Crash-Kurs: Komplexe Zahlen

Betreuer: Christof Rezk-Salama

25. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Definition

Wir alle haben bereits mit zweidimensionalen Koordinaten gearbeitet. Wir betrachten also den zweidimensionalen Raum, der aus der Menge geordneter Zahlenpaare

$$(x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

besteht. Wir geben dieser Menge aller Punkt im 2D nun einfach einen anderen Namen. Wir nennen sie *die Menge der Komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$, bezeichnen ein Element dieser Menge (d.h. einen Punkt der Ebene) als *komplexe Zahl* und definieren folgende Rechenregeln:

Addition:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \;=\; (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{2}$$

Multiplikation:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \;=\; (x_1\, x_2 - y_1\; y_2, x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \tag{3}$$

Jetzt betrachten wir eine Teilmenge der Komplexen Zahlen, nämlich alle Zahlen deren zweite Komponente gleich Null ist:

$$\{z\, \in \mathbb{C} \mid z = (a, 0)\} \quad \subset \mathbb{C} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Wir konnen leicht prüfen, dass in dieser Teilmenge die gleichen Rechenregeln gelten wie in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Deshalb macht auch folgende **Definition** Sinn:

(a) Wir setzen $(a,0) = a$ und erhalten somit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,
d.h. die Reellen Zahlen sind in der Menge der Komplexen Zahlen enthalten.

(b) Das Element $(0,1) \notin \mathbb{R}$ soll *imaginäre Einheit* heißen und wird mit dem Buchstaben $i = (0,1)$ bezeichnet[1].

Aus diesen Definitionen können folgende Sätze abgeleitet werden:

SATZ:

(a) Es gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Darstellung $\boxed{z = x + iy}$ mit rellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Es gilt $\boxed{i^2 = -1}$ d.h. die Gleichung $z^2 = -1$ hat in $\mathbb{C}$ die Lösung $z = i$.

Begründung:

(a) $(x,y) \quad = \quad (x,0) + (y,0) \cdot (0,1) \quad = \quad x + iy$

(b) $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$

2 Begriffe

Für jede komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heiße

- Die Zahl $x = Re(z)$ der *Realteil* von z
- Die Zahl $y = Im(z)$ der *Imaginärteil* von z
- Die reelle Zahl $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der *Betrag* von z
- Die komplexe Zahl $\bar{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl.*

Es gelten folgende Rechenregeln (Beweis einfach durch einsetzen):

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = |z^2| \tag{5}$$

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \tag{6}$$

$$Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \tag{7}$$

Somit kann auch die Division komplexer Zahlen definiert werden:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\bar{z}_2}{z_2\,\bar{z}_2} = \frac{z_1\,\bar{z}_2}{|z^2|} \tag{8}$$

Für die die Konjugation gilt weiter:

$$\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \tag{9}$$

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \tag{10}$$

$$|z| = |\bar{z}| \tag{11}$$

[1] Im bestimmten Anwendungsgebieten wird die imaginäre Einheit mit j statt i bezeichnet!

Ferner gilt für die imaginäre Einheit:

$$|i| = |\bar{i}| = 1 \tag{12}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = -i \tag{13}$$

Wir haben gesehen, das komplexe Zahlen im Grunde nichts anderes sind als eine alternative Möglichkeit zur Beschreibung von Punkten auf der Ebene. Was kann ich mit komplexen Zahlen denn nun mehr oder einfacher machen als mit kartesischen Koordinaten?

Einen Unterschied zu kartesischen Koordinaten haben wir ja schon gesehen. Wir können komplexe Zahlen miteinander multiplizieren. Was bedeutet diese Multiplikation denn aber geometrisch? Schauen wir uns ein einfaches Beispiel an: Nehmen wir die Zahl $z_1 = (5, 0) = 5$. Multiplizieren wir sie mit der Zahl $z_2 = (0, 1) = i$. Das Ergebnis ist $z_1 \cdot z_2 = (0, 5)$. Geometrisch gesehen hat sich der Ortsvektor des Punktes $(5, 0)$ um 90 Grad um den Ursprung gedreht und liegt jetzt bei $(0, 5)$. Wir werden gleich sehen, dass eine Multiplikation mit einer komplexen Zahl als Rotation interpretiert werden, wenn ihr Betrag 1 ist.

3 Andere Darstellungsformen

Neben den kartesischen Koordinaten kennen wir auch schon eine andere Möglichkeit Punkte auf der Ebene zu beschreiben, nämlich die Polarkoordinaten. Ein Punkt in Polarkoordinaten wird durch den Abstand r vom Ursprung und dem Winkel φ mit der x-Achse beschrieben:

$$\left.\begin{array}{r} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \tag{14}$$

(15)

Die Umrechnung in die andere Richtung geht wie folgt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{16}$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \tag{17}$$

Wenn wir uns die Multiplikation zweier komplexen Zahlen in dieser Darstellung anschauen,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{18}$$

sehen wir das die Multiplikation mit einer komplexen Zahl z_2 nichts anderes ist als eine Rotation des Punktes um den Winkel $\varphi 2$ und eine gleichzeitige Längenänderung, d.h. eine Skalierung mit dem Faktor r_2. Wenn wir den Betrag der komplexen Zahl z_2 auf 1 setzen, d.h. $r_2 = 1$, dann erhält die Möglichkeit eine Rotation durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl zu beschreiben.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{19}$$

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl z mit einem Betrag $\|z\| = 1$ entspricht demnach einer Rotation um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$.

Betrachtet man nun eine Funktion f, die alle komplexen Zahlen mit Betrag $\|z\| = 1$ erzeugt:

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi \tag{20}$$
$$\tag{21}$$

Für diese Funktion $f(\varphi)$ gelten folgende Eigenschaften

$$f(0) = 1 \tag{22}$$
$$f(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) \cdot f(\varphi_2) \tag{23}$$

Wir kennen aber bereits eine andere Funktion, die dieselben Eigenschaften hat, nämlich die Exponentialfuktion:

$$f(x) = e^x \tag{24}$$
$$f(0) = 1 \tag{25}$$
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \tag{26}$$

Dieser Zusammenhang rechtfertigt die Definition einer komplexen Exponentialfunktion:

$$z = (x, y) = x + i \cdot y = r(\cos\varphi + i \cdot \varphi) = re^{i\varphi} \tag{27}$$

Als Ergebnis haben wir gesehen, dass die Definition der komplexen Zahlen es ermöglicht, beliebig zwischen den unterschiedlichen Darstellungsformen zu wechseln. Ein Punkt in 2D kann behandelt werden

- als Vektor in kartesischen Koordinaten mit allen Rechenregeln der Vektorrechnung
- als Zahl, mit allen Rechenregeln der reellen Zahlen
- als trigonometrische Funktion mit allen Additionstheoremen für Sinus und Cosinus
- als Exponentialfunktion mit allen Rechenregeln für Exponentialfunktionen

Die Tatsache, das das Quadrat der imaginären Einheit i den Wert -1 hat, ist dabei sozusagen als Nebenprodukt entstanden. Diese Tatsache läßt sich geometrisch interpretieren. Die komplexe Zahl i beschreibt sowohl den Punkt $(0, 1)$ in kartesischen Koordinaten, als auch die Rotation um den Winkel $\varphi = 90°$. Rotiert man nun den Punkt $(0, 1)$ um $90°$, was einer Multipliktion $i \cdot i$ gleichkommt, so erhält man exakt den Punkt $(-1, 0) = -1$.

Es ist noch interessant anzumerken, dass der Term $i^4 = 1$ einer Rotation des Punktes $(0, 1)$ um $3 \cdot 90° = 270°$ entspricht, und gleichzeitig der vierten Wurzel aus 1. Im Reellen besitzt die Gleichung $x^n = 1$ nur eine oder zwei Lösungen (nämlich die 1 und die -1 falls n gerade ist). Im Komplexen besitzt diese Gleichung mehr als eine Lösung, nämlich die sogenannten n-ten Einheitswurzeln, die dadurch entstehen, dass man den Einheitskreis in n gleiche Sektoren unterteilt.