Mathematische Grundlagen

Fachgruppe Computergraphik & Multimediasysteme

Universität Siegen

Version vom 15. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Zielsetzung

Dieses Manuskript beschreibt die mathematische Grundlagen, die zu den Vorlesungen der Fachgruppe Computergraphik & Multimediasysteme als bekannt vorausgesetzt werden.

Teilweise werden hier besprochene Inhalte auch in entsprechenden Vorlesung detailiert behandelt bzw. in Übungen aufgegriffen.

Zudem dient das Manuskript der Festlegung einheitlicher Bezeichnungen und Verwendugn von Fachtermini.

Disclosure - Was dieses Skript NICHT ist

Das Studium dieses Skriptes ist nicht für die Erarbeitung der Inhalte gedacht, wenn keinerlei Vorkenntnisse vorhanden sind. Hierzu werden Verweise auf entsprechende Fachliteratur gegeben.

In vielen Themenfeldern finden sich in der Fachliteratur alternative Bezeichnungen für Sachverhalte, teilweise sogar unterschiedliche Verwendungen eines Begriffes. Hierauf wird i.a. nicht eingegangen.

Hinweis

Dieses Skript ist im Aufbau begriffen und wird daher regelmäßig erweitert, angepaßt und ggf. korrigiert.

1.2 Bezeichnungen

Bezeichnung: Allgemeine Schreibweisen

Zahlenräume:

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1,2,3,4\ldots\}$	$\mathbb{N}^+$	natürliche Zahlen mit 0 $\{0,1,2,3\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$		
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen $\{p/q \,:\, p,q \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Q}^+,\mathbb{Q}^-$	positive bzw. nagetive rationale Zahlen, z.B. $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \,:\, q > 0\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	$\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^-$	positive bzw. nagetive reele Zahlen, z.B. $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \,:\, r > 0\}$
$\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R}_0^-$	nicht-negative bzw. nicht-positive reelle Zahlen, z.B. $\mathbb{R}_0^- = \{a \in \mathbb{R} \,:\, r \leq 0\}$	$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen mit imaginärer Einheit i: $\mathbb{C} = \{a+ib \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}$ $i^2 = -1$

Vektorräume und Affine Räume:

A	allgemeiner affiner Raum	V	allgemeiner Vektorraum
M	allgemeine Menge (Großbuchstabe)	s	Skalar (Kleinbuchstabe)
$\mathbf{P}$	Punkt	$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$	allgemeiner Vektor
$\hat{\mathbf{v}}$	normierter vektor (Länge 1)	α	Winkel (griechischer Buchstabe)
M	allgemeine Matrix		

Operatoren für Vektoren:

$\vec{\mathbf{v}}^T = (v_1,\ldots,v_n)$	transponierter Vektor
$\lVert\vec{\mathbf{a}}\rVert = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$	Vektornorm (Länge des Vektors)
$\lvert s\rvert$	absoluter Betrag des Skalars
$\left(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$	inneres Produkt oder Punktprodukt
$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$	Vektorprodukt

Mengen:

$A \subset B,\ a \in A$	A ist Teilmenge von B, a ist Element von A
$[a,b] = \{c \in \mathbb{R}\ :\ a \leq c \leq b\}$	abgeschlossenes reeles Intervall
$]a,b[= \{c \in \mathbb{R}\ :\ a < c < b\}$	offenes reeles Intervall
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler affiner Raum über $\mathbb{R}$
$U_\varepsilon(\mathbf{P}) = \{\mathbf{Q}\ :\ \lVert\mathbf{Q}-\mathbf{P}\rVert < \varepsilon\}$	ε-Umgebung von $\mathbf{P}$ mit reellem $\varepsilon > 0$
∂M	Rand der Menge M
$\overline{M}$	Abschluß der Menge M
$\overset{\circ}{M}$	Inneres der Menge M

Quantoren:

$\exists$	„es existiert“; Beispiel: $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$: „es gibt ein reelles x, dessen Quadrat 4 ergibt“ (nämlich 2 und -2)
$\exists_1$	„es existiert genau ein“; Beispiel: $\exists_1\, x \in \mathbb{R}^+ : x^2 = 4$: „es gibt genau ein positives reelles x, dessen Quadrat 4 ergibt“ (nämlich 2)
$\forall$	„für alle gilt“; Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{R}$: „für jedes natürliche n gilt, dass es auch eine reelle Zahlen ist“

■

Kapitel 2

Analysis

Im folgenden werden ausschließlich *metrische Räume* A, also z.B. $A = \mathbb{R}^n$, betrachtet. Weiterführende Betrachtungen finden sich z.B. in [Heuser 1986].

2.1 Funktionen

Definition:

Gegeben sei ein metrischer Raum A.

Eine *Funktion* f ordnet jedem Element $\mathbf{X}$ einer *Definitionsmenge* $D \subset A$ genau ein Element $\mathbf{Y}$ der *Wertemenge* $W \subset A$ zuordnet[1].

Zeichen:

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & W \\ \mathbf{X} & \mapsto & \mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \end{array}$$

Die Funktion f ist

1. *injektiv* $:\Longleftrightarrow$ für jedes Paar $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_i \in D$ gilt: $f(\mathbf{X}_1) \neq f(\mathbf{X}_2)$
2. *surjektiv* $:\Longleftrightarrow$ für jedes $\mathbf{Y} \in W$ $\exists \mathbf{X} \in D$ mit $f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$
3. *bijektiv* $:\Longleftrightarrow$ sie injektiv und surjektiv ist

■

Lemma:

f ist genau dann bijektiv, wenn

1. $f(D) = W$ und
2. $\forall \mathbf{Y} \in W \; \exists_1 \mathbf{X} \in D : f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$

■

[1] Hier werden bewußt **potentiell mehrdimensionale** Elemente (Punkte) $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ verwendet.

2.2 Mengen

<u>Definition:</u> Folgen

1. Eine *Folge* $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ ist eine Funktion

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ i & \mapsto & \mathbf{P}_i = f(i) \end{array}$$

2. Die Folge $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen* $\mathbf{Q}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon : \mathbf{P}_n \in U_\varepsilon(\mathbf{Q})$$

   $\mathbf{Q}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes*.

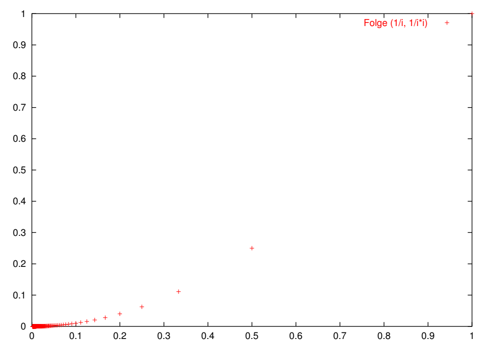
■

<u>Beispiel:</u> Konvergente Folge

Für $A = \mathbb{R}^2$ ist die Folge

$$\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ \mathbf{P}_i = (1/i, 1/i^2)$$

konvergent gegen den Ursprung $(0,0)$.



■

<u>Definition:</u> Offene und geschlossene Menge

1. Eine Menge $M \subset A$ ist *offen*, falls

$$\forall \mathbf{P} \in M\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\mathbf{P}) \subset M \tag{2.1}$$

2. Eine Menge $M \subset A$ ist *abgeschlossen*, falls

$$\forall \{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergente Folge in } M \text{ mit Grenzwert } \mathbf{Q} : \mathbf{Q} \in M \tag{2.2}$$

■

<u>Beispiel:</u>

1. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(\mathbf{P})$ von $\mathbf{P}$ ist selbst eine offene Menge, da $\forall \mathbf{Q} \in U_\varepsilon(\mathbf{P})$ die Umgebung $U_{\varepsilon_Q}(\mathbf{Q}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{P})$, falls $\varepsilon_Q < \varepsilon - \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\|$.

2. Nimmt man zu einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(\mathbf{P})$ die Punkte auf dem Kreis hinzu, also

$$M = U_\varepsilon(\mathbf{P}) \cup \{\mathbf{Q} \,:\, \|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\| = \varepsilon\} = \{\mathbf{Q} \,:\, \|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\| \leq \varepsilon\}$$

so erhält man eine angeschlossene Menge

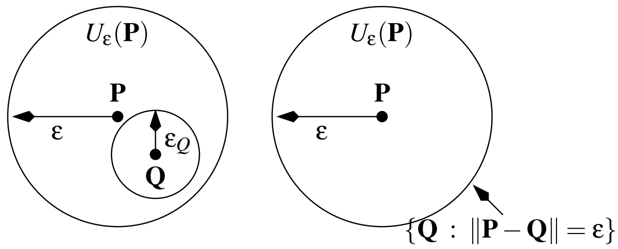


Abbildung 2.1: ε-Umgebung als offene Menge (links) und geschlossener Kreis (rechts)

■

Definition: Rand und Inneres einer Menge

1. Ein Punkt $\mathbf{P}$ ist ein *Randpunkt* der Menge $M \subset A$, falls für jedes $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(\mathbf{P})$ mindestens einen Punkt aus M und mindestens ein Punkt aus $A \backslash M$ enthält.

   Beachte: $\mathbf{P}$ muß nicht selbst Element von M sein!

2. Der *Rand einer Menge M*, ∂M, ist die Menge aller Randpunkte von M.

3. Ein Punkt $\mathbf{P} \in M$ ist ein *innerer Punkt* der Menge $M \subset A$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(\mathbf{P}) \subset M$.

4. Das *Innere $\overline{M}$ einer Menge M* ist die Menge aller inneren Punkte von M.

■

Beispiel:

1. $(0,0)$ ist ein Randpunkt der Menge $\{(1/i, 1/i^2 \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ (vgl. Besipiel zu konvergenten Folgen).

2. Die Vereinigung einer Menge M mit ihrem Rand, also $M \cup \partial M$ ist stets abgeschlossen, da für jede konvergente Folge $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ mit Grenzwert $\mathbf{Q}$ eine der Aussagen gilt:

   2.1. $\mathbf{Q} \in M$ oder

   2.2. $\mathbf{Q} \notin M$; in diesem Fall ist aber $\mathbf{Q}$ auf dem Rand von M, da $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ gegen $\mathbf{Q}$ konvergiert.

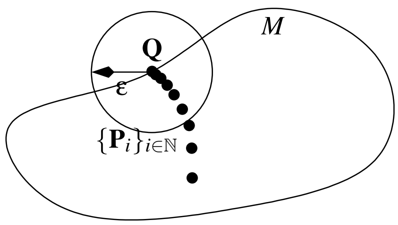


Abbildung 2.2: Eine gegen den Randpunkt $\mathbf{Q}$ konvergente Folge $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

■

2.3 Eindimensionale, reelwertige Funktionen einer Variablen

Im folgenden werden Funktionen in einer Variablen (hier x) in einer Dimension, also nach $y = f(x)$ betrachtet:

$$f: \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

2.3.1 Stetigkeit

<u>**Definition:**</u> **Stetigkeit von Funktionen mit reeller Definitionsmenge**

Gegeben sei eine Funktion $f : D \longrightarrow W$, $D \subset \mathbb{R}$ und ein innerer Punkt $x \in D$.

f ist im Punkt $x \in D$

1. *linksseitig stetig* $:\Longleftrightarrow$ jede gegen x konvergente Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_i < x \; \forall i$ gilt
   1.1. die Folge $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist konvergent in W
   1.2. der Grenzwert von $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist $f(x)$
2. *rechtsseitig stetig* $:\Longleftrightarrow$ jede gegen x konvergente Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_i > x \; \forall i$ gilt
   2.1. die Folge $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
   2.2. der Grenzwert von $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist $f(x)$
3. *stetig* $:\Longleftrightarrow$ f sowohl links- als auch rechtsseitig stetig ist.

■

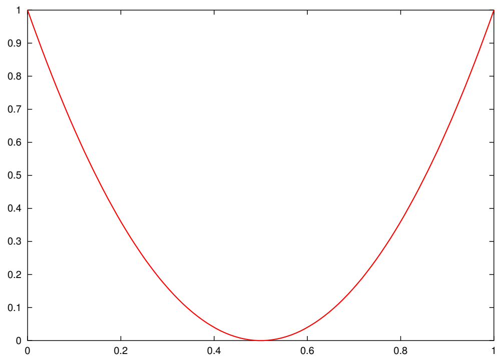
<u>**Beispiel:**</u>

1. Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$

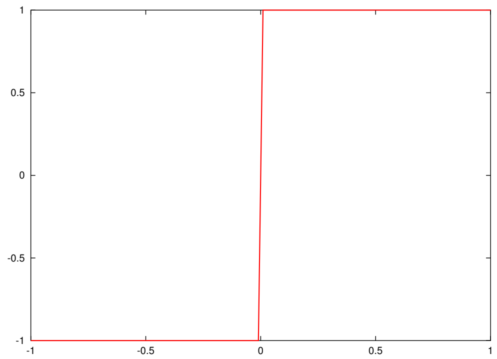
2. die Heavyside-Funktion

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

ist in $x = 0$ unstetig



Polynom vom Grad 2



Heavyside-Funktion

■

2.3.2 Differenzierbarkeit

Definition: Differenzierbarkeit

Gegeben sei die reele Funktion $f: D \longrightarrow W$, $W, D \subset \mathbb{R}$ und der innere Punkt $x \in \overset{\circ}{D}$, d.h. $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset D$.

1. f ist in x *rechtseitig differenzierbar* $:\Longleftrightarrow$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert und ist eindeutig.

2. f ist in x *linksseitig differenzierbar* $:\Longleftrightarrow$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert und ist eindeutig.

3. f ist in x *differenzierbar* $:\Longleftrightarrow$ der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert und ist eindeutig.

f' wird *Ableitung von f* genannt.

■

Bezeichnung:

1. $C(D)$ ist die Menge der über der Definitionsmenge D stetigen Funktionen
2. f heißt *stetig differenzierbar*, wenn
   - 2.1. f differenzierbar ist und
   - 2.2. f' stetig ist
3. $f^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{N}$ ist die *k-te Ableitung von* f in x (so sie existiert)
4. f heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn
   - 4.1. f k-mal differenzierbar ist und
   - 4.2. $f^{(k)}$ stetig ist
5. $C^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge der über der Definitionsmenge D k-mal stetig differenzierbaren Funktionen

■

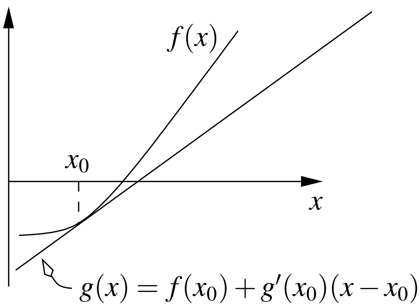
Lokale Linearisierung

Mit Hilfe der Ableitung f' einer Funktion

$$f : D \longrightarrow R, \quad D, W \subset \mathbb{R}$$

kann eine lokale Linearisierung $g(x)$ (oder „linare Approximation“, „bestangepaßte Gerade“) in einem Punkt $x_0 \in D$ bestimmt werden:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



2.4 Mehrdimensionale, reelwertige Funktionen einer Variablen

Im folgenden werden Funktionen in einer Variablen u in m Dimensionen mit $m > 1$ betrachtet:

$$\begin{array}{rccccl} & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & & W \subset \mathbb{R}^m & \\ \mathbf{f}: & u & \mapsto & \mathbf{f}(u) = & \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ \vdots \\ f_m(u) \end{pmatrix} & \end{array}$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Für mehrdimensionale Funktionen reduziert sich die Stetigkeitsbetrachtung auf die Komponentenfunktionen f_i, d.h.:

$$\mathbf{f} \text{ ist in } u_0 \in D \text{ stetig} :\Longleftrightarrow f_i \text{ ist in } u_0 \in D \text{ stetig } \forall\, i = 1, \ldots, m$$

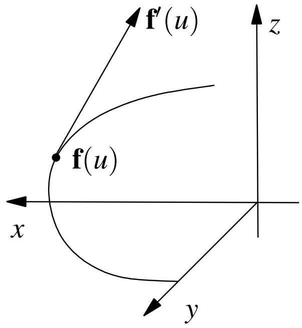
2. Analoges gilt für die Differenzierbarkeit:

$$\mathbf{f} \text{ ist in } u_0 \in D \text{ differenzierbar} :\Longleftrightarrow f_i \text{ ist in } u_0 \in D \text{ differenzierbar } \forall\, i = 1, \ldots, m$$

Konkret ist

$$\mathbf{f}'(u) = \begin{pmatrix} f_1'(u) \\ f_2'(u) \\ \vdots \\ f_m'(u) \end{pmatrix}$$

der *Tangentenvektor* an die Kurve im Punkte $\mathbf{f}(u)$

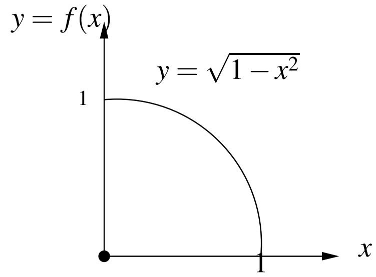


3. Die lokale Linearisierung für den Parameter u_0 ergibt sich analog zur eindimensionalen Funktion als Gerade im $\mathbb{R}^m$:

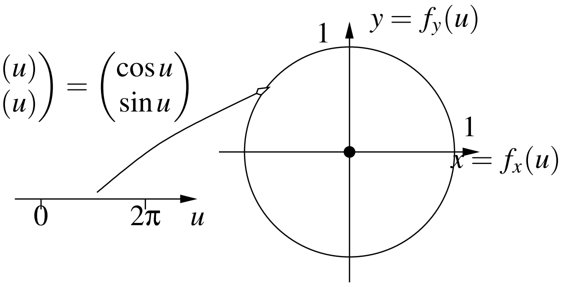
$$\mathbf{g}(u) = \mathbf{f}(u_0) + \mathbf{f}'(u_0)(u - u_0)$$

<u>Bemerkung:</u> Darstellung & Differenzierbarkeit

1. Anders als bei eindimensionalen Funktionen werden mehrdimensionale Funktionen i.a. nicht als Graph dargestellt. Die Darstellung erfolgt entkoppelt von der freien Variablen u.



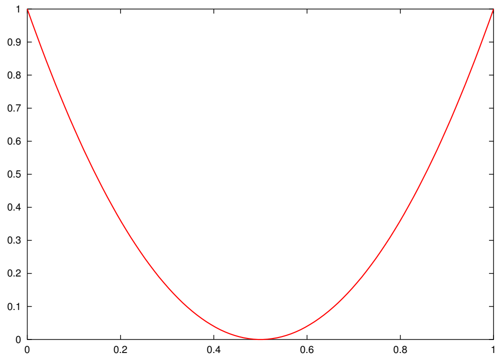
$$\mathbf{f}(u) = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$$



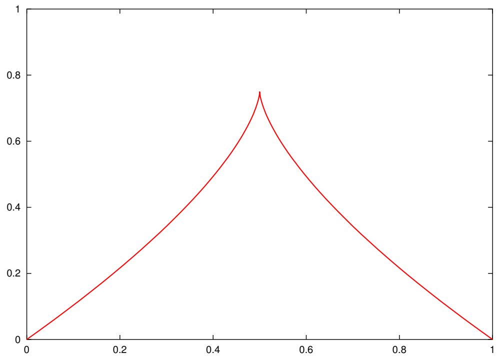
2. Durch die andere Darstellung gibt es andere Zusammenhänge zwischen der Ableitung $\mathbf{f}'$ und der geometrischen Form:

   2.1. Bei eindimensionalen Funktionen entspricht $f'(u) = 0$ einer *horiziontalen Tangente* an den Graphen von f

   2.2. Bei mehrdimensionalen Funktionen ist $\mathbf{f}'(u) = \vec{\mathbf{0}}$ eine *Singularität* der Kurve von $\mathbf{f}$, in der die weitere „Entwicklungsrichtung" der Kurve unbestimmt ist. Damit kann auch für eine differenzierbare Funktion z.B. eine Spitze entstehen



Graph eines eindimensionalen Polynoms



Zweidimensionale Polynomkurve mit Spitze

■

2.5 Eindimensionale, reelwertige Funktionen mehrerer Variablen

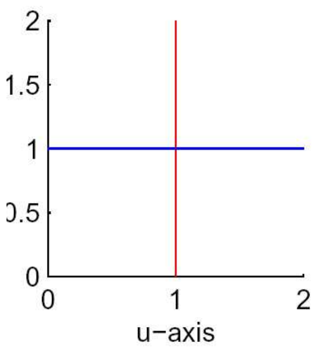
Eindimensionale Funktionen in n Variablen $\mathbf{X}$ stellen sich wie folgt dar:

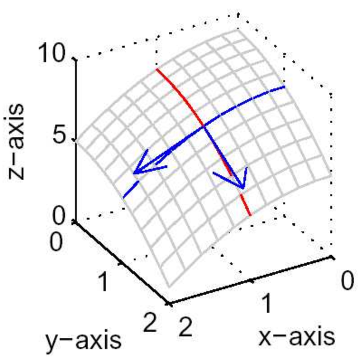
$$f : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R} \\ \mathbf{X} & \mapsto & f(\mathbf{X}) = f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Im weiteren wird von $n = 2$ ausgegangen und die Benennung der Parameter auf (u, v) angepaßt. Damit entsteht eine Fläche, deren Graph angezeigt werden kann.

Partielle Ableitung

Wird nur einer der Parameter u, v verändert, entstehen Kurven auf der Fläche.





Die Ableitung dieser Kurven im Parameter (u_0, v_0) wird *partielle Ableitung* genannt[2]:

$$f_u(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u_0 + h, v_0) - f(u_0, v_0)}{h}$$
$$f_v(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u_0, v_0 + h) - f(u_0, v_0)}{h}$$

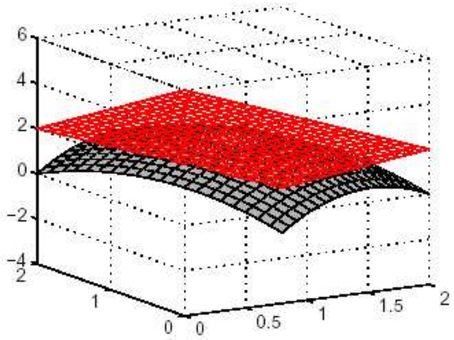
[2] Die Kurzform f_u, f_v ist nicht mit den Komonenten einer mehrdimensionalen Funktionen zu verwechseln

$f_u(u_0, v_0)$ entspricht der Steigung der Kurve in Richtung u (analog für v).

Lokale Linearisierung

In dem konkreten Fall $n = 2$ wird durch die beiden partiellen Ableitungen die *Tangentialebene* an den zugehörigen Punkt definiert:

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f(u_0,v_0) + f_u(u_0,v_0)(u-u_0) + f_v(u_0,v_0)(v-v_0) \\ &= f(u_0,v_0) + (f_u(u_0,v_0), f_v(u_0,v_0)) \cdot \begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Die Normale $\hat{\mathbf{n}}$ an die Tangentialebene ist die *Flächennormale*.

2.6 Dreidimensionale, reelwertige Funktionen zweier Variablen

Folgender Funktionstypus wird bei der Modellierung von Flächen verwendet:

$$f: \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & \mathbf{f}(u,v) = \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \\ f_3(u,v) \end{pmatrix} \end{array}$$

Bemerkung:

- die partiellen Ableitungen $f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0)$ sind *Tangentialvektoren*, die tangential an der Fläche anliegen und die Tangentialebene aufspannen
- wie bei Funktionen einer Variablen (Kurven) treten *Singularitäten* für $f_u(u_0, v_0) = \vec{\mathbf{0}}$ oder $f_v(u_0, v_0) = \vec{\mathbf{0}}$ auf, die Spitzen oder Kanten bilden können, obwohl die Funktion differenzierbar ist
- sind $f_u(u_0, v_0) \neq \vec{\mathbf{0}}$ und $f_v(u_0, v_0) \neq \vec{\mathbf{0}}$, dann berechnet sich der Normalenvektor zu

$$\hat{\mathbf{n}}(u_0, v_0) = \frac{f_u(u_0,v_0) \times f_v(u_0,v_0)}{\|f_u(u_0,v_0) \times f_v(u_0,v_0)\|}$$

■

Literaturverzeichnis

[Heuser 1986] HEUSER, H. 1986. *Lehrbuch der Analysis (Band 1 und 2).* Teubner.