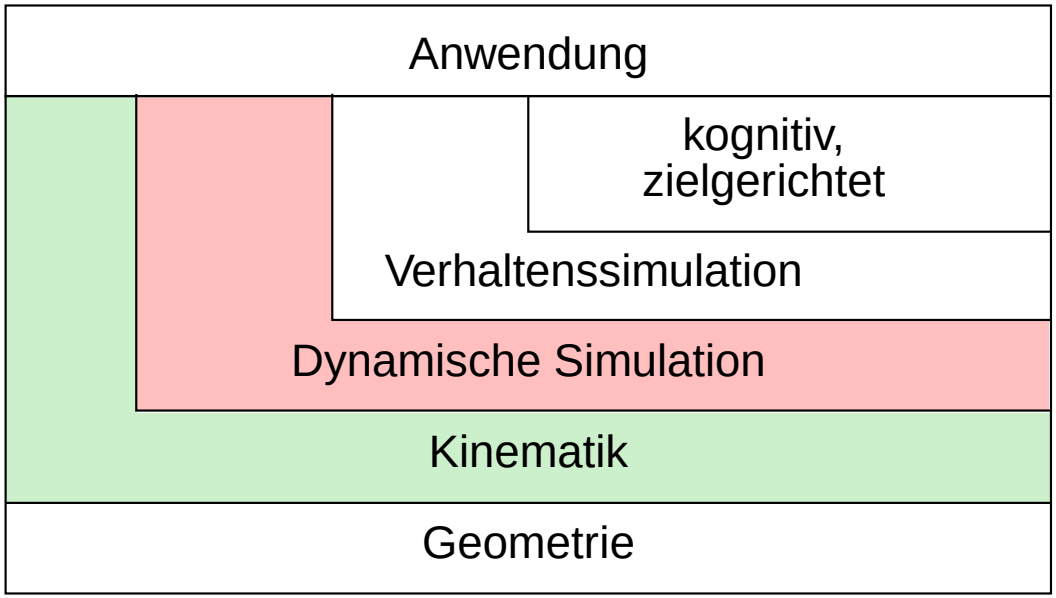
Universität Siegen – Fachbereich 12

Version: 13. Dezember 2004

Animation = „sich über die Zeit verändernde Objekte“, z.B.

1. globale Position und Orientierung
2. Bewegung/Veränderung des Objektes in sich bzw. in Relation zu anderen Objekten

Hierarchie der Ansätze zur Bewegungskontrolle:



Charakter überquert belebte Straße ohne mit anderen Objekten zu kollidieren

Charakter läuft zum Ziel

Charakter ist Kräften ausgesetzt

Charakter bewegt sich

Kinematik: Bewegungslehre (Physik); Bewegung = direkte Geometrie-Modifikation

Beachte: Nicht-konstante Zeitschritte $\Rightarrow$ Geometrie muß jederzeit definiert sein

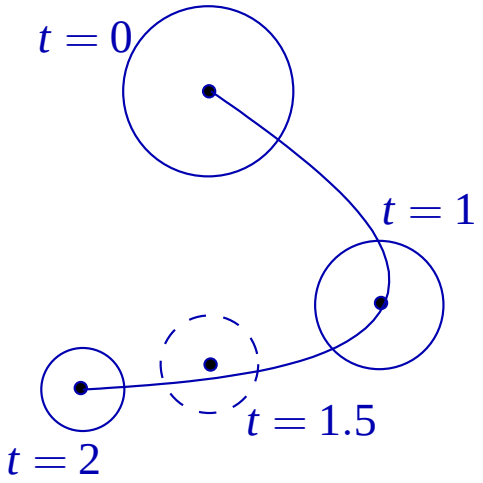
Bezug zur Trickfilm-Animation: Interpolation vorgegebener Schlüsselbilder:

	Zeichentrick-Animation	Computeranimation
Schlüsselbild	Künstler/Choreograph	Animator
In-Betweens	Zeichner	Algorithmus

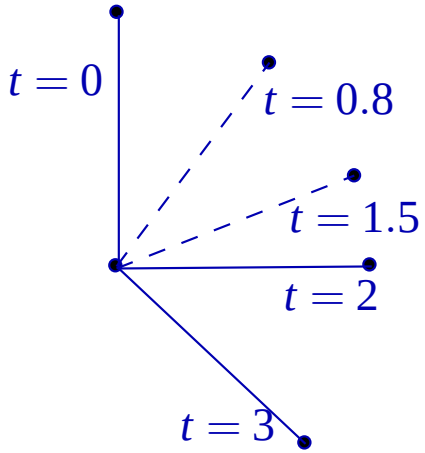
Grundsätzliches Vorgehen: 1. Beschreibung der Szene durch *zeitabhängige Parameter (Animationsparameter)* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$

2. Darstellung zum Zwischenzeitpunkt t durch Interpolation: $(\phi_1(t), \ldots, \phi_N(t))$

Animationsparameter: Unterscheide *Positions-* und *Orientierungsinterpolation*



zeitabhängig: Zentrum $\mathbf{Z}$, Radius r



zeitabhängig: Richtung $\vec{\mathbf{r}}$

8.1.1 Interpolation der Position

Aufgabe:

Interpolation von Positions-Parametern wird auf Basis geeigneter Kurven-Klassen durchgeführt

Die Aufgabe:

Gegeben: Zeit-Positions-Paare $(t_i, \mathbf{P}_i),\ i = 1, \ldots, N$

Gesucht: Kurve $\mathbf{C} : \mathbf{C}(t_i) = \mathbf{P}_i,\ i = 1, \ldots, N$

Interpolations-Kurven

B-Splines (siehe Abschnitt „Interpolation mit B-Splines“)

- stückweise (kubische) Polynomkurven
- C^2-stetige Kurven

Catmull-Rom Splines (siehe auch Hermite-Polynome)

- C^1-stetige kubische Polynomkurven
- heuristische Bestimmung der Tangente (ggf. nachträglich Anpassung)

8.1.2 Beschreibung der Orientierung

Orientierung: Entsteht durch Rotation bzgl. einer Ausgangslage

Interpolation von Orientierung = Interpolation von Rotation

Beschreibung von Rotation: Rotation um Winkel ϕ um x-Achse in homogenen Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Versuch: Matrix-Interpolation zur Interpolation zweier Orientierungen:

Gegeben: $$R_x(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_x(90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gesucht: $$\frac{1}{2}\left(R_x(-90^\circ) + R_x(90^\circ)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq R_x(0^\circ) = Id$$

Euler-Winkel

Ansatz: Sequentielle Rotationen um $x-, y-$ und $z-$Achse in **lokalen Koordinaten**

Pitch, Yaw, Roll Rotation $R_x(\phi_x), R_y(\phi_y), R_z(\phi_z)$ um $x-, y-$ bzw. $z-$Achse

Reihenfolge: Beeinflußt Ergebnis $\Rightarrow$ innerhalb einer Anwendung immer gleich, z.B. x, y, z.

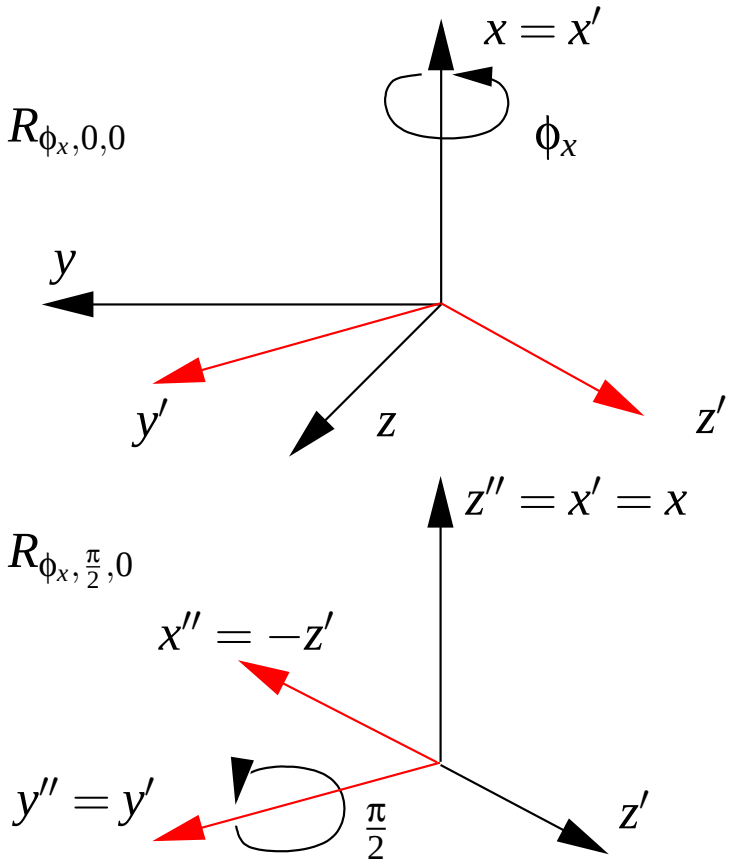
Gesamtrotation für Abarbeitungsreihenfolge x, y, z:

$$R_{\phi_x,\phi_y,\phi_z} := R_x(\phi_x) \circ R_y(\phi_y) \circ R_z(\phi_z)$$

Reihenfolge entspricht Top-Down Ansatz bei Graphik-Programmierung.

Problem: Mehrdeutigkeit (*Gimbal-Lock*)

$$R_{\phi_x,\frac{\pi}{2},\phi_z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\phi_x - \phi_z) & \cos(\phi_x - \phi_z) & 0 & 0 \\ \cos(\phi_x - \phi_z) & -\sin(\phi_x - \phi_z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



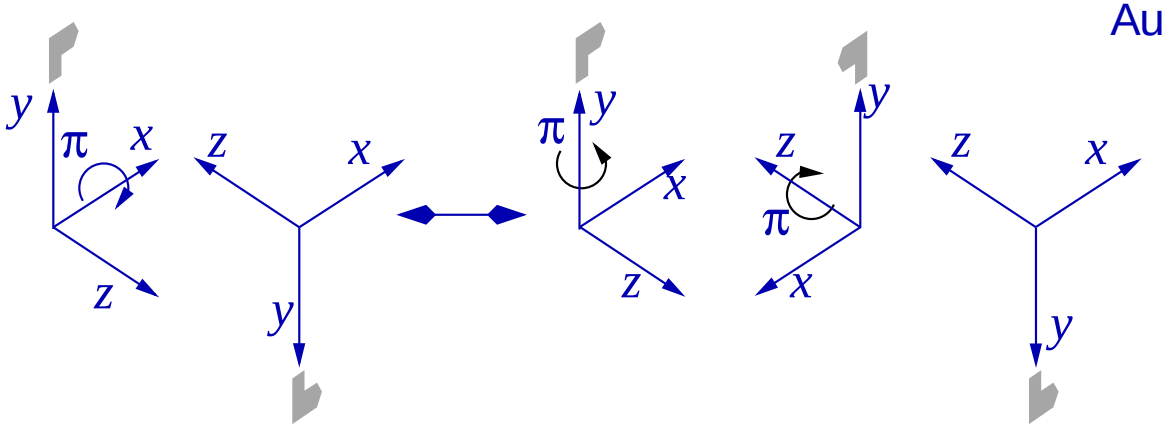
Mehrdeutigkeit der Euler-Winkel & Animation

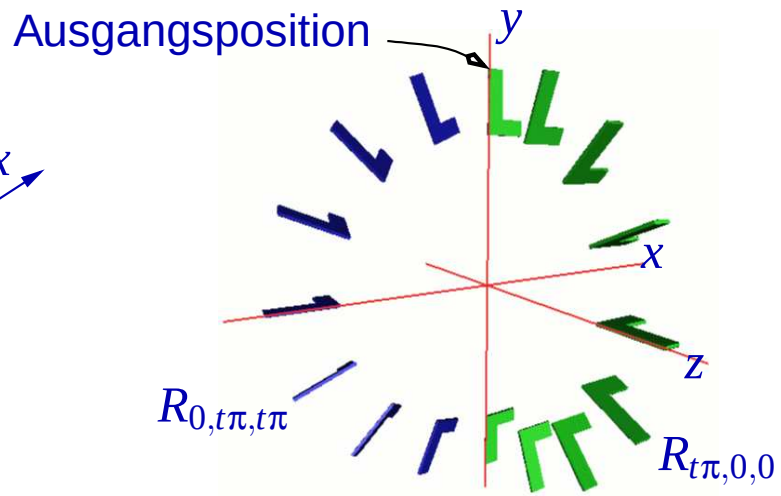
Beachte: Für Animation muß Repräsentation der Orientierung eindeutig sein

Denn: Sonst entstehen mehrdeutige Interpolationsergebnisse

Beispiel:
- $R_{\pi,0,0}$ und $R_{0,\pi,\pi}$ beschreiben dieselbe Orientierung
- Interpolationspfade zwischen $R_{0,0,0}$ und $R_{\pi,0,0} = R_{0,\pi,\pi}$ sind unterschiedlich

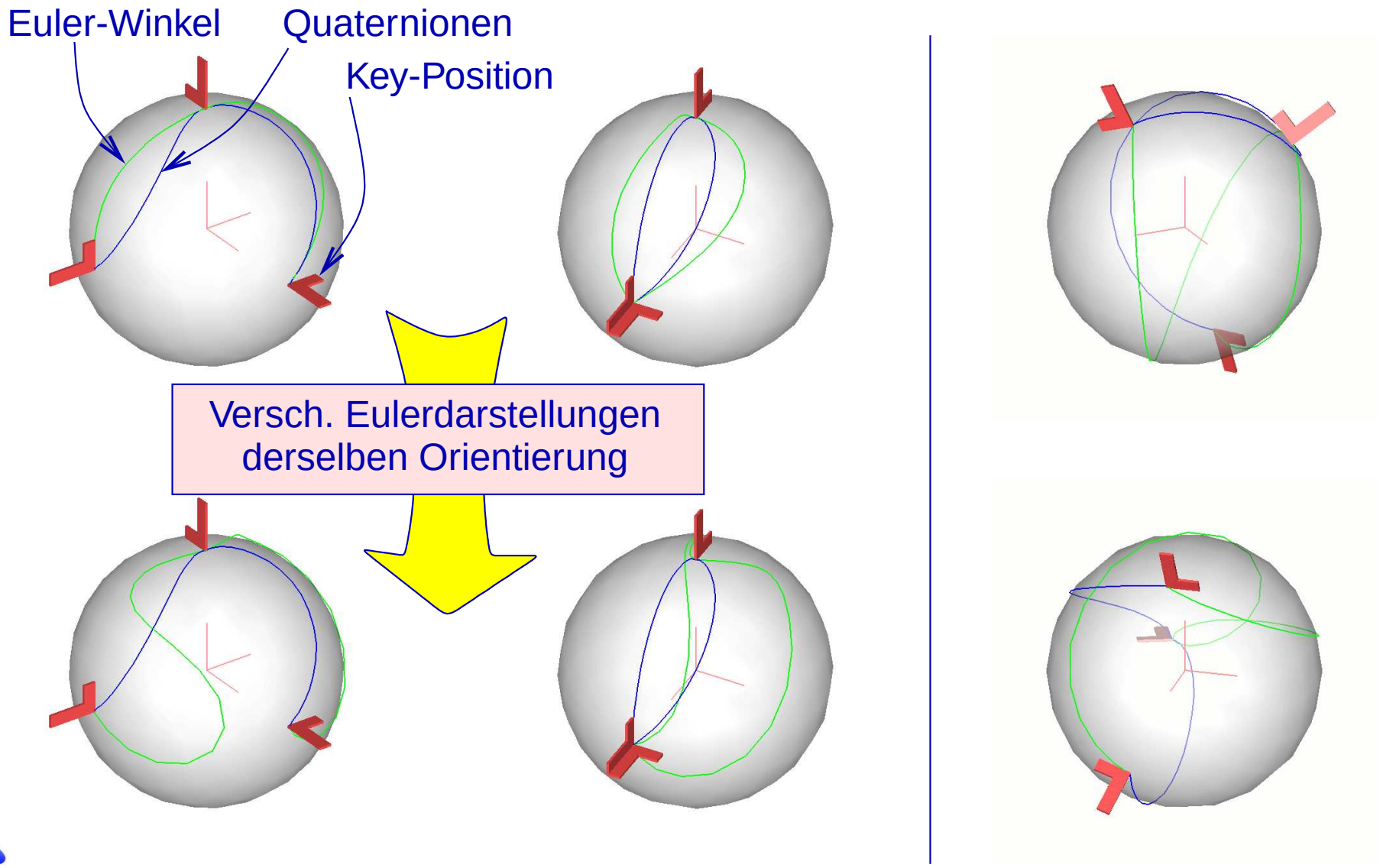
$$R_{t\pi,0,0} \neq R_{0,t\pi,t\pi}, t \in]0,1[$$





Erkenntnis: Euler-Winkel ungeeignete Repräsentation für Animation

Euler-Winkel vs. Quaternionen (Demo-Programm)



8.1.3 Quaternionen

Quaternionen= verallgemeinerte komplexe Zahlen zur Beschreibung von $4D$-Rotationen

Komplexe Zahlen:

Definition: $c = a + bi,\ i^2 = -1,\ i$ imaginäre Einheit

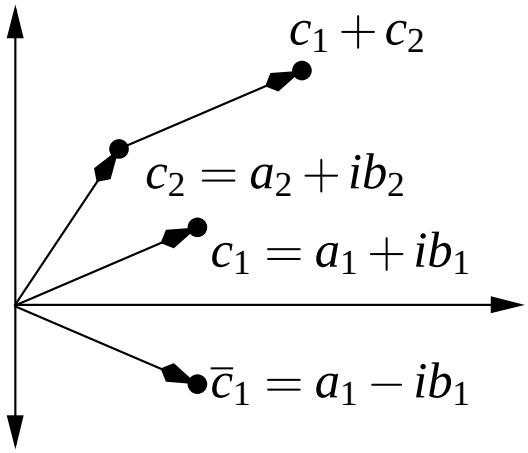
Multiplikation: $c_1 c_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

Konjugierte: $\overline{c} = a - bi$

Länge: $|c|^2 = a^2 + b^2 = c\overline{c},\ |c| = \sqrt{c\overline{c}}$

Winkel: für $|c_1| = |c_2| = 1$ gilt:

$$\cos(\angle(c_1, c_2)) = \Re(c_1 \overline{c}_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$



Beispiel: Betrachte folgende Untermenge: $\mathcal{Z} = \{c\ :\ |c| = 1\}$

Zunächst gilt: $1 = |c| = a^2 + b^2 \Rightarrow \exists_1 \phi \in [0, 2\pi[: \cos\phi = a \wedge \sin\phi = b$

Abgeschlossenheit: c_1, c_2 mit $|c_i| = 1 \Rightarrow c_1 \cdot c_2 \in \mathcal{Z}$

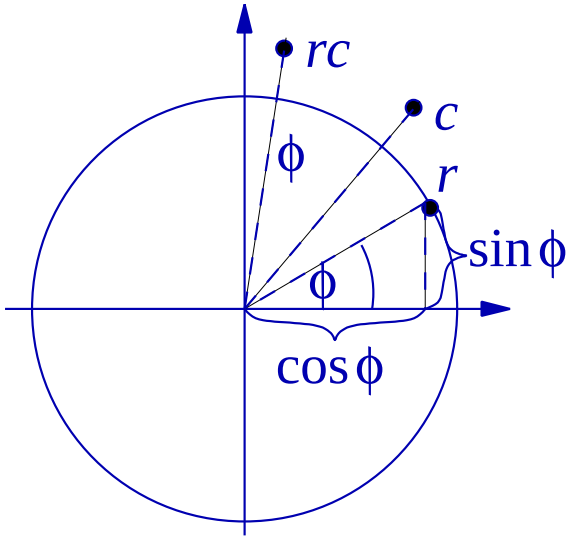
Polar-Koordinaten: Sei $c \in \mathbb{C}$, dann ist $c/|c| \in \mathcal{Z}$

Polar-Koordinaten: $c = |c| e^{i\phi}$

Rotation in 2D

Behauptung: $\mathcal{Z} = \{r \,:\, r = \cos\phi + i\sin\phi,\ \phi \in [0, 2\pi[\}$ beschreibt Rotation um Winkel ϕ:

$$R_\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ c & \mapsto & R_\phi(c) = r \cdot c \end{array}$$



Begründung: Sei $c = |c|\,(\cos\gamma + i\sin\gamma) = |c|\,e^{i\gamma}$

$$\boxed{r \cdot c} = |c|\,\big(\underbrace{\cos\phi\cos\gamma - \sin\phi\sin\gamma}_{=\cos(\phi+\gamma)} + i\big(\underbrace{\cos\phi\sin\gamma + \sin\phi\cos\gamma}_{=\sin(\phi+\gamma)}\big)\big) = \boxed{|c|\,e^{i(\phi+\gamma)}}$$

Bemerkung:

Sir William Hamilton (1805-1865) hat folgendes herausgefunden:

- eine Erweiterung auf $3D$ ist nicht möglich
- eine Verallgemeinerung für $2n$-dimensionale Räume geht

8.1.3 Quaternionen

Definition: Quaternionen

Quaternionen hat eine reale und drei imaginäre Komponenten s bzw. x, y, z.

Schreibweise: Mit imaginäre Einheiten i, j, k:

$$\underline{\mathbf{q}} := s + ix + jy + kz = (s, \vec{\mathbf{v}}),\ \vec{\mathbf{v}} = (x, y, z) \quad \text{Zahlenmenge: } \mathbb{H}$$

wobei $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j$ und $ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$

Addition: $\underline{\mathbf{q_1}} + \underline{\mathbf{q_2}} = (s_1 + s_2, \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2)$

Multiplikation: Durch Anwendung obiger Regeln folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{q_1 q_2}} &= (s_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1)(s_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2) \\
&= s_1 s_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + i(s_1 x_2 + s_2 x_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1) \\
&\quad + j(s_1 y_2 + s_2 y_1 + z_1 x_2 - z_2 x_1) + k(s_1 z_2 + s_2 z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1) \\
&= (s_1 s_2 - (\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2), s_1 \vec{\mathbf{v}}_2 + s_2 \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2)
\end{aligned}$$

Wegen Unsymmetrie $ij = -ji, jk = -kj, ki = -ik$ ist die Multiplikation **nicht kommutativ**.

Eigenschaften von Quaternionen

Konjugierte: $\overline{\underline{\mathbf{q}}} = (s, -\vec{\mathbf{v}})$ und $\overline{\underline{\mathbf{q}}_1}\,\overline{\underline{\mathbf{q}}_2} = (s_1 s_2 - (\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2), -s_1\vec{\mathbf{v}}_2 - s_2\vec{\mathbf{v}}_1 + \underbrace{\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2}_{=-\vec{\mathbf{v}}_2 \times \vec{\mathbf{v}}_1}) = \overline{(\underline{\mathbf{q}}_2 \underline{\mathbf{q}}_1)}$

Länge: $\underline{\mathbf{q}}\overline{\underline{\mathbf{q}}} = (s^2 + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}), s\vec{\mathbf{v}} - s\vec{\mathbf{v}} + \underbrace{\vec{\mathbf{v}} \times (-\vec{\mathbf{v}})}_{=\vec{\mathbf{0}}}) \in \mathbb{R}$, $\left|\underline{\mathbf{q}}\right| = \sqrt{\underline{\mathbf{q}}\overline{\underline{\mathbf{q}}}} = \sqrt{s^2 + (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}})}$

Winkel: Für $\left\|\underline{\mathbf{q}}_1\right\| = \left\|\underline{\mathbf{q}}_2\right\| = 1$ gilt: $\cos(\angle(\underline{\mathbf{q}}_1, \underline{\mathbf{q}}_2)) = \Re(\underline{\mathbf{q}}_1\overline{\underline{\mathbf{q}}}_2) = s_1 s_2 + (\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2)$

Quaternionen mit der Länge 1 werden *Einheitsquaternionen* genannt.

Rotation mit Quaternionen

Ansatz: $\underline{\mathbf{q}} = (\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2}\hat{\mathbf{v}})$, $\left\|\underline{\mathbf{q}}\right\| = 1$ beschreibt Rotation um Achse $\hat{\mathbf{v}}$ mit Winkel ϕ

Rotation: $R_{\underline{\mathbf{q}}}(\mathbf{P}) = \underline{\mathbf{q}}\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}\overline{\underline{\mathbf{q}}}$, wobei $\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}} = (0, \vec{\mathbf{p}})$ und $\vec{\mathbf{p}}$ ist der Ortsvektor von $\mathbf{P}$

Hintereinanderausführung von Rotationen entspricht Multiplikation von Quaternionen:

$$R_{\underline{\mathbf{q}}_2}\left(R_{\underline{\mathbf{q}}_1}(\mathbf{P})\right) = \underline{\mathbf{q}}_2(\underline{\mathbf{q}}_1\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}\overline{\underline{\mathbf{q}}_1})\overline{\underline{\mathbf{q}}_2} = (\underline{\mathbf{q}}_2\underline{\mathbf{q}}_1)\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}(\overline{\underline{\mathbf{q}}_1}\,\overline{\underline{\mathbf{q}}_2}) = (\underline{\mathbf{q}}_2\underline{\mathbf{q}}_1)\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}\overline{(\underline{\mathbf{q}}_2\underline{\mathbf{q}}_1)} = R_{\underline{\mathbf{q}}_2\underline{\mathbf{q}}_1}(\mathbf{P})$$

Beispiel:

Rotation von $\mathbf{P} = (1,2,0)$ um $\hat{\mathbf{v}} = (1,0,0)$ mit Winkel π (Ergebnis: $(1,-2,0)$).

$$\underline{\mathbf{q}} = (\cos(\pi/2), \sin(\pi/2)\hat{\mathbf{v}}) = (0,(1,0,0)); \; \underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}} = (0,(1,2,0)); \; \overline{\underline{\mathbf{q}}} = (0,-(1,0,0))$$

Berechnung von $R_{\underline{\mathbf{q}}}(\mathbf{P})$ in zwei Schritten:

1. $$\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}\overline{\underline{\mathbf{q}}} = \left(-\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right) = (1,(0,0,2))$$

2. $$\underline{\mathbf{q}}(\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}\overline{\underline{\mathbf{q}}}) = \left(-\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right) = (0,(1,-2,0))$$

Das Quaternion $(0,(1,-2,0))$ entspricht dem Punkt $(1,-2,0)$

Mehrdeutigkeit von Quaternionen

Beobachtung: $\underline{\mathbf{q}}$ und $-\underline{\mathbf{q}}$ liefert dasselbe Ergebnis:

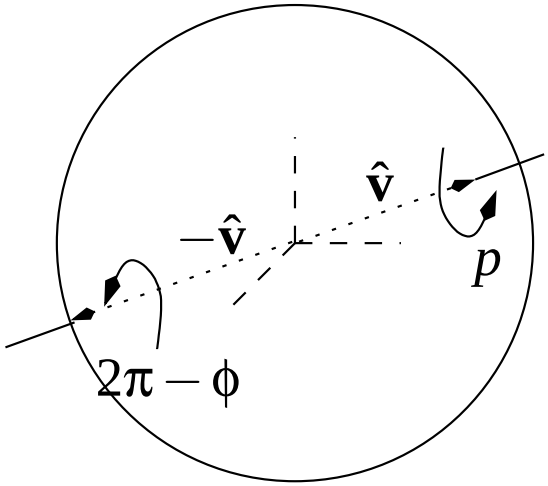
1. Multiplikation bzgl. reeller Faktoren ist **kommutativ**, z.B.
   $a \cdot (s, \vec{\mathbf{v}}) \cdot b = (ab\,s, ab\vec{\mathbf{v}}) = ab(s, \vec{\mathbf{v}})$
2. damit gilt:

$$R_{\underline{\mathbf{q}}}(\mathbf{P}) = \underline{\mathbf{q}}\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}\overline{\underline{\mathbf{q}}} = (-1)^2\underline{\mathbf{q}}\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}\overline{\underline{\mathbf{q}}} = (-\underline{\mathbf{q}})\underline{\mathbf{q}}_{\mathbf{P}}(-\overline{\underline{\mathbf{q}}})$$

Analyse: $-\underline{\mathbf{q}}$ entspricht Rotation um $-\hat{\mathbf{v}}$ mit Winkel $2\pi - \phi$, denn

$$\cos(\pi - \tfrac{\phi}{2}) = -\cos(\tfrac{\phi}{2}),\ \sin(\pi - \tfrac{\phi}{2}) = \sin(\tfrac{\phi}{2})$$

$$\Rightarrow -\underline{\mathbf{q}} = (\cos(\pi - \tfrac{\phi}{2}), \sin(\pi - \tfrac{\phi}{2})(-\hat{\mathbf{v}}))$$



Mehrdeutigkeit: Beide Rotationen liefern dasselbe Ergebnis!

Weitere Mehrdeutigkeiten gibt es nicht!

Beispiel: Mehrdeutigkeit bei Euler-Winkeln

Erinnerung: Für Eulerwinkel ist $R_{\pi,0,0} = R_{0,\pi,\pi}$

Frage: Wie sieht das bei Quaternionen aus?

$$R_{\pi,0,0} \;\hat{=}\; R_{\underline{\mathbf{q}}_x} \text{ mit } \underline{\mathbf{q}}_x = (0,(1,0,0)), \text{ da } \sin\frac{\pi}{2} = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$R_{0,\pi,0} \;\hat{=}\; R_{\underline{\mathbf{q}}_y} \text{ mit } \underline{\mathbf{q}}_y = (0,(0,1,0)), \quad R_{0,0,\pi} \hat{=} R_{\underline{\mathbf{q}}_z} \text{ mit } \underline{\mathbf{q}}_z = (0,(0,0,1))$$

$$R_{0,\pi,\pi} \;\hat{=}\; R_{\underline{\mathbf{q}}_y} \circ R_{\underline{\mathbf{q}}_z} = R_{\underline{\mathbf{q}}_y \underline{\mathbf{q}}_z} = R_{\underline{\mathbf{q}}_x}$$

$$\text{da } (0,(0,1,0)) \cdot (0,(0,0,1)) = \left(0, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = (0,(1,0,0))$$

Ergebnis: $R_{\pi,0,0}$ und $R_{0,\pi,\pi}$ entsprechen demselben Einheitsquaternion $\underline{\mathbf{q}} = (0,(1,0,0))$

Umrechnung Quaternionen ↔ Rotationsmatrizen

Umrechnung des Einheitsquaternion $\underline{\mathbf{q}} = (\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2}\hat{\mathbf{v}}) = (s,(x,y,z))$ in Rotationsmatrix R:

$$R_{\underline{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2xy-2sz & 2xz+2sy \\ 2xy+2sz & 1-2(x^2+z^2) & 2yz-2sx \\ 2xz-2sy & 2yz+2sx & 1-2(x^2+y^2) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Umrechnung der Rotationsmatrix $R = (r_{ij})_{i,j=1,\ldots,3}$ in Einheitsquaternion. Aus Gleichung (1)

$$r_{11}+r_{22}+r_{33} = 3-4(x^2+y^2+z^2) = 3-4(1-s^2) = -1+4s^2$$

$$\Rightarrow s = \pm\frac{1}{2}\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}$$

$$r_{32}-r_{23} = 4sx \Rightarrow x = \frac{r_{32}-r_{23}}{4s}, \quad \text{analog: } y = \frac{r_{13}-r_{31}}{4s},\ z = \frac{r_{21}-r_{12}}{4s}$$

Beachte: Positives bzw. negatives s liefern zwei Quaternionen $\underline{\mathbf{q}}^+, \underline{\mathbf{q}}^-$, aber $\underline{\mathbf{q}}^- = -\underline{\mathbf{q}}^+$ beschreiben dieselbe Orientierung!

8.1.4 Interpolation der Orientierung

Ziel: Interpolation von Orientierungen, in Euler-Notation:

Gegeben: Zeit-Orientierungs-Paare $(t_i, R_{\vec{\phi}^i})$, $\vec{\phi}^i = \left(\phi_x^i, \phi_y^i, \phi_z^i\right)$, $i = 1, \ldots, N$

Gesucht: Funktion $R : R(t_i) = R_{\vec{\phi}^i}$, $i = 1, \ldots, N$

Interpolation mit Euler-Winkeln:

- Direkte Interpolation der Euler-Winkel (z.B. B-Splines)
- Problem: Ergebnis von der Repräsentation der Orientierung abhängig

Interpolation mit Quaternionen:

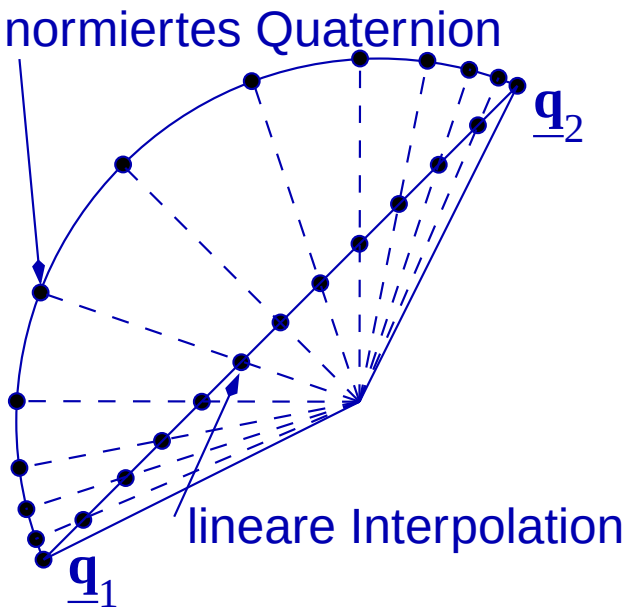
Erinnerung: Rotationen werden durch $4D$-**Einheitsquaternionen** beschrieben

Problem: Interpolierte Quaternionen müssen Einheitsquaternionen sein.

Bézier, B-Spline leisten das nicht:

$\mathbf{C}(i) \in \mathbb{R}^4, \|\mathbf{C}(i)\| = 1 \not\Longrightarrow \|\mathbf{C}(u)\| = 1.$

Einfache Normierung: Verzerrte Geschwindigkeit



Sphärische lineare Interpolation (slerp)

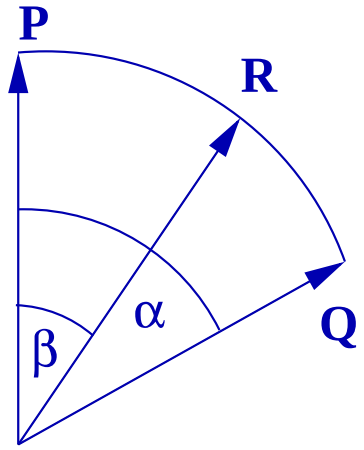
Ziel: „Lineare“ Interpolation auf einer Kugeloberfläche bzw. Großkreisbogen

Gegeben: $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ auf Einheitskreis (bzw. auf Großkreis), $\mathbf{R}$ „zwischen“ $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$:

$\alpha = \angle(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \beta = \angle(\mathbf{P}, \mathbf{R})$.

Lösung: Zusammenhang zwischen Winkel und Punkt:

$$\mathbf{R} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha}\mathbf{P} + \frac{\sin(\beta)}{\sin\alpha}\mathbf{Q}$$



Damit gilt für $\beta = t\alpha$, $t \in [0,1]$:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha}\mathbf{P} + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin\alpha}\mathbf{Q}$$

Linearen Interpolation von Rotationen durch sphärische Interpolation von Einheitsquaternionen:

$$\underline{\mathbf{q}}(t) = \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin\alpha}\underline{\mathbf{q}}_1 + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin\alpha}\underline{\mathbf{q}}_2, \qquad \cos\alpha = s_1 s_2 + (\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2)$$

Sphärische Spline Interpolation

Beobachtung: Auswertung von Bézier- und B-Spline Kurven basiert auf sukzessiver linearer Interpolation aus Kontrollpunkten (de Casteljau, de Boor)

Frage: Gilt das auch für *Catmull-Rom-Splines* mit Interpolationspunkten $\mathbf{P}_i$?

Notwendig: Bézier-Kontrollpunkte entstehen durch lineare Interpolation aus $\mathbf{P}_i$

Konkret: i-tes Bézier-Segment mit KPs $\mathbf{C}_0^i, \ldots, \mathbf{C}_3^i$ und Interpolationspunkte $\mathbf{P}_{i-1}, \ldots, \mathbf{P}_{i+2}$:

$$\mathbf{C}_0^i = \mathbf{P}_i, \quad \mathbf{C}_3^i = \mathbf{P}_{i+1} (\text{Endpunkte}), \qquad \vec{\mathbf{t}}_i = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_{i-1}\right) (\text{Tangenten})$$

$$\mathbf{C}_1^i = \mathbf{P}_i + \tfrac{1}{3}\vec{\mathbf{t}}_i = \mathbf{P}_i + \tfrac{1}{6}\left(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_{i-1}\right) = \tfrac{1}{6}\left[2\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{P}_i + \tfrac{1}{2}\mathbf{P}_{i+1}\right) - \mathbf{P}_{i-1}\right] + \tfrac{5}{6}\mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{C}_2^i = \mathbf{P}_{i+1} - \tfrac{1}{3}\vec{\mathbf{t}}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1} - \tfrac{1}{6}\left(\mathbf{P}_{i+2} - \mathbf{P}_i\right) = \tfrac{1}{6}\left[2\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{P}_{i+1} + \tfrac{1}{2}\mathbf{P}_i\right) - \mathbf{P}_{i+2}\right] + \tfrac{5}{6}\mathbf{P}_{i+1}$$

Sphärische Spline Interpolation: Verwende slerp-Operation anstelle linearer Interpolation!

Sphärische Spline Interpolation (Forts.)

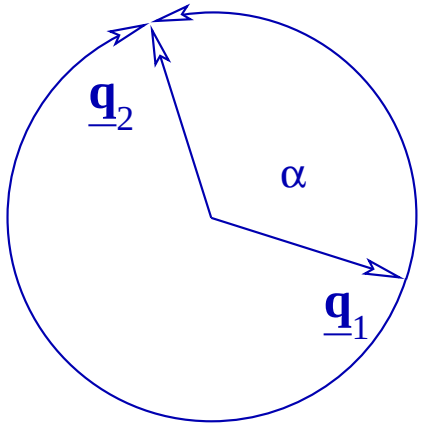
Gegeben: Zu interpolierende Quaternionen-Sequenz $\underline{\mathbf{q}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{q}}_n$

Frage: Welcher Repräsentant von $R_{\underline{\mathbf{q}}_i}$ ist zu wählen, $\underline{\mathbf{q}}_i$ oder $-\underline{\mathbf{q}}_i$?

Analogie zum Einheitskreis: Der kleineren Winkel representiert die „kurze“ Strecke.
Regel:

$$\angle(\underline{\mathbf{q}}_i, \underline{\mathbf{q}}_{i+1}) > \tfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \Re(\underline{\mathbf{q}}_i \overline{\underline{\mathbf{q}}}_{i+1}) < 0 \Rightarrow \underline{\mathbf{q}}_{i+1} \leftarrow -\underline{\mathbf{q}}_{i+1}$$

in sequentieller Reihenfolge $i = 1, i = 2, \ldots, i = n-1$



Beachte: $\underline{\mathbf{q}}_i$ wird **zweimal** mit **halbem Winkel** angewendet,
daher $> \frac{\pi}{2} (= 90°)$

Idee: Spline-basierte Animation

Keyframe-Animation: Vorgabe von Parameter zu Key-Zeitpunkten; Berechnung interpolierender Spline-Kurven

Spline-basiert: Direkte Vorgabe der Spline-Kurven

Fragen:

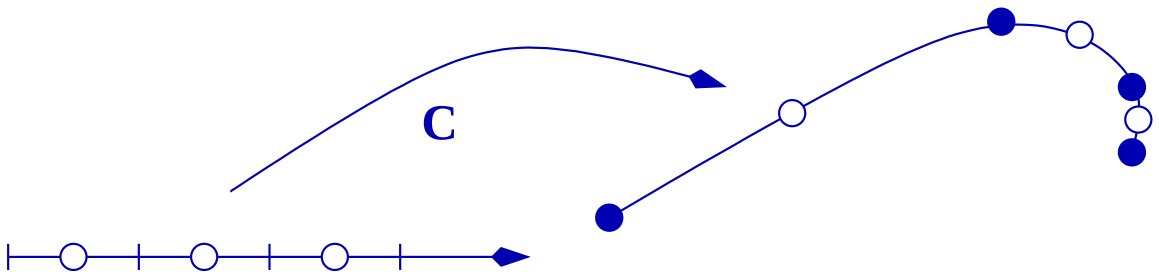
1. Welche Animationsparameter sind für Spline-basiert geeignet?

   +: Bewegung eines Körpers durch den Raum (intuitive Bewegungsbahn)

   –: Fingerspritze eines schlenkernden Arms eines gehenden Charakters

2. Wie kommt der Zeitbezug ins Spiel?

   Wichtig: Gleichförmige Abtastung des Parameters u erzeugt keine gleichförmige Bewegung entlang der Kurve!

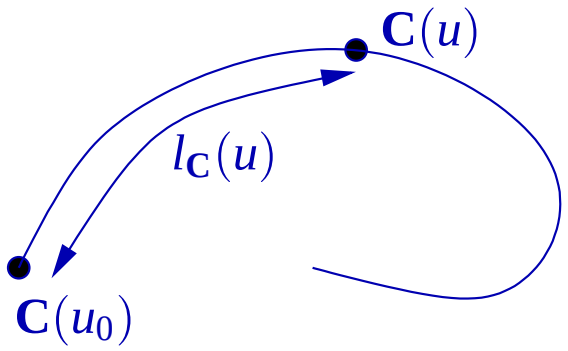


8.2.1 Pfad und Geschwindigkeit

Ziel: Bewegung eines Körpers entlang einer Kurve

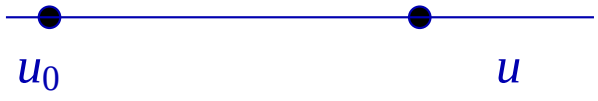
Bewegungspfad des Objekt im Raum

$$\mathbf{C}(u): \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \mapsto & (x(u), y(u), z(u)) \end{array}$$



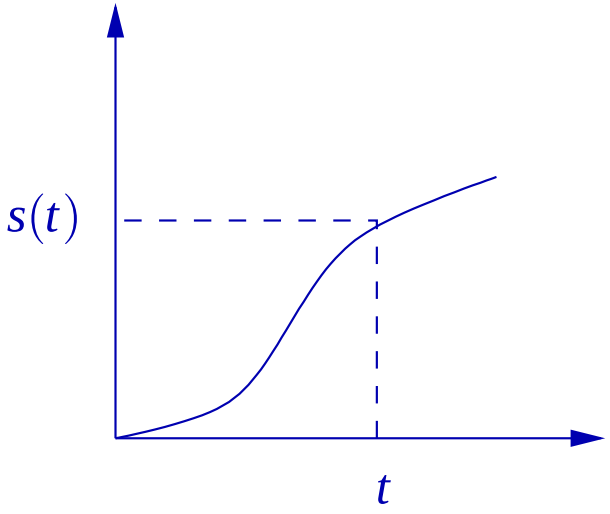
Wegfunktion: Zurückgelegter Weg auf dem Pfad zum Zeitpunkt t:

$$s(t): \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & s(t) \end{array}$$



Bewegungspfad

Ziel: Bewegung des Objektes entlang $\mathbf{C}$, so dass zum Zeitpunkt t der Weg $s(t)$ zurückgelegt ist.



Wegfunktion

Bogenlängenfunktion $l_{\mathbf{C}}(u)$ mißt Länge des Kurvenstückes für Pfad $\mathbf{C}$ vom Startpunkt $\mathbf{C}(u_0)$ bis $\mathbf{C}(u)$

Unterscheide: Modellierungsparameter u (Bewegungspfad), Zeit-Parameter t (Wegfunktion)

Ermittlung der Bogenlänge

Gegeben: Bewegungspfad $\mathbf{C}(u)$ mit Start- und Zielparameter u_0 bzw. u

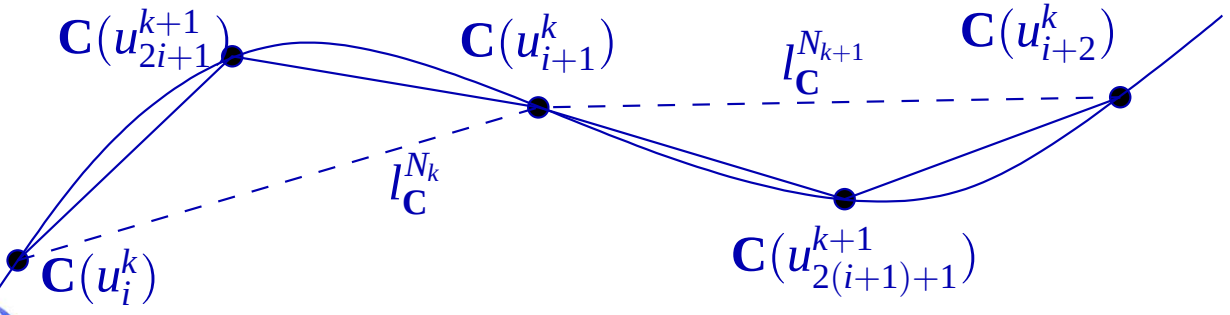
Abschätzung der Bogenlänge $l_{\mathbf{C}}(u)$ durch Länge eines Kantenzuges:

$$l_{\mathbf{C}}(u) \approx l_{\mathbf{C}}^{N}(u) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\mathbf{C}(u_{i+1}) - \mathbf{C}(u_i)\|, \text{ wobei } u_i = u_0 + i\Delta_N,\ \Delta_N = \frac{u-u_0}{N}$$

Exakte Lösung durch Grenzbetrachtung:

$$l_{\mathbf{C}}^{N}(u) = \sum_{i=0}^{N-1} \|\mathbf{C}(u_{i+1}) - \mathbf{C}(u_i)\| = \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \frac{\mathbf{C}(u_{i+1}) - \mathbf{C}(u_i)}{\Delta_N} \right\| \Delta_N \overset{N\to\infty}{=} \int_{u_0}^{u} \|\mathbf{C}'(\tau)\|\, d\tau$$

Implementation: I.a. Integral nicht lösbar $\Rightarrow$ Abschätzung mit $N_k = 2^k$



Abbruch, falls wenig Genauigkeitszuwachs:

$$l_{\mathbf{C}}^{N_{k+1}} - l_{\mathbf{C}}^{N_k} < \varepsilon$$

Ermittlung des Parameters u (feste Pfad-Kurve)

Beobachtung: Ermittlung von $l_{\mathbf{C}}$ wird durch Auswertung von $\mathbf{C}$ dominiert

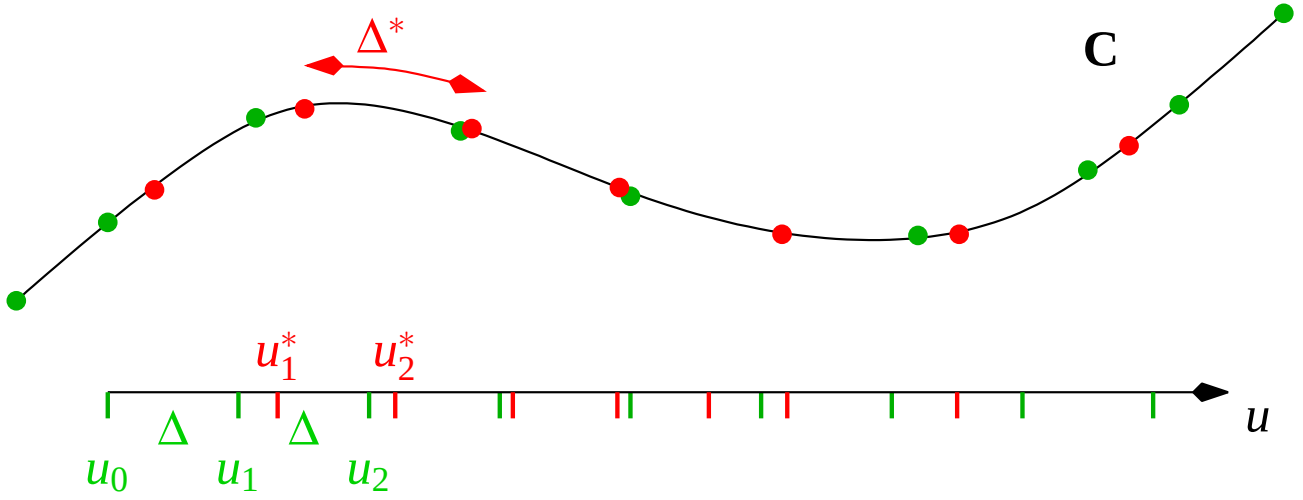
Ansatz für feste Pfad-Kurve: Speicherung von $l_{\mathbf{C}}(u)$ in **Look-Up Tabelle**

1. Speicherung von $l_{\mathbf{C}}(u_i)$ für äquidistante Parameter u_i
2. Speicherung von u_i^* für äquidistante Bogenlängen

   $\Rightarrow$ effizienterer Zugriff auf gesuchte u-Parameter

Variante 1:

u_0	0
u_1	l_1
u_2	$l_1 + l_2$



Variante 2:

0	u_0^*
l_1^*	u_1^*
l_2^*	u_2^*

$u_i = u_0 + i \cdot \Delta$

$l_i = \|\mathbf{C}(u_i) - \mathbf{C}(u_{i-1})\|$

$l_{i+1}^* - l_i^* = \Delta^*$

$l_i^* = l_{\mathbf{C}}(u_i^*)$

Ermittlung des Parameters u (allgemeiner Fall)

Aufgabe: Zu gegebener Wegfunktion s und Zeitpunkt t: Für welchen Parameterwert u gilt

$$l_{\mathbf{C}}(u) = s(t)$$

Ansatz: Suche Nullstelle von $g(u) = l_{\mathbf{C}}(u) - s(t)$

Beachte: $l_{\mathbf{C}}(u)$ ist monoton wachsend $\Rightarrow$ eindeutige Nullstelle von $g(u)$.

Newton-Verfahren ermittelt Nullstelle von $g(u)$:

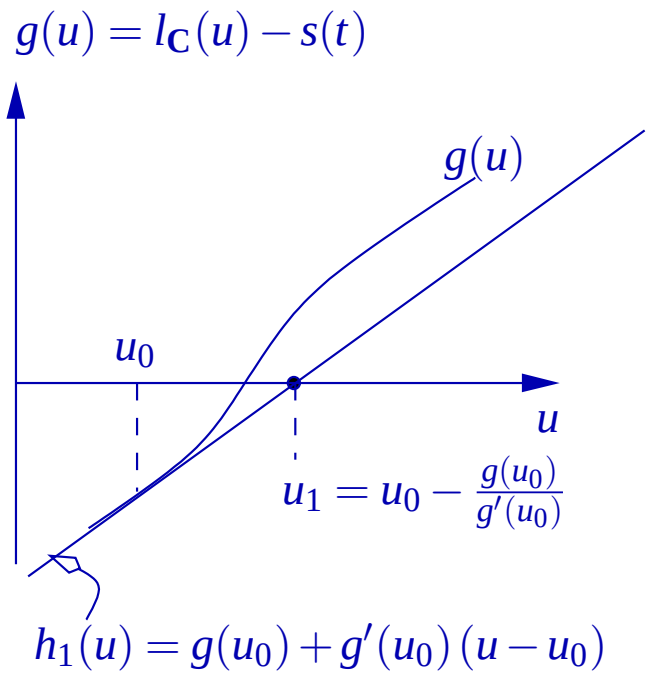
Initial: Startparameter u_0

Iteration: Lege Tangente durch $g(u_i)$:

$$h_i(u) = g(u_i) + g'(u_i)(u - u_i)$$

u_{i+1} ist Nullstelle von $h_i(u)$:

$$u_{i+1} = u_i - \frac{g(u_i)}{g'(u_i)} = u_i - \frac{l_{\mathbf{C}}(u_i) - s(t)}{\|\mathbf{C}'(u_i)\|}$$



da $g'(u) = \dfrac{d}{du}\left(\displaystyle\int_{u_0}^{u} \|\mathbf{C}'(\tau)\|\, d\tau - s(t)\right) = \|\mathbf{C}'(u)\|$

8.2.2 Formkontrolle

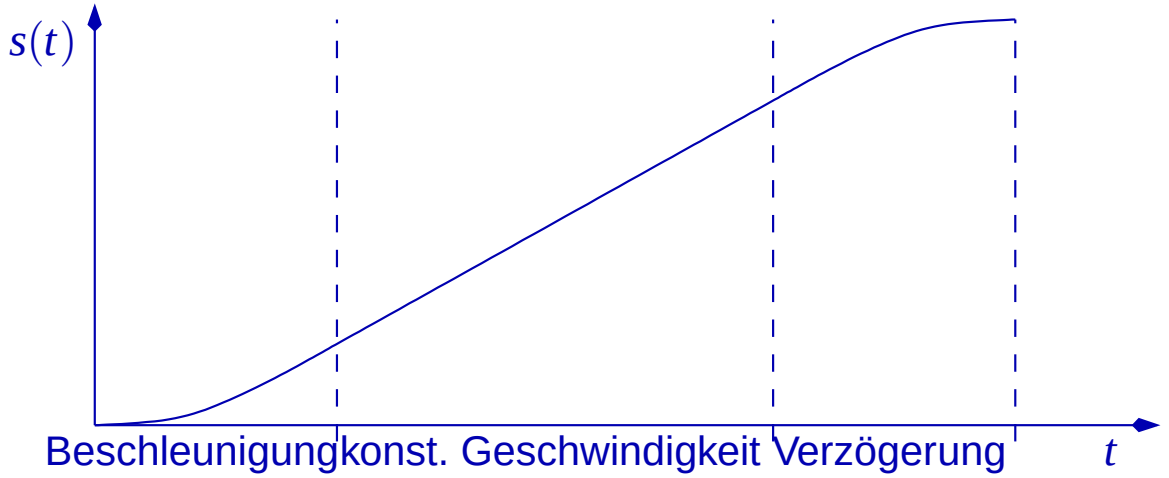
Bislang: Kontrolle des Kurvenverlaufs beschränkt auf

Bézier-Kurven/B-Spline: Wahl von Kontrollpunkten

Bézier-Splines/Catmull-Rom Splines: Angabe von Interpolationspunkten und Wahl/Abschätzung von Tangenten

Problem: Viele Anwendungen benötigen andere Kontrollmöglichkeiten, z.B. Festlegung einer *Wegfunktion*

Beispiel: Konstante Beschleunigung - konstante Geschwindigkeit - konstante Verzögerung



Ziel: Bessere Animations-spezifische Kontrollmöglichkeiten

8.2.2 Formkontrolle

Ziel: Ease-In/Ease-Out

Definition einer Funktion:

$$\text{ease}(t) = \begin{cases} \text{„weiche Beschleunigung“} & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \text{„weiche Verzögerung} & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ansatz: Sinus-Ease-Funktion

Idee: Sinus hat auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ das gewünschte Verhalten

Definition: Anpassung auf $t \in [0,1]$: $\text{ease}_{\sin}(t) = \frac{1}{2}\sin(t\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \in [0,1]$

Anpassung der Beschleunigung/Verzögerung durch Skalierung des Parameters t

Beispiel: Beschleunigung von 0 auf v_0 in der Zeit $t = 0$ bis $t = t_0$:

$$\begin{aligned} \text{ease}_{\sin}^{v_0,t_0}(t) &= \frac{4v_0t_0}{\pi}\,\text{ease}_{\sin}\left(\frac{t}{2t_0}\right), \quad \text{d.h. } t \in [0,t_0] \Rightarrow \frac{t}{2t_0} \in [0,\tfrac{1}{2}] \\ \text{Geschwindigkeit bei } t: v(t) &= \left(\text{ease}_{\sin}^{v_0,t_0}\right)'(t) = \frac{4v_0t_0}{2\pi}\cos\left(\frac{t\pi}{2t_0} - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{2t_0} \\ &= v_0\cos\left(\frac{\pi}{2t_0}(t - t_0)\right) \quad \Longrightarrow\ v(t_0) = v_0 \end{aligned}$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung

Bislang: Bewegungskontrolle über Wegfunktion

Interaktion: Meist Kontrolle über Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung

Newton: Zusammenhang zw. Weg $s(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$

Konst. v : $s(t) = s(t_0) + (t - t_0) \cdot v$

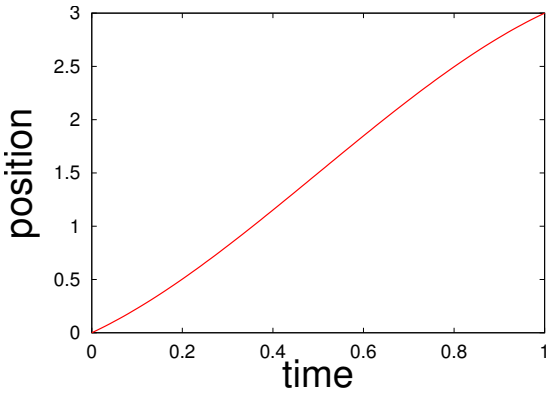
Variables v : $s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$

$\Rightarrow v(t) = s(t)$

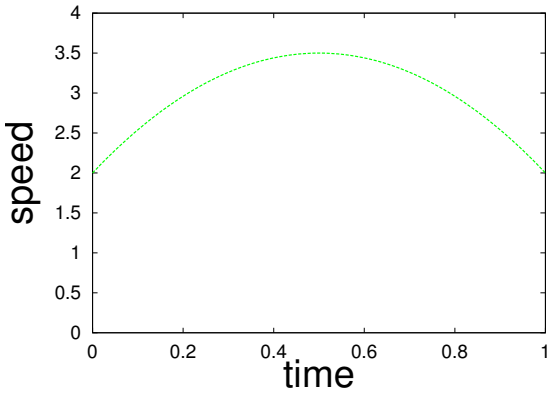
Konst. a : $v(t) = v(t_0) + (t - t_0) \cdot a$

Variables a : $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$

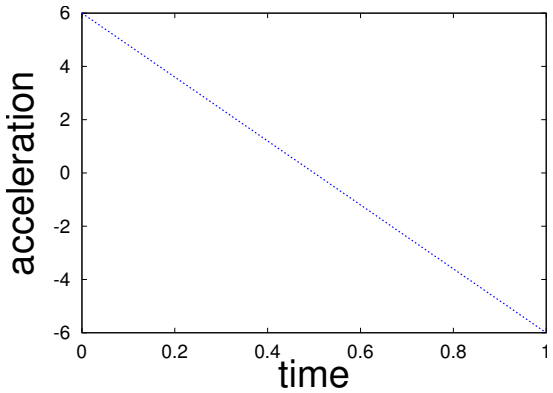
$\Rightarrow a(t) = v'(t)$



Position



Geschwindigkeit



Beschleunigung

Ansatz: Parabolische Ease-Funktion

Idee: Verwende eine *konstante Beschleunigung*, damit

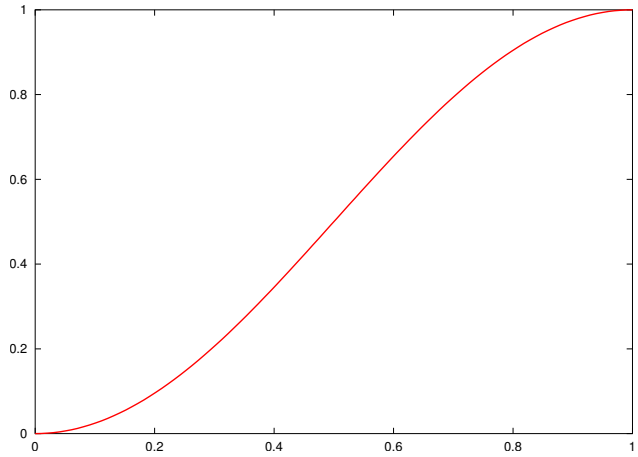
konst. Beschleunigung ($a = 1$) $\Longrightarrow$ lineare Geschwindigkeit $\Longrightarrow$ quadr. Wegfunktion

$$\text{ease}_{parabol}(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - 2(1-t)^2 & \text{falls } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

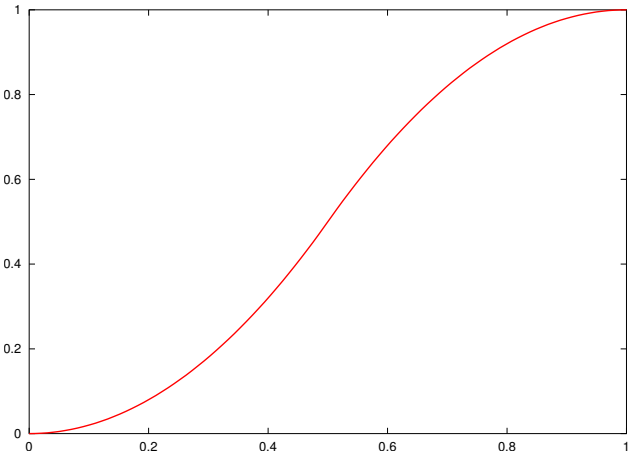
Beachte: Anpassung der Beschleunigung/Verzögerung muß berücksichtigen, dass

$$(\text{ease}_{\sin})'(0.5) = 1 \neq (\text{ease}_{parabol})'(0.5) = 2$$

Vergleich:



Sinus-Ease-Funktion



Parabolische Ease-Funktion

TCB-Splines

Ansatz: Intuitive Kontrollparameter zur Tangentenabschätzung von Catmull-Rom-Splines

Kontrollparameter:

Interpolationspunkte	$\mathbf{P}_i,\ i = 1,\ldots,n$	
Tangentenbeschreibung	*Tension* t:	Tangentenlänge
	Continuity c:	Stetigkeit benachbarter Kurvensegmente
	Bias b:	Einfluß der Kanten $\overline{\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i}$ und $\overline{\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}}$

Tangentenberechnung: Bézier-Kurve $\mathbf{C}^i$ verbindet $\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}$

1. $\mathbf{C}_0^i = \mathbf{P}_i,\ \mathbf{C}_3^i = \mathbf{P}_{i+1}$
2. Tangenten bei $\mathbf{P}_i$: Für $t, c, b \in [-1, 1]$ wird gesetzt:

$$\text{links:} \quad \vec{\mathbf{t}}_i^- = \frac{1-t}{2}\left((1-b)(1-c)\left(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}\right) + (1+b)(1+c)\left(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i\right)\right)$$

$$\text{rechts:} \quad \vec{\mathbf{t}}_i^+ = \frac{1-t}{2}\left((1-b)(1+c)\left(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}\right) + (1+b)(1-c)\left(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i\right)\right)$$

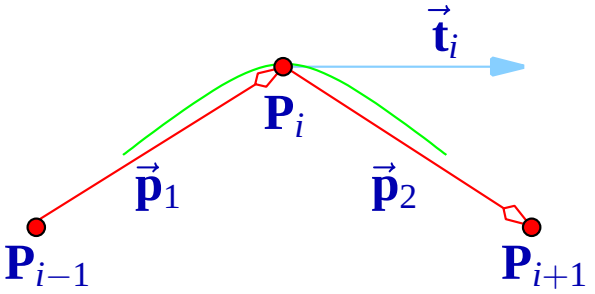
$$\text{und} \quad \mathbf{C}_1^i = \mathbf{P}_i + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{t}}_i^+ \quad \mathbf{C}_2^i = \mathbf{P}_{i+1} - \frac{1}{3}\vec{\mathbf{t}}_{i+1}^-$$

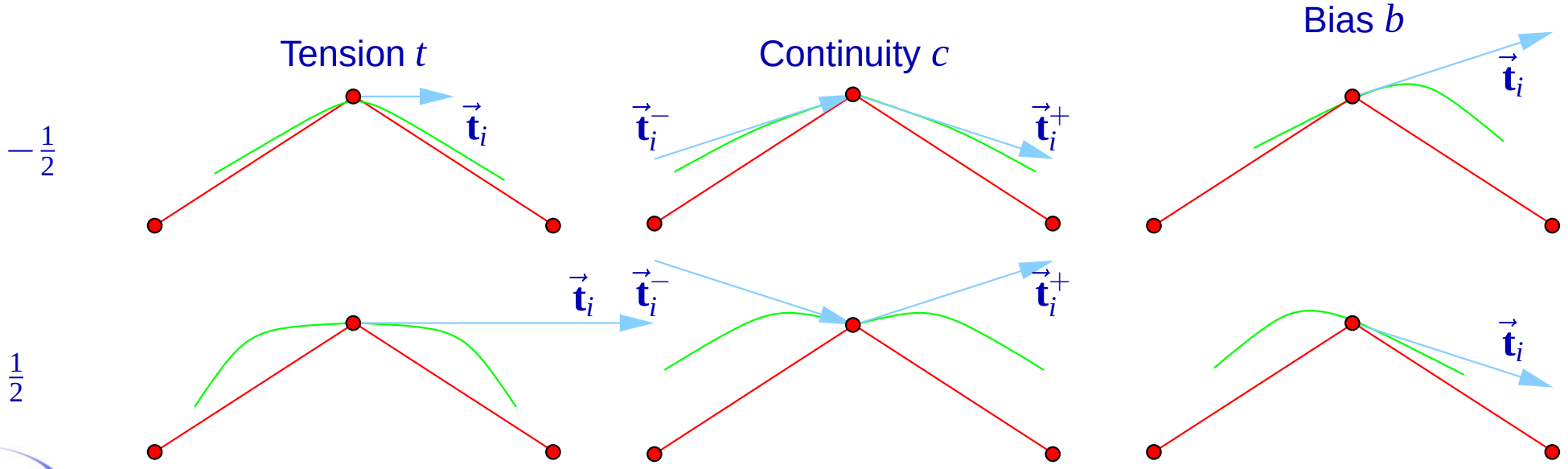
Einfluß der Kontrollgrößen t, c, b

Darstellung in lokalen Koordinaten: $\vec{\mathbf{t}}_i = (a_1, a_2) \hat{=} a_1 \underbrace{(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1})}_{=\vec{\mathbf{p}}_1} + a_2 \underbrace{(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)}_{=\vec{\mathbf{p}}_2}$

Ausgehend von $t = c = b = 0$:

	Tension t	Continuity c	Bias b
0	$\vec{\mathbf{t}}_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\vec{\mathbf{t}}_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\vec{\mathbf{t}}_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$-\frac{1}{2}$	$\vec{\mathbf{t}}_i = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$\vec{\mathbf{t}}_i^- = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \vec{\mathbf{t}}_i^+ = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$\vec{\mathbf{t}}_i = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$
$\frac{1}{2}$	$\vec{\mathbf{t}}_i = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$\vec{\mathbf{t}}_i^- = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \vec{\mathbf{t}}_i^+ = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$\vec{\mathbf{t}}_i = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$



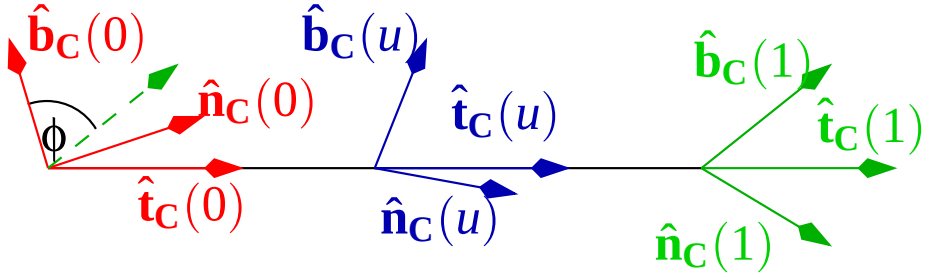


8.2.3 Kamera-Animation

Erinnerung: Frenet-Frame definiert lokale Koordinaten für Kurven (Kamera-Pfad)

Problem der fehlenden Krümmung für Geraden $\Rightarrow$ kein Frenet-Frame berechenbar

Interpolation der Frames für $u \in [0,1]$, wenn Frame für $u \in \{0,1\}$ bekannt



Tangente: $\hat{\mathbf{t}}_\mathbf{C}(u) = \hat{\mathbf{t}}_\mathbf{C}(0) = \hat{\mathbf{t}}_\mathbf{C}(1)$

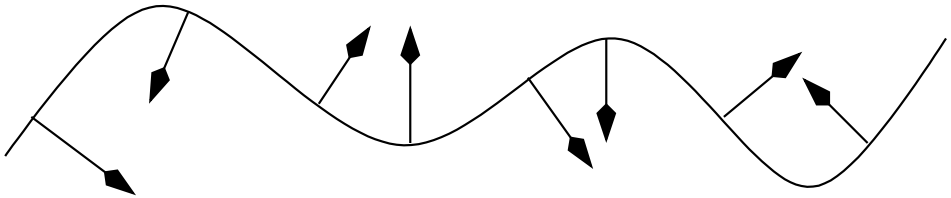
Normale: $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{C}(u) = R_{\hat{\mathbf{t}}_\mathbf{C}}(u \cdot \phi)\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{C}(0)$

Binormale: $\hat{\mathbf{b}}_\mathbf{C}(u) = R_{\hat{\mathbf{t}}_\mathbf{C}}(u \cdot \phi)\hat{\mathbf{b}}_\mathbf{C}(0)$

wobei $\cos\phi = (\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{C}(0) \cdot \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{C}(1))$

Problem extremer Bewegungen z.B. meanderförmig

Beispiel einer Kurve mit Normalenvektoren:

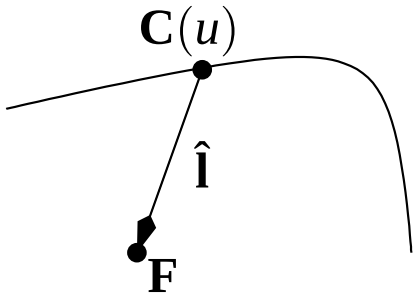


Alternative Ansätze zur Kamera-Ausrichtung

Lokale Koordinaten: Orthogonale Vektoren $\{\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{up}}, \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{up}}\}$ mit Blickrichtung $\hat{\mathbf{l}}$ und Up-Vektor $\hat{\mathbf{up}}$ im Kurvenpunkt $\mathbf{C}(u)$

Globaler Fokuspunkt $\mathbf{F}$:

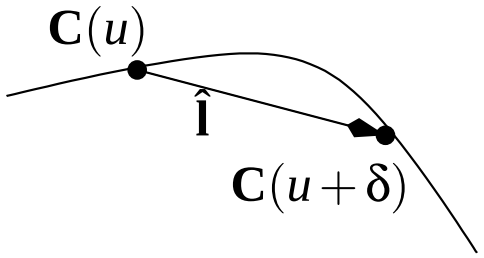
$$\hat{\mathbf{l}} = (\mathbf{F} - \mathbf{C}(u)) / \|\mathbf{F} - \mathbf{C}(u)\|$$



Globaler Fokuspunkt

Vorausschauend (Sekante):

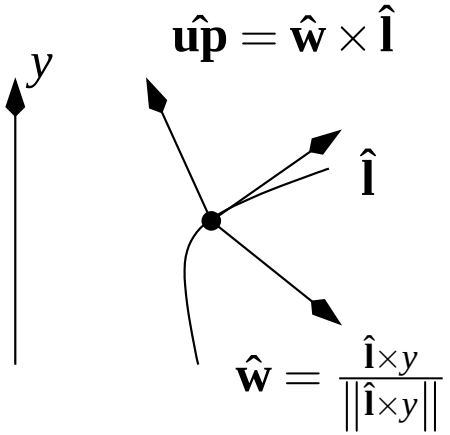
$$\hat{\mathbf{l}} = (\mathbf{C}(u+\delta) - \mathbf{C}(u)) / \|\mathbf{C}(u+\delta) - \mathbf{C}(u)\|$$



Vorausschauend

Globaler Up-Vektor z.B. y-Achse

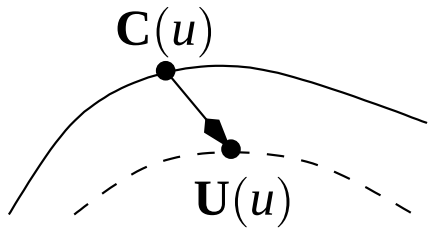
$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{l}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{w}} = \frac{\vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{w}}\|}, \quad \hat{\mathbf{up}} = \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{l}}$$



Globaler Up-Vektor

Up-Vektor-Pfad durch Up-Punkt $\mathbf{U}(u)$

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{l}} \times (\mathbf{U}(u) - \mathbf{C}(u)), \quad \vec{\mathbf{w}} = \frac{\vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{w}}\|}, \quad \hat{\mathbf{up}} = \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{l}}$$



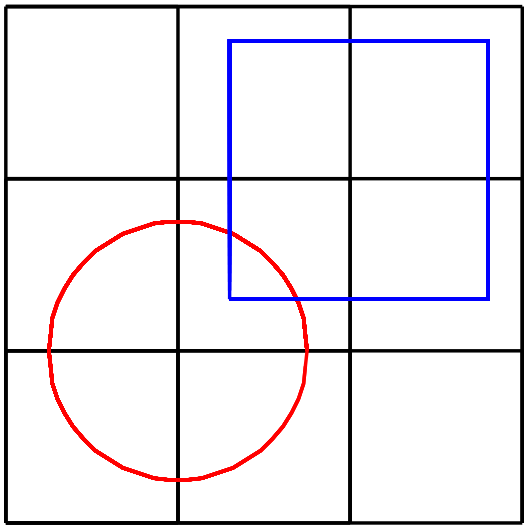
Up-Vektor-Pfad

Bezeichnung:

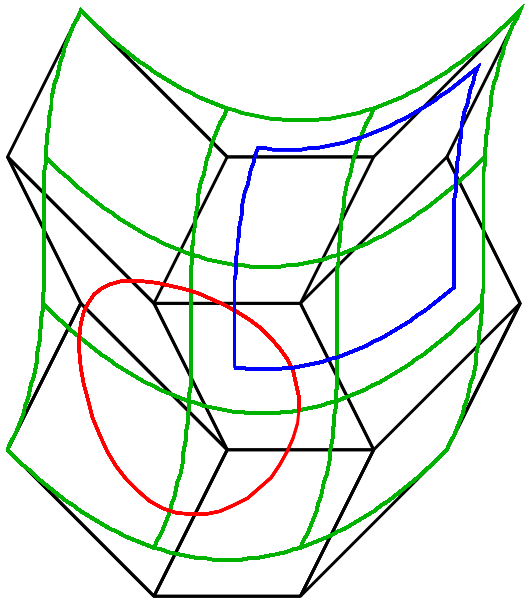
Deformation: Veränderung komplexer Objekte (z.B. Verbiegen oder Verdrehen) durch **punktweise Transformation** des umgebenden Raums

Warping: Variation der Kontrollparameter *eines Objektes* über die Zeit

Morphing: Kombinationen mehrerer Objekte zur Erzeugung „gemischter“ Geometrien



Original Objekte



Deformierte Objekte
(schwarz: Deformationsgitter)

8.3.1 Deformationen

Bezeichnung:

Deformationen (auch Space-Warp): Abbildung des Raumes auf sich selbst:

$$D: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{P} & \mapsto & D(\mathbf{P}) \end{array} \quad \text{bzw.} \quad D: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{P} & \mapsto & D(\mathbf{P}) \end{array}$$

Bezugsquader Q: Deformation D wird relativ zu einem Bezugsquader definiert:

$$Q = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$$

Normierte Koordinaten: Berechnung von $(u,v,w) \in [-1,1]^3$ aus $(x,y,z) \in Q$:

Hinrechnung:
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x - (x_{min} + x_{max})) / (x_{max} - x_{min}) \\ (2y - (y_{min} + y_{max})) / (y_{max} - y_{min}) \\ (2z - (z_{min} + z_{max})) / (z_{max} - z_{min}) \end{pmatrix}$$

Rückrechnung:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1-u)}{2} x_{min} + \frac{(1+u)}{2} x_{max} \\ \frac{(1-v)}{2} y_{min} + \frac{(1+v)}{2} y_{max} \\ \frac{(1-w)}{2} z_{min} + \frac{(1+w)}{2} z_{max} \end{pmatrix}$$

8.3.1 Deformationen

Ansatz: Tapering(Verjüngen), $2D$ oder $3D$

Idee: Skalierung in Abhängigkeit einer zweiten Koordinate mittels *Taperingfunktion*:

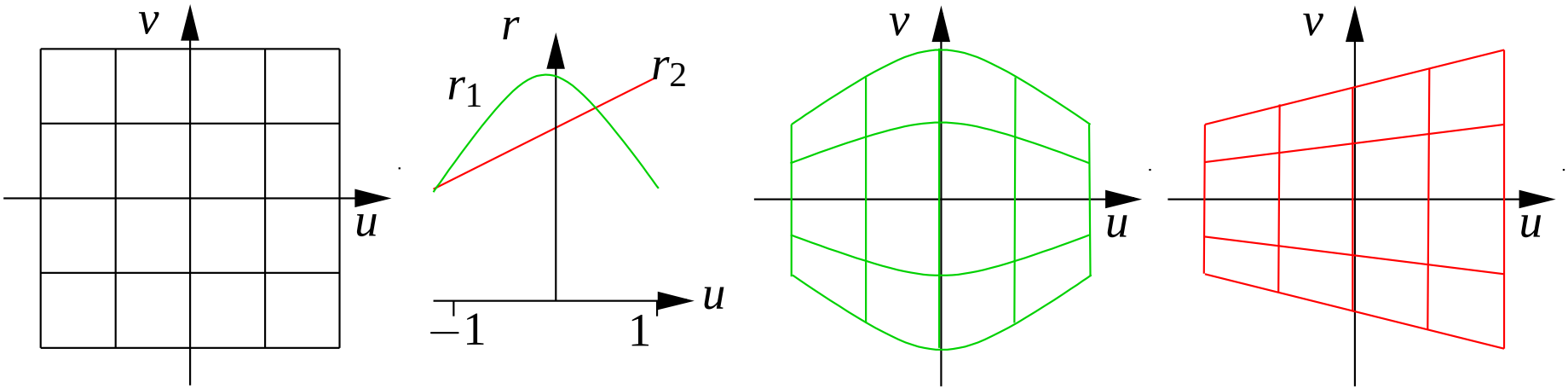
Vorgehen (2D):

Konstante Koordinate: beispielsweise u

Taperingfunktion: $r(u) = 2 - x^2$, d.h. $r(-1) = r(1) = 1,\ r(0) = 2$

Skalierung: $D(u,v,w) = (u, r(u)v, r(u)w)$

Beispiele:



8.3.1 Deformationen

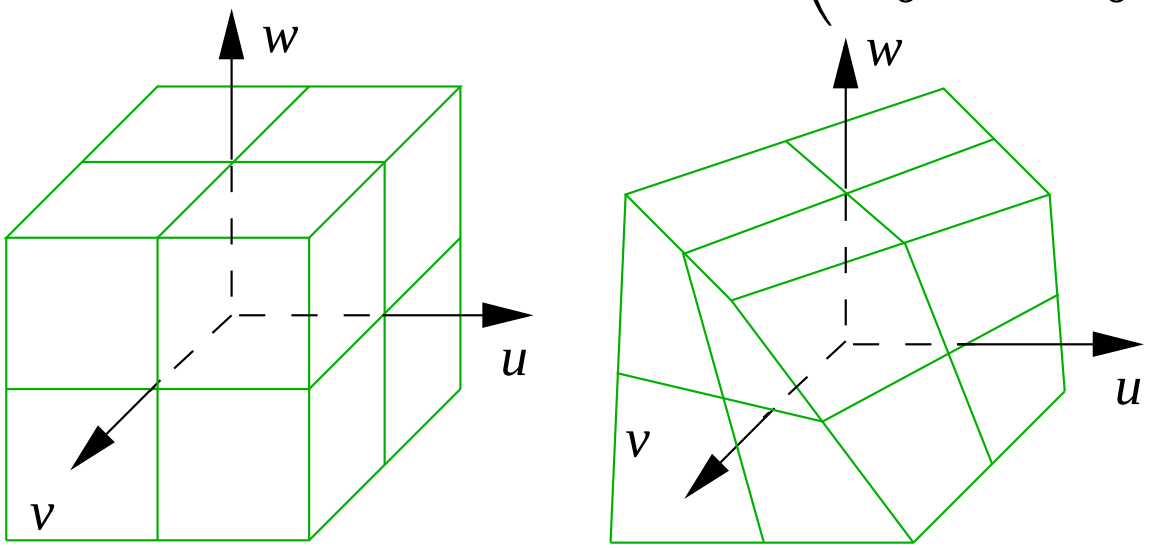
Ansatz: Twisting(Verdrehen), $3D$

Idee: Verdrehung abhängig von einer konstanten Koordinate

	Konstante Koordinate:	beispielsweise w
	Max. Drehwinkel:	α
Vorgehen (3D):	Verdrehen:	Mit $\phi(w) = \frac{\alpha(w+1)}{2}$, d.h. $\phi(-1) = 0,\ \phi(1) = \alpha)$

$$D(u,v,w) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

Beispiel: Verdrehung um die w-Achse



Ansatz: Bending(Verbiegen), $2D$ oder $3D$

Idee: Biegung in einer Ebene, eine Koordinate als *Biegeradius*, eine als *Biegewinkel*

Vorgehen (2D): Verbiegen mit Zentrum (u_0, v_0):

Biegewinkel (u-Richtung):

$$\phi(u) = \frac{1-u}{2}\phi_{min} + \frac{1+u}{2}\phi_{max}$$

mit Winkelextrema ϕ_{min}, ϕ_{max}

Biegeradius (v-Richtung):

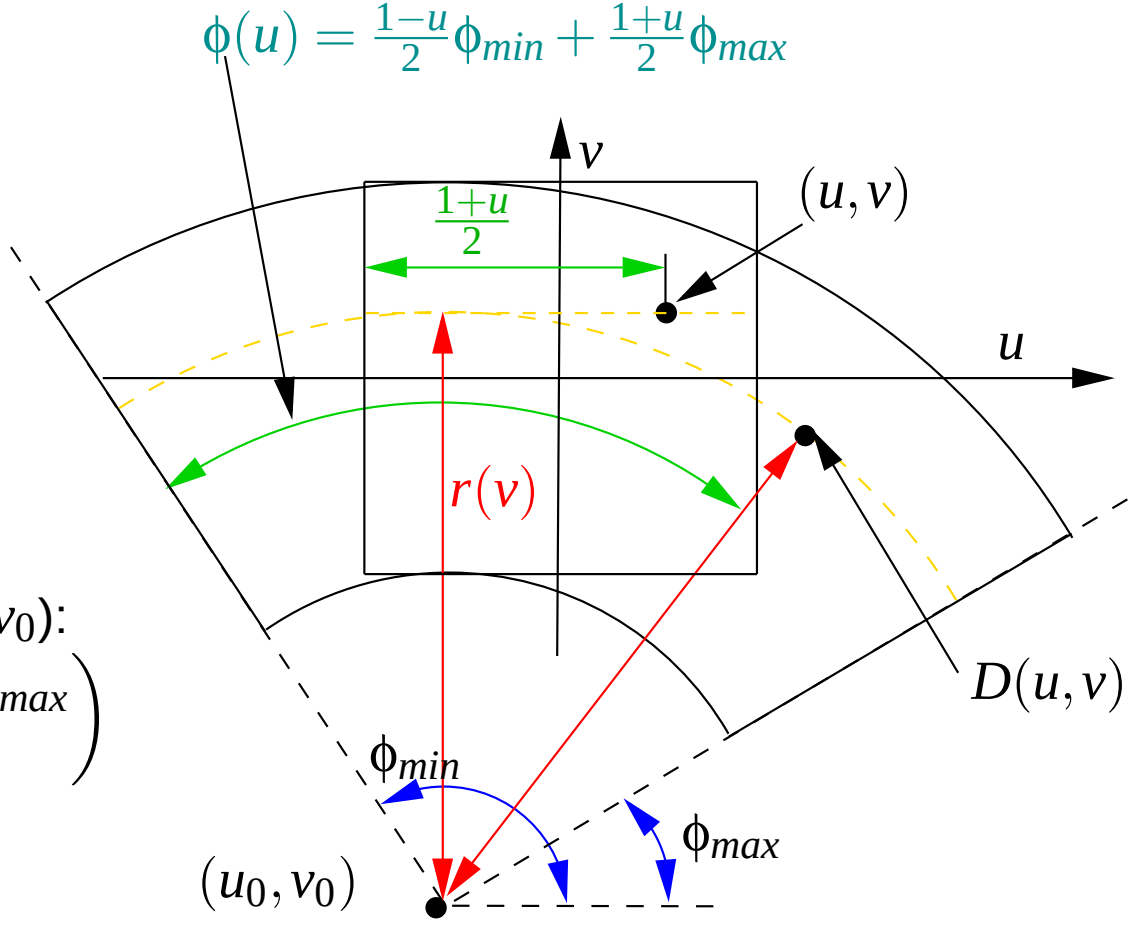
$$r(v) = v - v_0$$

Verbiegen (Polar-Koordinaten bzgl. u_0, v_0):

$$D(u,v) = \begin{pmatrix} \phi(u) \\ r(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-u}{2}\phi_{min} + \frac{1+u}{2}\phi_{max} \\ v - v_0 \end{pmatrix}$$

Verbiegen in kartesische Koordinaten:

$$D(u,v) = \begin{pmatrix} r(v)\cos(\phi(u)) \\ r(v)\sin(\phi(u)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

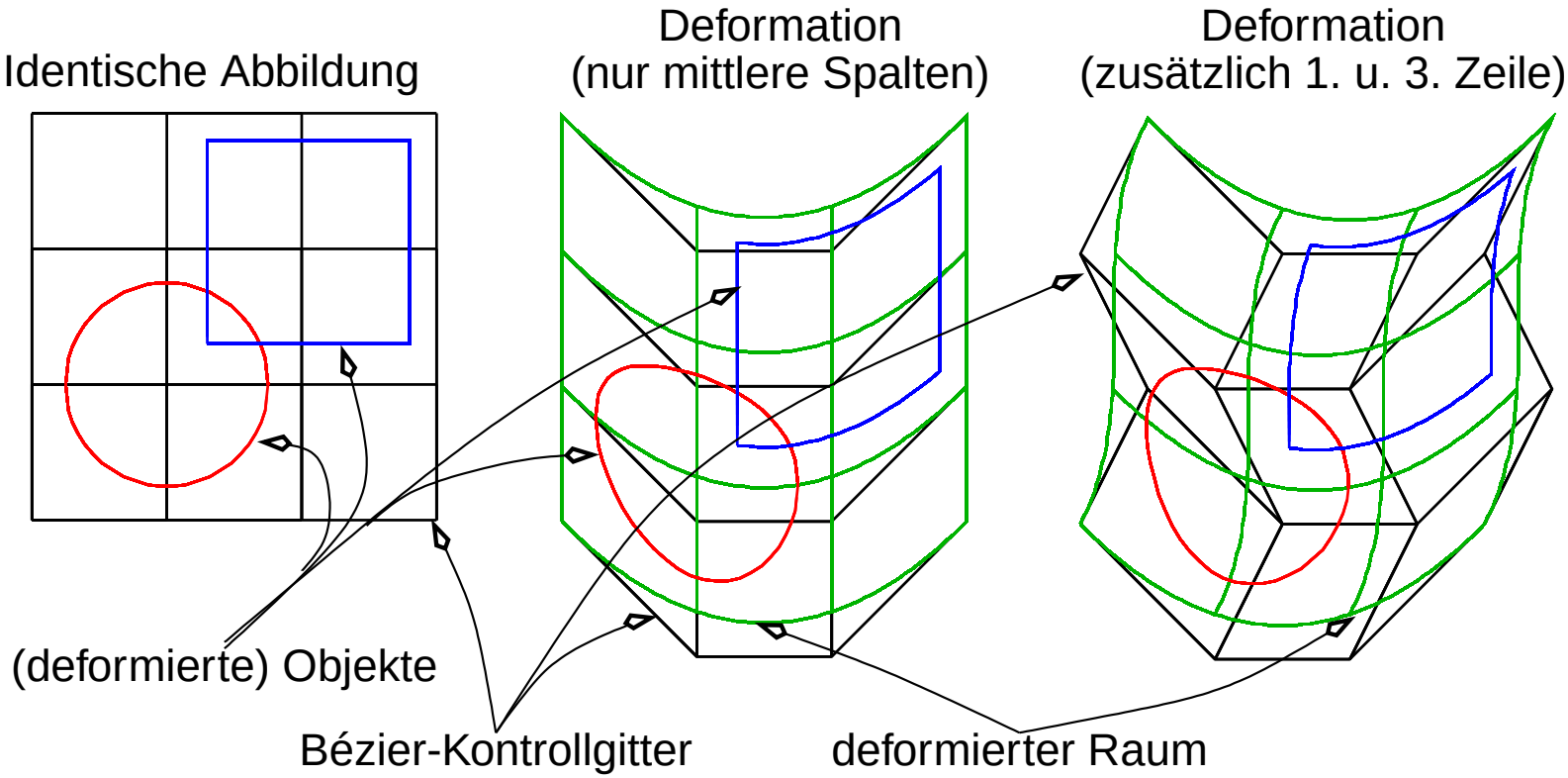


Freiform Deformation, $2D$

Ziel: Freie Verzerrung des Raumes

Initial: Bilde Bezugsquader Q mit Hilfe der Bézier-Fläche $\mathbf{C}(u,v)$ identisch auf sich selbst ab.

Deformation: Veränderung der Kontrollpunkte in der Ebene definiert Deformation



Freiform-Deformation (Forts.)

Identische Abbildung $Q \longrightarrow [0,1]^2$:

1. $(x,y) \in Q$ wird in das Parametergebiet $[0,1]^2$ abgebildet:

$$u(x) = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}, \quad v(y) = \frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}}$$

2. Initiale Kontrollpunkte $\mathbf{C}_{ij},\ i,j = 0,\ldots,3$ für kubische Bézier-Fläche:

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{i}{3}\right) x_{min} + \frac{i}{3} x_{max} \\ \left(1 - \frac{j}{3}\right) y_{min} + \frac{j}{3} y_{max} \end{pmatrix} \quad \text{dann:} \quad D(x,y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \mathbf{C}_{ij} B_i^3(u(x)) B_j^3(v(y)) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3D-Fall: Analog zum 2D-Fall mit *tri-variaten Bézier-Volumen*:

$$\text{für: } \mathbf{C}_{ijk} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{i}{3}\right) x_{min} + \frac{i}{3} x_{max} \\ \left(1 - \frac{j}{3}\right) y_{min} + \frac{j}{3} y_{max} \\ \left(1 - \frac{k}{3}\right) z_{min} + \frac{k}{3} z_{max} \end{pmatrix}$$

gilt: $D(x,y,z) = \mathbf{C}(u(x),v(y),w(z)) = \sum_{(i,j,k)=(0,0,0)}^{(3,3,3)} \mathbf{C}_{ijk} B_i^3(u(x)) B_j^3(v(y)) B_k^3(w(z)) = (x,y,z)^T$

8.3.2 Morphing und Warping

Idee: Direkte Anwendung der Interpolationstechnik auf Geometrien

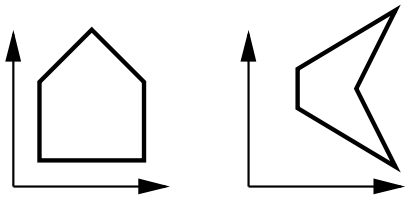
Warping: Variation der Kontrollparameter (z.B. Kontrollpunkte) über die Zeit (siehe Abschnitt „Interpolation mit B-Splines“)

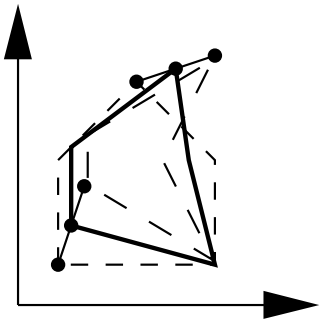
Morphing: Kombinationen mehrerer Objekte zur Erzeugung „gemischter“ Geometrien (kein direkter Zeitbezug)

Warping mit Spline-Interpolation

Ausgangssituation: Kontrollpunkte $\mathbf{P}_i$ $i = 1, \ldots, k$ eines Objektes die zu Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$ bekannt sind: $\mathbf{P}_i(t_1), \ldots, \mathbf{P}_i(t_n),\ i = 1, \ldots, k$

Vorgehen: Interpolation liefert $\mathbf{P}_i(t)$ für beliebiges t, womit die Geometrie zu jedem Zeitpunkt bestimmbar ist.





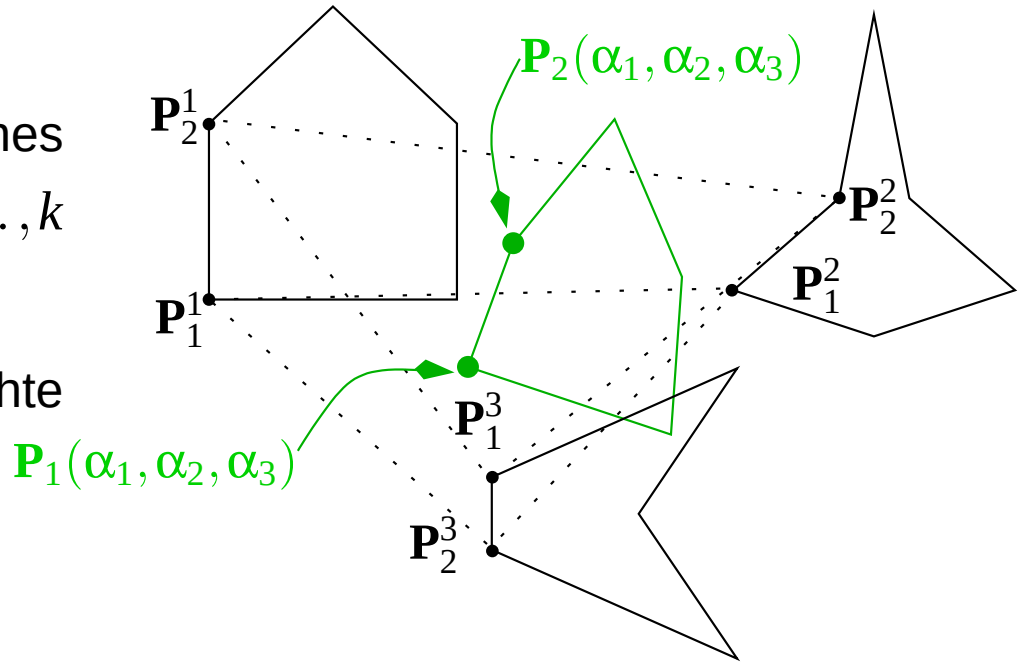
Morphing mit Affin-Kombinationen

Verwende *Key-Positionen* (unabhängig von der Zeit!) und mische diese Positionen mit Hilfe von Affin-Kombinationen.

Ausgangssituation: Kontrollpunkte $\mathbf{P}_i$ eines Objektes die für *Key-Positionen* $1,\ldots,k$ bekannt sind: $\mathbf{P}_i^1,\ldots,\mathbf{P}_i^k$.

Vorgehen: Affin-Kombination: Für Gewichte α_j mit $\sum_{j=0}^{n}\alpha_j = 1$:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_k\mathbf{P}_j$$



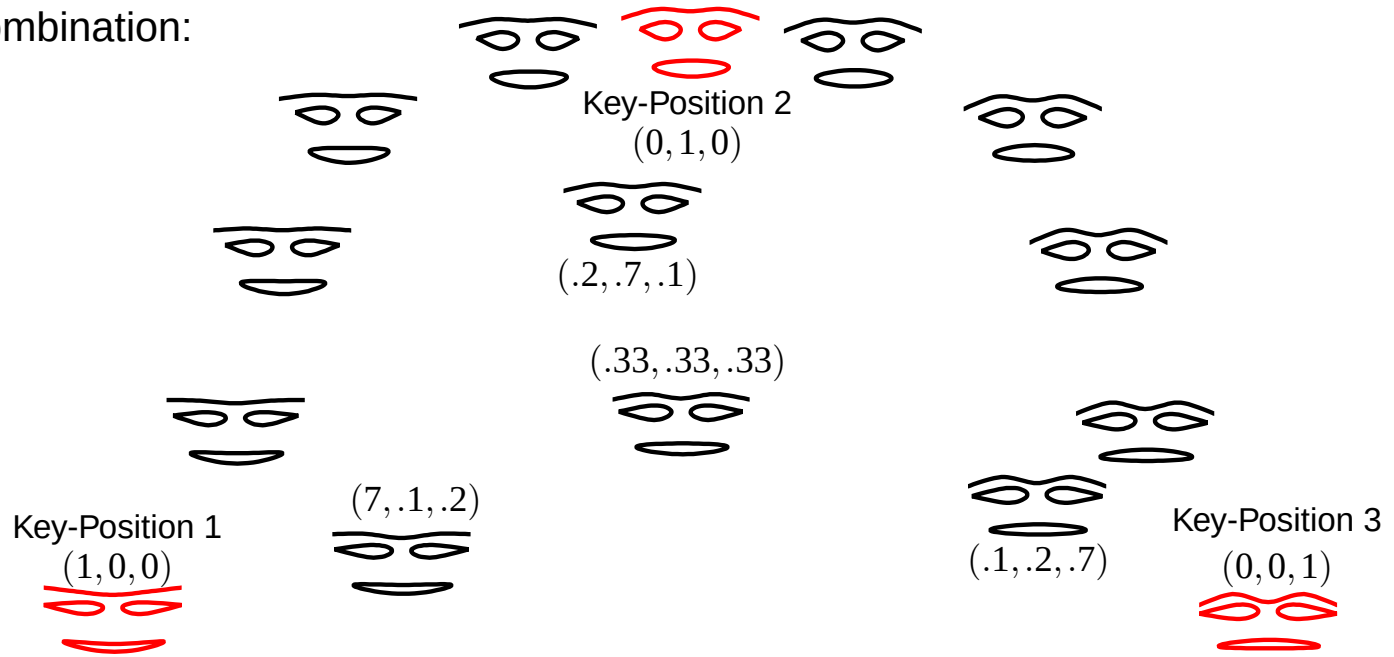
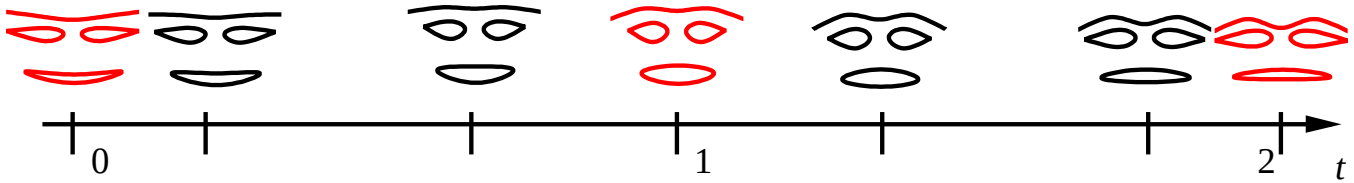
Animation: Variiere die Gewichtsparameter α_k über die Zeit: $\alpha_i(t)$

Morphing-Beispiel

Ausgangslage: Drei *Key-Positionen* mit Semantik („fröhlich“, „erschrocken“, „ängstlich“)

Animation: *Veränderung der Gewichte* über die Zeit, z.B. Interpolation der Key-Positionen

Affin-Kombination:



Spline-Interpolation: