

# Mathematik für Ingenieure I

(für Informatiker)

Hans Grabmüller

Institut für Angewandte Mathematik

Vorlesung im Wintersemester 1999/2000



Friedrich–Alexander–Universität Erlangen–Nürnberg

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>1</b> | <b>Reelle Zahlen</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1      | Grundlagen der Logik . . . . .                               | 1          |
| 1.2      | Naive Mengenlehre . . . . .                                  | 1          |
| 1.3      | Vorbemerkungen über reelle Zahlen . . . . .                  | 5          |
| 1.4      | Grundbegriffe der Algebra . . . . .                          | 9          |
| 1.4.1    | Relationen und Abbildungen . . . . .                         | 9          |
| 1.4.2    | Algebraische Operationen . . . . .                           | 13         |
| 1.4.3    | Homomorphismen, Kongruenzrelationen . . . . .                | 15         |
| 1.4.4    | Gruppen, Ringe, Körper . . . . .                             | 20         |
| 1.5      | Vollständige Induktion . . . . .                             | 26         |
| 1.6      | $\mathbf{R}$ als geordneter Körper . . . . .                 | 29         |
| 1.7      | Intervalle, Betrag, Signum . . . . .                         | 35         |
| 1.8      | Das Vollständigkeitsaxiom in $\mathbf{R}$ . . . . .          | 38         |
| 1.9      | Elemente der Kombinatorik . . . . .                          | 44         |
| <b>2</b> | <b>Komplexe Zahlen</b>                                       | <b>59</b>  |
| 2.1      | $\mathbf{C}$ als Menge geordneter Paare . . . . .            | 59         |
| 2.2      | Die GAUSSsche Zahlenebene . . . . .                          | 63         |
| 2.3      | Die komplexe Exponentialfunktion . . . . .                   | 69         |
| 2.4      | Polynome . . . . .   | 74         |
| 2.5      | Nullstellen von Polynomen . . . . .                          | 80         |
| <b>3</b> | <b>Folgen und Reihen</b>                                     | <b>86</b>  |
| 3.1      | Grenzwerte von Zahlenfolgen . . . . .                        | 86         |
| 3.2      | Konvergenzkriterien für Zahlenreihen . . . . .               | 108        |
| 3.2.1    | Der Tröpfel-Algorithmus für die Eulersche Zahl $e$ . . . . . | 121        |
| 3.2.2    | Der Tröpfel-Algorithmus für die Kreiszahl $\pi$ . . . . .    | 122        |
| <b>4</b> | <b>Vektoren</b>  | <b>128</b> |
| 4.1      | Der GAUSS-Algorithmus . . . . .                              | 128        |
| 4.2      | Skalarenvektoren und Vektorräume . . . . .                   | 137        |
| 4.3      | Untervektorräume . . . . .                                   | 143        |
| 4.4      | Lineare Abhängigkeit . . . . .                               | 145        |
| 4.5      | Dimension und Basis . . . . .                                | 152        |
| 4.6      | Untermannigfaltigkeiten . . . . .                            | 157        |
| 4.7      | Skalarprodukte . . . . .                                     | 161        |
| 4.8      | Praehilberträume und normierte Vektorräume . . . . .         | 164        |
| 4.9      | Orthogonalkomplemente und geometrische Anwendungen . . . . . | 170        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>5</b> | <b>Matrizen</b>                                | <b>181</b> |
| 5.1      | Abbildungen, Funktionen . . . . .              | 181        |
| 5.2      | Lineare Abbildungen. Kern und Bild . . . . .   | 185        |
| 5.3      | Das Matrizenprodukt . . . . .                  | 197        |
| 5.4      | Die inverse Matrix . . . . .                   | 205        |
| 5.5      | Basis- und Koordinatentransformation . . . . . | 208        |
| 5.6      | Matrizen im Skalarprodukt . . . . .            | 213        |
| 5.7      | Spezielle Matrizen . . . . .                   | 216        |
| 5.8      | Determinanten und Anwendungen . . . . .        | 238        |
| 5.9      | Das Vektorprodukt . . . . .                    | 256        |

# Kapitel 1

## Reelle Zahlen

### 1.1 Grundlagen der Logik

Die in dieser Vorlesung benötigten Grundlagen der mathematischen Logik sind elementar und intuitiv leicht nachvollziehbar. Wir setzen sie als weitestgehend bekannt voraus oder verwenden sie, ohne eine ausdrückliche Rechtfertigung zu geben. Folgende Begriffe des mathematischen Schließens sollten geläufig sein:

- **Tertium non datur.** Jede Aussage  $A$  ist entweder **wahr** oder **falsch**, das heißt, es gilt entweder  $A$  oder (ausschließend)  $\neg A$  (nicht  $A$ ).
- **Implikationen.** (a)  $A \Rightarrow B$  : Aus  $A$  folgt  $B$  oder  $B$  ist **notwendig** für  $A$  oder  $A$  ist **hinreichend** für  $B$ .  
(b)  $A \Leftrightarrow B$  :  $A$  gilt genau dann, wenn  $B$  gilt oder  $A$  ist **notwendig und hinreichend** für  $B$ . Diese Aussage ist logisch äquivalent mit  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow A$ .
- **Indirekter Beweis.** Dieser ist eines der häufigsten Beweisverfahren zum Beweis einer Aussage der Form  $A \Rightarrow B$ . Man geht formal in folgenden Schritten vor:  
*Voraussetzung:* Gelte  $A$ .  
*Widerspruchsannahme:* Es gilt  $\neg B \Rightarrow \dots \Rightarrow$  es gilt  $\neg A$  W  
*Folgerung:* Es gilt  $B$ . □
- **Quantoren.** Diese sind im eigentlichen Sinne stenografische Kürzel zur Vereinfachung mathematischer Schreibweisen. Wir verwenden  
 $\exists$  oder  $\forall$  in der Bedeutung **es gibt** oder **es existiert**;  
 $\forall$  und  $\wedge$  in der Bedeutung **für alle**.

Die Quantoren  $\forall$  und  $\wedge$  sind streng stellungsgebunden (sie stehen jeweils **vor** einer Aussage). Die Quantoren  $\exists$  und  $\vee$  können weitestgehend frei verwendet werden (hinsichtlich beliebiger Positionen). Beispiele werden im Verlauf der Vorlesung gegeben.

---

### 1.2 Begriffe und Symbole aus der Mengenlehre

G. CANTOR (1845–1913) gab folgende Definition einer Menge:

**Definition 1.1** *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge.*

Die Begriffe der naiven Mengenlehre sollen hier als bekannt vorausgesetzt werden, da sie sich mit der Einführung der "modernen" Mathematik in unser Schulsystem doch in das Bewusstsein der heutigen Generation weitestgehend eingepägt haben. Für Mengen  $M, A, B$  verwenden wir kommentarlos die folgenden Bezeichnungen und Verknüpfungen:

- $a \in M, a \notin M; A = B, A \neq B; A \subset B, A \subseteq B$  (*enthalten oder gleich*);  $A \subsetneq B$  (das heißt  $A \subseteq B$  und  $A \neq B$ ).
- $A \cup B$  (*Vereinigung*).
- $A \cap B$  (*Durchschnitt*).
- $A \setminus B$  (*Differenz*); das ist die Menge aller Elemente  $a \in A$  mit  $a \notin B$ . Man beachte  $A \setminus B \neq B \setminus A$ .
- $\emptyset$  (Symbol für die *leere Menge*).

Mengen werden charakterisiert *entweder* durch Aufzählen ihrer Elemente in geschweiften Klammern, zum Beispiel

$$M := \{\text{He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn}\},$$

oder durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft, zum Beispiel

$$M := \{a : a \text{ ist ein Edelgas}\}.$$

Der **Definitions Doppelpunkt** " := " ist folgendermaßen zu verstehen. Die Größe nächst dem ":" wird durch den Ausdruck nächst dem "=" definiert und ist dann festgelegt, zum Beispiel:

$$A \setminus B := \{a : a \in A \text{ und } a \notin B\}.$$

Hat man eine  **feste Grundmenge**  $\Omega \neq \emptyset$ , so sind folgende Definitionen sinnvoll:

**Definition 1.2** (a) Für jede Teilmenge  $A \subseteq \Omega$  heiÙe

$$\mathcal{C}A := A^c := \bar{A} := \Omega \setminus A$$

das **Komplement** von  $A$  (bezüglich  $\Omega$ ) oder die zu  $A$  **komplementäre Menge**. (**Folgerung:**  $A$  und  $A^c$  sind **disjunkt**:  $A \cap A^c = \emptyset$ .)

(b) Ein System von Teilmengen  $\mathcal{A}$  einer nichtleeren Menge  $\Omega$  heiÙe eine **Mengenalgebra** über  $\Omega$  : $\Leftrightarrow$  (genau dann, wenn gilt:)

$$(A1) \quad \Omega \in \mathcal{A},$$

$$(A2) \quad A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathcal{A},$$

$$(A3) \quad A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}.$$

In einer Mengenalgebra sind die üblichen Mengenoperationen uneingeschränkt durchführbar. Die Verknüpfung *verschiedener* Mengenoperationen kann nicht willkürlich geschehen; sie ist vielmehr durch strenge Gesetzmäßigkeiten geregelt. Wir listen die wichtigsten dieser Gesetze hier auf.

|      |  |                             |
|------|--|-----------------------------|
| (K)  | $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$  | <b>(Kommutativgesetz)</b>   |
| (As) | $\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =: A \cup B \cup C, \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C; \end{cases}$ | <b>(Assoziativgesetz)</b>   |
| (D)  | $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \end{cases}$                     | <b>(Distributivgesetz)</b>  |
| (Id) | $A \cup A = A, A \cap A = A;$  | <b>(Idempotenzgesetz)</b>   |
| (N)  | $A \cap \Omega = A, A \cup \emptyset = A \quad \forall A \subset \Omega;$  | <b>(neutrale Elemente)</b>  |
| (Do) | $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \Omega = \Omega \quad \forall A \subset \Omega;$   | <b>(dominante Elemente)</b> |
| (Ko) | $A \setminus B = A \cap B^c, A \cap A^c = \emptyset, A \cup A^c = \Omega, A^{cc} = A.$   | <b>(Komplemente)</b>        |

Die Beziehungen (Ko) gelten für Teilmengen  $A, B \subset \Omega$ . Wegen (As) können die Operationen  $\cup$  und  $\cap$  auch für (endliche oder unendliche) **Systeme** von Mengen  $A_j, j \in I, (I$  sei eine beliebige **Indexmenge**) sinnvoll erklärt werden:

$$\begin{aligned} \bigcup_{j \in I} A_j &:= \{a : \exists j_0 \in I \text{ mit } a \in A_{j_0}\}, \\ \bigcap_{j \in I} A_j &:= \{a : a \in A_j \quad \forall j \in I\}. \end{aligned}$$

**Definition 1.3** (a) Für eine nichtleere Menge  $\Omega$  heiÙe die Zahl

$$|\Omega| := \text{card } \Omega := \text{Anzahl der Elemente in } \Omega$$

die **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** der Menge  $\Omega$ .  $\Omega$  heiÙe **endlich**, wenn  $|\Omega|$  eine endliche Zahl ist; ansonsten heiÙe  $\Omega$  **unendlich**.

(b) Die Menge aller Teilmengen einer nichtleeren Menge  $\Omega$  heiÙe die **Potenzmenge** von  $\Omega$ , bezeichnet mit  $\mathcal{P}(\Omega)$  oder mit  $2^\Omega$ :

$$\mathcal{P}(\Omega) := 2^\Omega := \{A : A \subset \Omega\}.$$

**Bemerkung 1.1** Gemäß Definition gilt stets  $\emptyset \subset \Omega$  für jede Menge  $\Omega$ , so dass immer auch  $\emptyset \in 2^\Omega$  folgt. Für endliche Mengen  $\Omega$  hat man  $|2^\Omega| = 2^{|\Omega|}$ , was hier nicht gezeigt werden soll. Diese Beziehung allein begründet die Wahl des Symbols  $2^\Omega$  für die Potenzmenge.  $\square$

Auf einem Mengensystem  $A_j \in \mathcal{P}(\Omega), j \in I$ , gelten die DE MORGANSchen Formeln:

$$(M1) \quad \left( \bigcap_{j \in I} A_j \right)^c = \bigcup_{j \in I} A_j^c,$$

$$(M2) \quad \left( \bigcup_{j \in I} A_j \right)^c = \bigcap_{j \in I} A_j^c.$$

Wir zeigen jetzt unsere frühere Behauptung, dass in einer Mengenalgebra die üblichen Mengenoperationen uneingeschränkt durchführbar sind.

**Satz 1.1** Ist  $\mathcal{A}$  eine Mengenalgebra über  $\Omega$ , so gilt stets:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
- (ii)  $A \cap B \in \mathcal{A} \forall A, B \in \mathcal{A}$ ;
- (iii)  $A \setminus B \in \mathcal{A} \forall A, B \in \mathcal{A}$ ;
- (iv)  $\bigcup_{j \in I} A_j \in \mathcal{A} \forall A_j \in \mathcal{A}$  und jede **endliche** Indexmenge  $I$ ;
- (v)  $\bigcap_{j \in I} A_j \in \mathcal{A} \forall A_j \in \mathcal{A}$  und jede **endliche** Indexmenge  $I$ .

Begründungen: (i) folgt wegen  $\emptyset = \Omega^c$  aus (A1) und (A2). (ii) gilt wegen

$$A \cap B \stackrel{(M1)}{=} (A^c \cup B^c)^c$$

mit den Axiomen (A2) und (A3). (iii) folgt aus (A2) und (ii) unter Verwendung von mit

$$A \setminus B \stackrel{(Ko)}{=} A \cap B^c.$$

Schließlich erhält man (iv) und (v) durch iterierte Anwendung von (A3) bzw. (ii).  $\square$

**Bemerkung 1.2** (a) In (iv) und (v) ist die **Endlichkeit** der Indexmenge  $I$  **wesentlich**. Ist  $I$  **unendlich**, so werden wir später zeigen, dass die Aussage

$$(A4) \quad A_j \in \mathcal{A}, j \in I \Rightarrow \bigcup_{j \in I} A_j \in \mathcal{A}$$

im allgemeinen **falsch** ist. Ein System  $\mathcal{A}$  von Teilmengen einer nichtleeren Menge  $\Omega$  mit den Eigenschaften (A1), (A2), (A3) und (A4) heißt eine  $\sigma$ -**Algebra** über  $\Omega$ .

(b) Für eine beliebige Menge  $\Omega$  ist die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  stets eine  $\sigma$ -Algebra.  $\square$

Von Bedeutung wird im Folgenden noch der Begriff des **Produktes** von Mengen sein:

**Definition 1.4** Für zwei Mengen  $A, B$  heiÙe die Menge

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$$

das (**cartesische**) **Produkt** von  $A$  und  $B$ . Das Paar  $(a, b)$  heiÙe **geordnetes Elementpaar**.

**BSP. (1.2.1)** (a) Das Produkt der Mengen  $A := \{1, 2, 3\}$  und  $B := \{3, 0\}$  ist die Menge

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3), (3, 0), (3, 3)\}.$$

(b) Für jede Menge  $M$  gilt

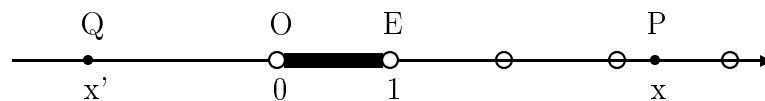
$$M \times \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \times M = \emptyset.$$

## 1.3 Vorbemerkungen über reelle Zahlen

Der Umgang mit reellen Zahlen, insbesondere ihre Verknüpfung durch die vier Grundrechenarten, darf als vertraut vorausgesetzt werden. Jeder hat durch einfache Aufgaben des Alltags praktische Erfahrungen mit reellen Zahlen gewonnen, und zwar im Umgang mit Geld, durch Messen, durch Wägen, im Dialog mit dem Computer, u.a.m. Ebenso vorausgesetzt werden können die Bedeutungen der Ordnungssymbole " $<$ ", " $\leq$ " sowie der Dezimalbrüche.

Was sind reelle Zahlen?

Auf den tieferen Sinn dieser Frage stößt man bei dem Versuch, eine widerspruchsfreie Antwort zu geben. Eine spontane Antwort fällt gar nicht leicht; sie zu geben, verschieben wir auf einen späteren Zeitpunkt. Vorab bedienen wir uns eines beliebigen Hilfsmittels zur Visualisierung der reellen Zahlen, nämlich der **Zahlengeraden**:



### Die Zahlengerade

Auf einer Geraden werden beliebig ein **Nullpunkt**  $O$  und rechts davon ein **Einheitspunkt**  $E$  festgelegt. Jeder weitere Punkt  $P$  auf der Geraden repräsentiert genau eine reelle Zahl  $x$ . Ihr Wert ist das Verhältnis der Strecken  $\overline{OP}$  zu  $\overline{OE}$ . Insbesondere repräsentieren der Punkt  $O$  die Zahl 0 und der Punkt  $E$  die Zahl 1. Punkten  $Q$  links von  $O$  werden negative Zahlen  $x'$  zugeordnet. Mit dieser Konstruktion sei vorläufig die folgende Bezeichnung vereinbart:

$\mathbf{R} := \{x : x = \text{Wert des Punktes } P \text{ auf der Zahlengeraden}\}.$

Die ganzzahligen Vielfachen der Strecke  $\overline{OE}$  rechts von  $O$  repräsentieren in  $\mathbf{R}$  die Teilmenge der **natürlichen Zahlen**

$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$

Praktisch – und häufig verwendet – ist die Bezeichnung  $\mathbf{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , aber 0 ist **keine** natürliche Zahl.

Addition " $+$ " und Multiplikation " $\cdot$ " sind in  $\mathbf{N}$  uneingeschränkt durchführbar: Summe und Produkt zweier natürlicher Zahlen sind wieder eine natürliche Zahl. Das heißt, die Menge  $\mathbf{N}$  ist unter den beiden algebraischen Operationen " $+$ " und " $\cdot$ " abgeschlossen.

**Aber:** Subtraktion und Division sind nur manchmal in  $\mathbf{N}$  durchführbar.

**BSP. (1.3.1)** Es gibt keine natürlichen Zahlen  $x, y \in \mathbf{N}$  mit  $9 + x = 4$  bzw.  $20 \cdot y = 4$ . Wie jeder weiß, hat die erste Gleichung die Lösung  $x = -5 \notin \mathbf{N}$ , die zweite die Lösung  $y = \frac{4}{20} \notin \mathbf{N}$ .

*Abhilfe* schafft man durch **Erweiterung** der Menge  $\mathbf{N}$ . Die Subtraktion wird uneingeschränkt ausführbar, wenn  $\mathbf{N}$  zur Menge der **ganzen Zahlen** erweitert wird:

$\mathbf{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$



**Merke:** Es gilt  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$  mit echter Inklusion sowie

$$\forall a, b \in \mathbf{Z} \exists! x \in \mathbf{Z} : a + x = b, \quad (x := b - a).$$

Das heißt, die Subtraktion ist in  $\mathbf{Z}$  uneingeschränkt durchführbar.

Die **Division** ist in  $\mathbf{Z}$  im allgemeinen nur mit **Rest** durchführbar. Die Gleichung

$$a \cdot x = b, \quad 0 \neq a, b \in \mathbf{Z},$$

hat nur manchmal eine Lösung in  $\mathbf{Z}$ ; zum Beispiel resultiert mit  $a = 4, b = -20$  die Lösung  $x = -5 \in \mathbf{Z}$ . Hingegen erhält man für  $a = -20, b = 4$  die Lösung  $x = -\frac{4}{20} \notin \mathbf{Z}$ . Es genügt, sich auf Faktoren  $a \in \mathbf{N}$  zu beschränken. Andernfalls ersetze man  $x$  durch  $y := -x$ . Stets gilt (zum Beweis vgl. Satz 1.4):

$$\forall a \in \mathbf{N} \forall b \in \mathbf{Z} \exists! x \in \mathbf{Z} \exists! r \in \mathbf{Z}, 0 \leq r < a : a \cdot x + r = b.$$

Die Zahl  $r$  heißt **Divisionsrest**. Wir haben zum Beispiel  $3 \cdot 5 + 2 = 17$  (oder gleichbedeutend  $17 : 3 = 5$  Rest 2) sowie  $-4 \cdot 5 + 3 = -17$  (oder gleichbedeutend  $(-17) : 4 = -5$  Rest 3). Diese unpraktische Division mit Rest erübrigt sich, wenn  $\mathbf{Z}$  zur Menge der **rationalen Zahlen** erweitert wird:

$$\mathbf{Q} := \left\{ x = \frac{p}{q} : p \in \mathbf{Z} \text{ und } q \in \mathbf{N} \right\} := \text{Menge der periodischen Dezimalbrüche.}$$

**Bemerkung 1.3** Ein **periodischer Dezimalbruch**  $r$  ist vom allgemeinen Typ

$$r := \underbrace{r_0, r_1 r_2 \cdots r_k}_{\text{Vorperiode}} \overline{d_1 d_2 \cdots d_n}_{\text{Periode}}.$$

Gilt  $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$ , so liegt ein **abbrechender Dezimalbruch** vor (oder ein periodischer Dezimalbruch mit der Periode Null).  $\square$

Wir zeigen die Gleichheit der beiden obigen Definitionen von  $\mathbf{Q}$ .

(a) Das übliche Divisionsverfahren liefert zu jeder Zahl  $r = \frac{p}{q}$  vom angegebenen Typ einen periodischen Dezimalbruch, zum Beispiel

$$-\frac{3}{8} = (-3) : 8 = -0,375 = -0,375\bar{0} \in \mathbf{Q}, \quad \frac{118}{55} = 118 : 55 = 2,14\bar{5} \in \mathbf{Q}.$$

(b) Unter Verwendung der Identität

$$0, \overline{d_1 d_2 \cdots d_n} = \frac{d_1 \cdot 10^{n-1} + d_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + d_n}{10^n - 1}$$

kann umgekehrt jeder periodische Dezimalbruch  $r := r_0, r_1 r_2 \cdots r_k \overline{d_1 d_2 \cdots d_n}$  in der Form  $r = \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbf{Z}$  und  $q \in \mathbf{N}$  dargestellt werden, zum Beispiel

$$\begin{aligned} 0,375 &= \frac{375}{1000} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{3}{8} \in \mathbf{Q}, \\ 2,14\bar{5} &= 2,1 + 0,04\bar{5} = \frac{1}{10} (21 + 0,4\bar{5}) \stackrel{n=2}{=} \frac{1}{10} \left( 21 + \frac{45}{99} \right) = \frac{21}{10} + \frac{5}{110} \\ &= \frac{236}{110} = \frac{118}{55} \in \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.4** (a) Die Periodizität eines Bruches hängt *nicht* von der Wahl des Ziffernsystems ab (also nicht davon, ob der Bruch im Dual-, Oktal-, Dezimal-, Hexagesimal- usw. System dargestellt wird).

(b) Es gilt  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ , da die Zahl  $p \in \mathbf{Z}$  mit dem Bruch  $\frac{p}{1} \in \mathbf{Q}$  identifiziert werden kann.

(c) Die  $\frac{p}{q}$ -Darstellung ist nicht eindeutig, zum Beispiel gilt

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$$

**Eindeutigkeit** wird erst durch die folgende Forderung erreicht:

$$\mathbf{Q} := \left\{ r = \frac{p}{q} : p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \text{ und } p, q \text{ teilerfremd} \right\}.$$

(d) Auch die Darstellung periodischer Dezimalbrüche ist nicht eindeutig; zum Beispiel gilt  $\square$

$$3, 1415\bar{9} = 3, 1416\bar{0}.$$

In  $\mathbf{Q}$  sind jetzt die vier Grundrechenarten **uneingeschränkt** durchführbar.

Gegeben seien rationale Zahlen  $r_j := p_j/q_j \in \mathbf{Q}$ ,  $j = 1, 2$ . Die Gleichung  $r_1 + x = r_2$  hat die eindeutige Lösung

$$x = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{q_1 q_2} \in \mathbf{Q}.$$

Die Gleichung  $r_1 \cdot x = r_2$  hat stets dann eine eindeutige Lösung  $x \in \mathbf{Q}$ , wenn  $r_1 \neq 0$  gilt. Diese Lösung lautet

$$x = \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} \in \mathbf{Q}.$$

**Bemerkung 1.5** (a) Für  $r_1 = 0$  ist die Gleichung  $r_1 \cdot x = r_2$  entweder widerspruchsvoll ( $r_2 \neq 0$ ) oder für alle  $x \in \mathbf{Q}$  erfüllt ( $r_2 = 0$ ). Daher fordert man:

**Division durch Null ist verboten!**

(b) Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen  $r, s$  liegen stets unendlich viele weitere rationale Zahlen, zum Beispiel die Zahlen  $\square$

$$r_1 := \frac{r+s}{2}, r_2 := \frac{r+r_1}{2}, r_3 := \frac{r+r_2}{2}, \dots, r_{j+1} := \frac{r+r_j}{2}, \dots$$

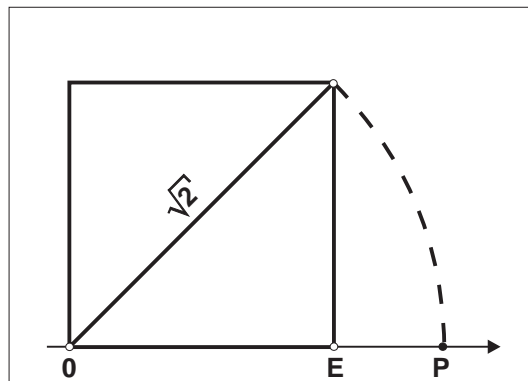
Wir werden bald die **Dichtheit** von  $\mathbf{Q}$  in der Menge der reellen Zahlen begründen. Mit der obigen Konstruktion zeigt man danach sogar, dass in jedem Abschnitt positiver Länge der Zahlengeraden beliebig viele Punkte aus  $\mathbf{Q}$  liegen. (Negation: Es gibt keinen Abschnitt positiver Länge der Zahlengeraden, in dem keine Zahl aus  $\mathbf{Q}$  existiert.) Unter dem Einfluss der pythagoräischen Schule waren die antiken Griechen lange der Meinung, das Problem der Längenmessung sei stets in  $\mathbf{Q}$  lösbar: Eine vorgegebene Einheitsstrecke  $\overline{OE}$  wird derart in  $q$  gleiche Teile zerlegt, dass ein so erhaltenes Teilstück genau  $p$ -mal in eine zu messende Strecke  $\overline{OP}$  hineinpasst. Die Länge  $\overline{OP}$  ist dann die rationale Zahl  $x = \frac{p}{q}$ . Es war für die Griechen ein tiefer Schock, als ein Mitglied eben jener pythagoräischen Schule die Entdeckung machte, dass die "rationale" Zahlengerade Löcher aufweist. Es gibt Punkte auf der Zahlengeraden, denen keine rationale Zahl zugeordnet ist:

**Satz 1.2** Die Gleichung  $x \cdot x = 2$  hat keine Lösung  $x \in \mathbf{Q}$ .

*Begründung:* Diese wird indirekt gegeben. Angenommen, es existiere ein solches  $x = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$  mit teilerfremden  $p, q \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x \cdot x &= \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 && \Rightarrow 2 \text{ teilt } p^2 = p \cdot p \\ \Rightarrow 2 \text{ teilt } p && \Rightarrow 4 \text{ teilt } p^2 = 2q^2 && \Rightarrow 2 \text{ teilt } q^2 \\ \Rightarrow 2 \text{ teilt } q && \Rightarrow x = \frac{p}{q} = \frac{2p_0}{2q_0} && \Rightarrow p \text{ und } q \text{ nicht teilerfremd } \boxed{\text{W}}. \end{aligned}$$

Also ist die Behauptung wahr. □



**Geometrische Darstellung der Zahl  $\sqrt{2}$**

Die Diagonale  $x$  des Einheitsquadrates genügt der Gleichung  $x \cdot x = 2$  (Satz des PYTHAGORAS). Der Endpunkt  $P$ , der bei Drehung der Diagonalen  $x = \sqrt{2}$  in die Zahlengerade entsteht, ist kein rationaler Punkt! (Der frevelhafte Entdecker dieser Ungeheuerlichkeit soll zur Strafe von seinen pythagoräischen Genossen während einer Seefahrt ins Meer geworfen worden sein. Wir sind heute mehr denn je berechtigt zu fragen, ob hier das Strafmaß nicht das Gesetz der Verhältnismäßigkeit gesprengt hat. Jeder der handelsüblichen Computer arbeitet ausschließlich mit einer Arithmetik auf der Basis der rationalen Zahlen. Wozu also noch mehr Zahlen? Der Glaube an die fast unbegrenzten Möglichkeiten moderner Computer bedarf wohl keiner ideologischen Untermauerung mehr. Oder?)

Ein weiterer Beweis für die Lückenhaftigkeit der "rationalen" Zahlengeraden ist die Existenz **nichtperiodischer Dezimalbrüche**, wie zum Beispiel

$$x := 0,101001000100001\dots$$

**Definition 1.5** Jeder nichtperiodische Dezimalbruch heißt **irrationale Zahl**. Die Vereinigungsmenge von rationalen und irrationalen Zahlen bildet die Menge der **reellen Zahlen**:

$$\mathbf{R} := \text{Menge der Dezimalbrüche.}$$

**Bemerkung 1.6** (a) Wir haben nach Konstruktion  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ , jeweils mit echter Inklusion.

(b) In der obigen Definition der reellen Zahlen sind noch folgende Punkte zu klären.

- Abhängigkeit von der Dezimaldarstellung?
- Rechengesetze für irrationale Zahlen?

- Ist die Gleichung  $x \cdot x = 2$  in  $\mathbf{R}$  wirklich lösbar, das heißt, wird nun die "Lückenlosigkeit" der Zahlengeraden gewährleistet? Die nicht beweisbare Antwort lautet "JA". Sie wird in der Mathematik als Axiom postuliert, und zwar als sogenanntes **Vollständigkeitsaxiom**. Wir kommen in Abschnitt 1.8 darauf zurück.  $\square$

## 1.4 Grundbegriffe der Algebra

### 1.4.1 Relationen und Abbildungen

Es ist eine elementare Tatsache, dass je zwei natürliche Zahlen  $x, y \in \mathbf{N}$  in der Relation  $x \leq y$  oder  $y < x$  zueinander stehen. Somit ist durch

$$R := \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x \leq y\}$$

eine Teilmenge von  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$  sinnvoll erklärt. Man nennt  $R$  eine **Relation** auf  $\mathbf{N}$ . Allgemeiner gelte:

**Definition 1.6** (a) Für je zwei Mengen  $M, N$  heiße  $K \subset M \times N$  eine **Korrespondenz** zwischen  $M$  und  $N$ .

(b) Eine Korrespondenz  $R \subset M \times M$  heiße eine **Relation** auf der Menge  $M$ . Anstelle von  $(x, y) \in R$  schreibt man  $xRy$  (oder man verwendet statt  $R$  ein anderes Zeichen).

**BSP. (1.4.1)** (a) Nachfolgend bezeichnen  $R_1$  und  $R_2$  Relationen auf der Menge  $\mathbf{N}$  der natürlichen Zahlen.

(i)  $xR_1y$  bedeute  $x < y$ :

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x < y\} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (2, 3), (2, 4), (2, 5), \dots\}.$$

(ii)  $xR_2y$  bedeute  $2|(x+y)$  (in Worten: 2 teilt  $x+y$ ):

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : 2|(x+y)\} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), \dots, (2, 2), (2, 4), (2, 6), \dots\}.$$

(b) Für eine Menge  $M$  heiße

$$\Delta(M) := \{(x, x) : x \in M\} \subset M \times M$$

die **Diagonale** von  $M \times M$ . Genau dann gilt  $x\Delta(M)y$ , wenn  $x = y$  ist. Das heißt,  $\Delta(M)$  ist die Gleichheit "=" auf  $M$ .

**Definition 1.7** Eine Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  heiße

- (a) **reflexiv**  $:\Leftrightarrow$  es gilt  $xRx \ \forall x \in M$ ,
- (b) **symmetrisch**  $:\Leftrightarrow xRy$  impliziert stets  $yRx$ ,
- (c) **antisymmetrisch**  $:\Leftrightarrow xRy$  und  $yRx$  gelten genau dann, wenn  $x = y$ ,
- (d) **transitiv**  $:\Leftrightarrow xRy$  und  $yRz$  implizieren  $xRz$ ,
- (e) **alternativ**  $:\Leftrightarrow$  es gilt  $xRy$  oder  $yRx$ .

Es ist leicht nachvollziehbar, dass die Relation  $=$  auf der Menge  $\mathbf{N}$  die Eigenschaften (a)–(d) hat, nicht aber (e). Hingegen hat die Relation  $\leq$  auf  $\mathbf{N}$  die Eigenschaften (a), (c)–(e), während die Symmetriebedingung (b) nicht gilt.

**Definition 1.8** Eine Relation  $R$  auf einer Menge  $M$  heie

- **Äquivalenzrelation**  $:\Leftrightarrow R$  ist reflexiv, symmetrisch und transitiv,
- **Ordnungsrelation**  $:\Leftrightarrow R$  ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. Das Paar  $(M, R)$  heie **geordnete Menge**. Ist  $R$  darüber hinaus noch alternativ, so heie  $(M, R)$  **vollständig** (oder linear) **geordnet**.

**BSP. (1.4.2)** (a) Die Relation  $R_2$  aus BSP. (1.4.1) ist eine Äquivalenzrelation. Reflexivität und Symmetrie sind klar. – Transitivität: Gelten  $xR_2y$  und  $yR_2z$ , so sind  $x + y$  und  $y + z$  durch 2 teilbar, und somit auch  $x + z = (x + y) - (y + z) + 2z$ .

(b) Für  $M := \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$  oder  $\mathbf{R}$  ist das Paar  $(M, \leq)$  vollständig geordnet.

(c) Die Menge  $\mathbf{N}$  der natürlichen Zahlen, versehen mit der Relation

$$R := \{(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x|y\}$$

ist eine geordnete Menge; aber  $R$  ist keine vollständige Ordnung. Es gilt weder  $4|5$  noch  $5|4$  (zum Beispiel).

(d) Für eine nichtleere Menge  $\Omega$  setzen wir

$$R := \{(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) : A \subset B\},$$

das heißt,  $R$  ist die Inklusionsrelation. Das Paar  $(\mathcal{P}(\Omega), \subset)$  ist wiederum eine geordnete Menge, die i.a. aber nicht vollständig geordnet ist. So gilt z.B. in  $\mathcal{P}(\{1, 3, 5\})$  weder  $\{1, 3\} \subset \{1, 5\}$  noch  $\{1, 5\} \subset \{1, 3\}$ .

Eine Äquivalenzrelation  $R$  auf einer nichtleeren Menge  $M$  induziert stets eine Zerfällung (Partition) von  $M$  in Klassen äquivalenter Elemente.

**Definition 1.9** (a) Eine **Partition** von  $M$  ist ein System  $\{A_i : i \in I\}$  von nichtleeren, paarweise disjunkten Teilmengen  $A_i \subset M$  mit  $\bigcup_{i \in I} A_i = M$ .

(b) Die Menge

$$[x]_R := \{y \in M : xRy\} \subset M$$

aller zu  $x \in M$  äquivalenten Elemente von  $M$  heie die **Äquivalenzklasse** von  $x$ , und  $x$  nennt man einen **Vertreter** von  $[x]_R$ . Häufig schreibt man einfacher  $[x]$  anstelle von  $[x]_R$ , wenn eine Verwechslung der Äquivalenzrelation  $R$  ausgeschlossen ist.

Dass jede Äquivalenzrelation  $R$  auf  $M$  stets eine Partition von  $M$  induziert, liegt an folgenden Eigenschaften.

**Satz 1.3** Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $M$ . Dann gilt für alle  $x, y \in M$ :

(a)  $x \in [x]_R$  und somit  $M = \bigcup_{x \in M} [x]_R$ ,

(b)  $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$ .

*Begründungen:* (a) Diese Aussage gilt auf Grund der Definition der Äquivalenzklassen.

(b) Gilt  $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ , so ist offenbar  $[x]_R \cap [y]_R = [x]_R \neq \emptyset$ . Sei andererseits  $z \in [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ . Dann folgt  $zRx$  sowie  $zRy$ , also  $[z]_R = [x]_R$  und  $[z]_R = [y]_R$ . (Klar,  $w \in [z]_R$  bedeutet  $wRz$ , und somit auch  $wRx$ , da  $R$  transitiv ist. Dies liefert  $w \in [x]_R$ , also  $[z]_R \subset [x]_R$ . Genauso zeigt man  $[x]_R \subset [z]_R$ .)  $\square$

**Bemerkung 1.7** Man nennt die Menge aller Äquivalenzklassen von  $M$  unter der Äquivalenzrelation  $R$  auch die **Quotientenmenge** von  $R$ :

$$M/R := \{[x]_R : x \in M\}.$$

**BSP. (1.4.3)** Wir betrachten auf  $\mathbf{N}$  die Äquivalenzrelation  $R_2$  aus BSP. (1.4.1). Für jedes  $x \in \mathbf{N}$  ist

$$[x]_{R_2} := \{y \in \mathbf{N} : 2|(x+y)\},$$

und man erhält hier genau zwei verschiedene Äquivalenzklassen, nämlich

$$\begin{aligned} [1]_{R_2} &= \{x \in \mathbf{N} : 2|(x+1)\} = \{1, 3, 5, \dots\}, \\ [2]_{R_2} &= \{x \in \mathbf{N} : 2|(x+2)\} = \{2, 4, 6, \dots\}. \end{aligned}$$

Wie wir schon festgestellt haben, ist  $(\mathbf{N}, \leq)$  eine vollständig geordnete Menge, und es ist uns intuitiv klar, dass sie ein **kleinstes** Element hat, nämlich das Element 1.

**Definition 1.10** Es sei  $(M, \leq)$  eine vollständig geordnete Menge, und es sei  $A \subset M$  gegeben.

(a)  $x \in A$  heie **kleinstes Element** oder **Minimum** von  $A$  (in Zeichen:  $x = \min(A)$ )  $:\Leftrightarrow$  es gilt  $x \leq y \forall y \in A$ .

(b)  $x \in A$  heie **grstes Element** oder **Maximum** von  $A$  (in Zeichen:  $x = \max(A)$ )  $:\Leftrightarrow$  es gilt  $y \leq x \forall y \in A$ .

(Wegen der Antisymmetrie der Ordnungsrelation kann es in (a) bzw. (b) höchstens ein solches  $x \in A$  geben.)

**BSP. (1.4.4)** Es gilt  $\min(\mathbf{N}_0) = 0$ ; die Mengen  $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  haben keine kleinsten und keine grösten Elemente.

Das wichtigste Hilfsmittel zur Untersuchung von Mengenstrukturen sind die **Funktionen** oder **Abbildungen** von einer Menge  $M$  in eine zweite Menge  $N$ . Wir werden in Abschnitt 5.1 ausführlicher auf diesen Begriff eingehen und beschränken uns hier nur auf die Erläuterung der Grundtatsachen.

**Definition 1.11** Es seien  $M$  und  $N$  Mengen, und es sei  $f \subset M \times N$  eine Korrespondenz.  $f$  heie eine **Abbildung** (oder **Funktion** oder **Zuordnung**) von  $M$  in  $N$   $:\Leftrightarrow$

$$\forall x \in M \exists! y \in N : (x, y) \in f. \tag{A}$$

Es soll nun stets die übliche Schreibweise verwendet werden, nämlich

$$f : M \rightarrow N \text{ anstelle von } f \subset M \times N, \quad y = f(x) \text{ anstelle von } (x, y) \in f.$$

Das Element  $y = f(x)$  heie **Bild** von  $x$  unter  $f$ , und das Element  $x$  heie **Urbild** von  $y$ .

**Bemerkung 1.8** (a) Wir bezeichnen mit

$$\text{Abb}(M, N) := \{f : M \rightarrow N : f \text{ ist Funktion}\}$$

die Menge aller Abbildungen (oder den **Funktionsraum**) von  $M$  nach  $N$ .

(b) Für  $f, g \in \text{Abb}(M, N)$  gilt  $f = g$  genau dann, wenn  $f(x) = g(x) \forall x \in M$ .

(c) Die folgenden **Varianten** für Funktionsbezeichnungen sollen exemplarisch aufgezeigt werden:

$$\begin{aligned} & f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ mit } f(x) := x^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}, \\ \text{oder} & : x \mapsto x^2, \\ \text{oder} & : \text{Funktion } x^2. \end{aligned}$$

Statt  $f : M \rightarrow N$  schreibt man auch  $M \xrightarrow{f} N$ . □

**Definition 1.12** Gegeben seien Mengen  $M, N$  und eine Funktion  $f \in \text{Abb}(M, N)$ .

(a) Für  $A \subset M$  heie

$$f(A) := \bigcup_{x \in A} f(x) = \{y \in N : y = f(x) \text{ und } x \in A\}$$

die **Bildmenge** von  $A$  unter  $f$ . Man setzt  $\text{Bild } f := f(M)$ .

(b) Für  $B \subset \text{Bild } f$  heie

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\}$$

die **Urbildmenge** von  $B$  bezüglich  $f$ .

(c) Die Funktion  $f$  heie

- **surjektiv** (oder **Abbildung auf**), wenn gilt:  $f(M) = N$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x),$$

- **injektiv** (oder **eindeutige Abbildung**), wenn gilt:

$$x_1, x_2 \in M \text{ und } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

In Worten: Jedes Bild  $y \in f(M)$  hat genau ein Urbild  $x \in M$ ,

- **bijektiv** (oder **eindeutige Abbildung auf**), wenn  $f$  injektiv **und** surjektiv ist.

(d) Ist  $f$  bijektiv, so wird durch

$$f^{-1} := \{(y, x) \in N \times M : y = f(x) \text{ und } y \in N\}$$

die **Umkehrabbildung**  $f^{-1}$  von  $f$  definiert, und wir schreiben wieder  $x = f^{-1}(y)$  anstelle von  $(y, x) \in f^{-1}$ . Es ist  $f^{-1} : N \rightarrow M$  ebenfalls bijektiv, und es gilt  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

**BSP. (1.4.5)** (a) Die Abbildung  $\text{Id}_M : M \rightarrow M$  mit  $\text{Id}_M(x) := x \forall x \in M$  heie **Identität** auf  $M$ , wobei man häufig einfacher  $\text{Id}$  oder **1** schreibt. Diese ist **bijektiv**.

(b) Die Abbildung  $i_A : A \rightarrow M$  mit  $i_A(x) := x \forall x \in A$  heie **Einbettung** von  $A \subset M$  in  $M$ . Sie ist **injektiv**.

(c) Die **Einschränkung**  $f|_A : A \rightarrow N$  von  $f \in \text{Abb}(M, N)$  auf  $A \subset M$  mit  $f|_A(x) := f(x) \forall x \in A$  ist **injektiv**, falls  $f$  injektiv ist.

(d) Die **Fortsetzung**  $f : M \rightarrow N$  einer Funktion  $g \in \text{Abb}(A, N)$  ist definiert durch  $f|_A := g$ .

---

## 1.4.2 Algebraische Operationen

Wir haben bereits in Abschnitt 1.3 festgestellt, dass auf der Menge  $\mathbf{N}$  der natürlichen Zahlen die Rechenoperationen des Addierens und des Multiplizierens uneingeschränkt durchführbar sind, ohne die Menge  $\mathbf{N}$  zu verlassen. Die Operationen  $+$  und  $\cdot$  sind Abbildungen des cartesischen Produkts  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$  in  $\mathbf{N}$ :

$$+ : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \text{ mit } (a, b) \mapsto a + b, \quad \cdot : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \text{ mit } (a, b) \mapsto a \cdot b. \quad (4.1)$$

Allgemeiner haben wir:

**Definition 1.13** *Es sei  $M$  eine nichtleere Menge. Eine Abbildung*

$$* : M \times M \rightarrow M, \quad (a, b) \mapsto a * b \quad \forall a, b \in M$$

heie eine **binäre algebraische Operation** (oder **Verknüpfung**) auf  $M$ .

**BSP. (1.4.6)** (a) Wir ersetzen in (4.1) die Menge  $\mathbf{N}$  durch  $M := \mathbf{Z}$  oder  $M := \mathbf{Q}$  oder  $M := \mathbf{R}$ . Dann sind  $+$  und  $\cdot$  Verknüpfungen auf  $M$ .

(b) Für eine Menge  $\Omega$  sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \cup & : \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega), & (A, B) & \mapsto A \cup B \quad \forall A, B \subset \Omega, \\ \cap & : \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega), & (A, B) & \mapsto A \cap B \quad \forall A, B \subset \Omega \end{aligned}$$

Verknüpfungen auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Wir unterscheiden verschiedene Eigenschaften von Verknüpfungen:

**Definition 1.14** (a) *Eine Verknüpfung  $*$  auf einer Menge  $M$  heie*

- **kommutativ** : $\Leftrightarrow a * b = b * a \quad \forall a, b \in M$ ,
- **assoziativ** : $\Leftrightarrow (a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in M$ .

(b) *Ein Element  $e \in M$  heie **neutrales Element** (oder **Einselement**) der Verknüpfung  $*$ , wenn gilt:  $e * a = a = a * e \quad \forall a \in M$ .*

(c) *Es sei  $e \in M$  neutral bezüglich  $*$ . Ein Element  $a^{-1} \in M$  heie **invers** zu  $a \in M$  bezüglich  $*$ , wenn gilt:  $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$ . Das Element  $a$  heie **invertierbar**, wenn es mindestens ein Inverses  $a^{-1}$  gibt.*

**BSP. (1.4.7)** (a) Die im vorangegangenen BSP. (1.4.6) betrachteten Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  auf  $M := \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$  oder  $\mathbf{R}$  sind kommutativ und assoziativ. Es ist  $0$  neutrales Element von  $+$  und  $1$  neutrales Element von  $\cdot$ . Jedes  $a \in M$  hat bezüglich  $+$  das inverse Element  $(-a)$ . In  $\mathbf{Z}$  existieren bezüglich  $\cdot$  keine inversen Elemente (mit Ausnahme von  $a = \pm 1$ ).

(b) Auf  $\mathcal{P}(\Omega)$  sind  $\cup$  und  $\cap$  ebenfalls kommutativ und assoziativ. Es ist  $\emptyset$  neutrales Element von  $\cup$  und  $\Omega$  neutrales Element von  $\cap$ . Inverse Elemente existieren nicht.

(c) Die Verknüpfung  $- : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  mit  $(a, b) \mapsto a - b$  ist weder kommutativ noch assoziativ.



**Bemerkung 1.9** (a) Existiert ein neutrales Element  $e \in M$  der Verknüpfung  $*$ , so ist  $e$  *eindeutig* bestimmt. Denn wäre  $e' \in M$  ebenfalls neutral bezüglich  $*$ , so wäre  $e * e' = e'$ , (weil  $e$  neutral ist), und ebenso  $e * e' = e$ , (weil  $e'$  neutral ist). Also gilt  $e = e'$ .

(b) Ist die Verknüpfung  $*$  auf  $M$  *assoziativ*, so kann man Klammern ohne Bedenken fortlassen:

$$(a * b) * c = a * (b * c) := a * b * c.$$

Ist  $*$  darüber hinaus *kommutativ*, so können Faktoren beliebig vertauscht werden:

$$a * b * c = b * a * c = c * b * a = \dots$$

(c) Neben den **binären** algebraischen Operationen  $*$  :  $M \times M \rightarrow M$  können auch andere algebraische Operationen auf einer Menge  $M$  erklärt werden. Zum Beispiel ist die Abbildung

$${}^c : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega), \quad A \mapsto A^c = \bar{A} \quad \forall A \subset \Omega$$

eine **unäre** algebraische Operation. Eine Menge  $M$  mit der Gesamtheit ihrer algebraischen Operationen heie eine **algebraische Struktur** oder kurz eine **Algebra**. Ein Beispiel ist die in Definition 1.2 erklärte *Mengenalgebra*  $(\mathcal{P}(\Omega), \cup, \cap, {}^c)$  über einer Menge  $\Omega$ .  $\square$

**Definition 1.15** *Es sei  $*$  eine Verknüpfung auf einer Menge  $M$ , und es sei  $U \subset M$  nichtleere Teilmenge.  $(U, *)$  heie eine **Unteralgebra** oder **Teilalgebra** der Algebra  $(M, *)$ , wenn  $*$  auch eine Verknüpfung auf  $U$  ist, d.h. wenn gilt:*

$$a * b \in U \quad \forall a, b \in U.$$

(In analoger Weise definiert man *Unteralgebren*, wenn auf  $M$  mehrere algebraische Operationen erklärt sind.)

**BSP. (1.4.8)** Es ist  $(\mathbf{N}, +, \cdot)$  eine Unteralgebra der Algebra  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ .

In dem vorstehenden Beispiel sind auf den Trägermengen  $\mathbf{N}$  bzw.  $\mathbf{Z}$  *zwei* Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  erklärt. Wir sind aus der Schulerfahrung mit der Rechenregel

### Punktrechnung geht vor Strichrechnung

vertraut. Es müssen also unter Umständen bei gemeinsamem Auftreten mehrerer Verknüpfungen gewisse Rechenvorschriften beachtet werden:

**Definition 1.16** *Eine Verknüpfung  $*$  heie in  $M$  **distributiv** bezüglich einer Verknüpfung  $\square$ , wenn für alle  $x, y, z \in M$  gilt:*

$$x * (y \square z) = (x * y) \square (x * z), \quad (x \square y) * z = (x * z) \square (y * z). \quad (\text{D})$$

Offensichtlich ist die Multiplikation  $\cdot$  auf den Mengen  $M := \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$  oder  $\mathbf{R}$  distributiv bezüglich der Addition  $+$ . Die Distributivität ist im allgemeinen *keine* symmetrische Eigenschaft. Das heißt, aus der Distributivität von  $*$  bezüglich  $\square$  folgt *nicht* die Distributivität von  $\square$  bezüglich  $*$ . Dies zeigt unser Beispiel mit  $*$  :=  $\cdot$  und  $\square$  :=  $+$ . Hingegen zeigt die Tabelle in Abschnitt 1.2, Seite 3, dass in der Mengenalgebra  $(\mathcal{P}(\Omega), \cup, \cap, {}^c)$  sowohl  $\cup$  distributiv bezüglich  $\cap$  ist, als auch  $\cap$  distributiv bezüglich  $\cup$ .

### 1.4.3 Homomorphismen, Kongruenzrelationen

Wir betrachten Mengen  $M$  und  $N$ , auf denen jeweils eine Verknüpfung  $*$  bzw.  $\square$  erklärt sei, so dass Algebren  $(M, *)$  und  $(N, \square)$  resultieren. Ferner sei eine Funktion  $f \in \text{Abb}(M, N)$  gegeben. Dann sind offensichtlich

$$f(x * y) \in N, \quad f(x) \square f(y) \in N \quad \forall x, y \in M$$

wohldefinierte Elemente. Wir fragen nach solchen Funktionen  $f$ , für die gilt:

$$f(x * y) = f(x) \square f(y) \quad \forall x, y \in M. \quad (\text{H})$$

**BSP. (1.4.9)** Es seien  $M := \mathbf{N}, N := \mathbf{Q}$  sowie  $* := +$  und  $\square := \cdot$  gesetzt. Für eine feste Zahl  $0 \neq r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$  sind die Potenzen  $r^n = \frac{p^n}{q^n} \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}$ , stets erklärt. Wir definieren die Abbildung  $f : (\mathbf{N}, +) \rightarrow (\mathbf{Q}, \cdot)$  durch die Vorschrift

$$f(n) := r^n \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Nun gilt das bekannte Potenzgesetz

$$f(n + m) = r^{n+m} = r^n r^m = f(n) \cdot f(m) \quad \forall n, m \in \mathbf{N},$$

d.h. die Bedingung (H) ist erfüllt.

**Definition 1.17** Es seien  $(M, *)$  und  $(N, \square)$  algebraische Strukturen mit Verknüpfungen  $*$  bzw.  $\square$ . Eine Funktion  $f \in \text{Abb}(M, N)$  heie **Homomorphismus** genau dann, wenn (H) gilt. Ein Homomorphismus  $f : (M, *) \rightarrow (N, \square)$  heie

- **Monomorphismus**  $:\Leftrightarrow f$  ist injektiv,
- **Epimorphismus**  $:\Leftrightarrow f$  ist surjektiv,
- **Isomorphismus**  $:\Leftrightarrow f$  ist bijektiv,
- **Endomorphismus**  $:\Leftrightarrow (M, *) = (N, \square)$ ,
- **Automorphismus**  $:\Leftrightarrow (M, *) = (N, \square)$ , und  $f$  ist bijektiv.

(Tragen  $M$  und  $N$  mehrere Verknüpfungen  $*_i, \square_i, i = 1, 2, \dots, k$ , so muss (H) für jeden einzelnen Index  $i = 1, 2, \dots, k$  gelten.)

**Bemerkung 1.10** (a) Gibt es einen Isomorphismus  $f : M \rightarrow N$  zwischen zwei Algebren  $M$  und  $N$ , so nennt man  $M$  und  $N$  **isomorph**, in Zeichen  $M \cong N$ . Das einfachste Beispiel für einen Isomorphismus ist die identische Abbildung

$$\text{Id}_M : (M, *) \rightarrow (M, *).$$

(b) Die Isomorphiebeziehung  $\cong$  ist eine Äquivalenzrelation auf der Familie aller Algebren  $(M, *)$ .

(c) Aus der Sicht der Algebra wird zwischen isomorphen Algebren nicht unterschieden, da sich diese nur durch die Benennung ihrer Elemente unterscheiden. Von Interesse sind lediglich die algebraischen Operationen auf einer Menge, nicht aber die Art ihrer Elemente. Beherrscht man das Rechnen in der einen Algebra und ist eine Isomorphie auf eine andere Algebra bekannt, so beherrscht man auch das Rechnen in dieser.  $\square$

**BSP. (1.4.10)** Wir betrachten auf einer nichtleeren Menge  $M$  eine Äquivalenzrelation  $R = \{(x, y) \in M \times M : xRy\}$ . Wie wir in Satz 1.3 gesehen haben, induziert  $R$  eine Partition der Menge  $M$  durch das System der Äquivalenzklassen

$$[x]_R := \{y \in M : xRy\}.$$

Ist  $*$  eine Verknüpfung auf  $M$ , so kann  $*$  durch die folgende Vorschrift auf die Quotientenmenge  $M/R := \{[x]_R : x \in M\}$  transportiert werden, sofern  $R$  mit  $*$  strukturverträglich ist, vgl. Definition 1.19:

$$[x]_R * [y]_R := [x * y]_R = \{z \in M : (x * y)Rz\} \quad \forall x, y \in M. \quad (4.2)$$

Die durch die Partition induzierte Abbildung

$$\pi : (M, *) \rightarrow (M/R, *), \quad x \mapsto \pi(x) := [x]_R,$$

ist ein Homomorphismus. Man erkennt sofort, dass wegen (4.2) die Bedingung (H) gilt, nämlich:

$$\pi(x * y) = [x * y]_R = [x]_R * [y]_R = \pi(x) * \pi(y) \quad \forall x, y \in M.$$

**Definition 1.18** Die Abbildung  $\pi : M \rightarrow M/R$  heie die **natürliche Abbildung** oder die **kanonische Projektion** von  $M$  auf  $M/R$ .

**BSP. (1.4.11)** Es sei im vorangegangenen BSP. (1.4.10)  $M := \mathbf{Z}$  gesetzt, und es werde auf  $\mathbf{Z}$  eine Relation  $R$  durch die Vorschrift

$$R := \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : 4|(x - y)\}$$

erklärt.  $xRy$  bedeutet also: 4 teilt  $x - y$ . Wir zeigen, dass  $R$  eine Äquivalenzrelation ist.

- $R$  ist reflexiv: 4 teilt  $x - x = 0$  ist per Definition wahr. Also gilt  $xRx$ .
- $R$  ist symmetrisch: Ist 4 Teiler von  $x - y$ , so auch Teiler von  $y - x = -(x - y)$ . Also folgt aus  $xRy$  stets auch  $yRx$ .
- $R$  ist transitiv: Sei 4 Teiler von  $x - y$  und von  $y - z$ . Wegen  $x - z = (x - y) + (y - z)$  folgt nun  $4|(x - z)$ . Also gilt die Implikation:  $xRy$  und  $yRz \Rightarrow xRz$ .

Die Quotientenmenge

$$\mathbf{Z}/R := \{[x] : x \in \mathbf{Z}\}, \quad [x] := \{y \in \mathbf{Z} : 4|(x - y)\},$$

besteht aus genau vier Elementen, nämlich

$$\begin{aligned} [0] &= \{x \in \mathbf{Z} : 4|x\} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\} = \{4k : k \in \mathbf{Z}\}, \\ [1] &= \{x \in \mathbf{Z} : 4|(x - 1)\} = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\} = \{4k + 1 : k \in \mathbf{Z}\}, \\ [2] &= \{x \in \mathbf{Z} : 4|(x - 2)\} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\} = \{4k + 2 : k \in \mathbf{Z}\}, \\ [3] &= \{x \in \mathbf{Z} : 4|(x - 3)\} = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\} = \{4k + 3 : k \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

Beispielsweise liegen die Zahlen 3 und 15 in derselben Äquivalenzklasse, so dass  $[3] = [15]$  gilt. Allgemeiner hat man für jedes  $x \in \mathbf{Z}$  und jedes  $k \in \mathbf{Z}$ :

$$[x] = [x + 4k] = [x - 4k].$$

Nun sind auf  $\mathbf{Z}$  die zwei algebraischen Operationen  $+$  und  $\cdot$  erklärt. Durch die folgende Vorschrift werden  $+$  und  $\cdot$  auf die Quotientenmenge  $\mathbf{Z}/R$  transportiert. Für alle  $x, y \in \mathbf{Z}$  gelte:

$$\begin{aligned} [x] + [y] &:= [x + y] = [x + y - 4k], & k \in \mathbf{Z}, \\ [x] \cdot [y] &:= [x \cdot y] = [x \cdot y - 4r], & r \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Die möglichen Resultate bestimmt man am besten durch Aufstellen von **Operationstabellen** für die Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$ :

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $+$ | [0] | [1] | [2] | [3] |
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [0] | [1] | [2] |

|         |     |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| $\cdot$ | [0] | [1] | [2] | [3] |
| [0]     | [0] | [0] | [0] | [0] |
| [1]     | [0] | [1] | [2] | [3] |
| [2]     | [0] | [2] | [0] | [2] |
| [3]     | [0] | [3] | [2] | [1] |

Man stellt sehr einfach fest, dass die kanonische Projektion  $\pi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/R$ ,  $x \mapsto \pi(x) := [x]$ , für beide Operationen  $+$  und  $\cdot$  die Bedingung (H) erfüllt, also ein Homomorphismus ist.

Die in dem BSP. (1.4.11) diskutierte Äquivalenzrelation  $R$  hat offenbar die Eigenschaft, dass aus  $xRy$  stets auch  $(x + z)R(y + z)$  sowie  $(x \cdot z)R(y \cdot z)$  für jedes  $z \in \mathbf{Z}$  folgt. Denn ist 4 ein Teiler von  $x - y$ , so ganz offenbar auch ein Teiler von  $(x + z) - (y + z) = x - y$  und von  $x \cdot z - y \cdot z = (x - y) \cdot z$ . Das heißt, die Relation  $R$  ist **strukturverträglich** mit den beiden Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$ . In diesem Sinne definieren wir:

**Definition 1.19** Gegeben sei eine Algebra  $(M, *)$ . Eine Äquivalenzrelation  $R$  auf  $M$  heie

- **Linkskongruenzrelation**  $:\Leftrightarrow$  Für alle  $x, y, z \in M$  gilt

$$xRy \Rightarrow (z * x)R(z * y),$$

- **Rechtskongruenzrelation**  $:\Leftrightarrow$  Für alle  $x, y, z \in M$  gilt

$$xRy \Rightarrow (x * z)R(y * z),$$

- **Kongruenzrelation**  $:\Leftrightarrow R$  ist sowohl Rechts- als auch Linkskongruenzrelation.

(Ist die Verknüpfung  $*$  kommutativ, so entfallen die Spezifikationen Rechts und Links. Die Verallgemeinerung für Kongruenzrelationen auf Algebren mit mehreren Operationen bedeutet, dass  $R$  mit **allen** Operationen auf  $M$  strukturverträglich sein muss.)

Als Äquivalenzrelation induziert jede Kongruenzrelation  $R$  auf der Algebra  $(M, *)$  eine Partition der Menge  $M$ . Der resultierenden Quotientenmenge

$$M/R = \{[x]_R : x \in M\}, \quad [x]_R := \{y \in M : xRy\},$$

wird durch die Vorschrift (4.2) eine algebraische Struktur  $(M/R, *)$  aufgeprägt.

**Definition 1.20** Die Quotientenmenge  $M/R := \{[x]_R : x \in M\}$  nach der Kongruenzrelation  $R$ , gemeinsam mit der durch (4.2) definierten Verknüpfung  $*$  heie **Faktoralgebra**  $(M/R, *)$  der Algebra  $(M, *)$  nach der Kongruenzrelation  $R$ .

**BSP. (1.4.12)** In Verallgemeinerung von BSP. (1.4.11) betrachten wir auf  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  für eine feste Zahl  $n \in \mathbf{N}$  die Kongruenzrelation

$$xR_n y :\Leftrightarrow n|(x - y) \quad (\text{in Worten: } n \text{ teilt } x - y).$$

Die Kongruenzrelation

$$R_n := \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : n|(x - y)\}$$

wird üblicherweise mit  $\equiv_n$  oder einfach nur mit  $\equiv$  bezeichnet. Man setzt

$$x \equiv y \pmod{n} \text{ anstelle von } n|(x - y)$$

und sagt:  $x$  ist kongruent  $y$  modulo  $n$ .

Man prüft ohne Schwierigkeit nach, dass die **Faktoralgebra**  $\mathbf{Z}_n := \mathbf{Z}/\equiv_n$  genau aus  $n$  verschiedenen Äquivalenzklassen besteht, nämlich:

$$\mathbf{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}, \quad [a] := \{x \in \mathbf{Z} : x \equiv a \pmod{n}\}, \quad a = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Definition 1.21** Für  $a \in \mathbf{Z}$  und  $n \in \mathbf{N}$  heiße die Äquivalenzklasse

$$[a] = [a]_n := \{x \in \mathbf{Z} : x \equiv a \pmod{n}\} = \{x \in \mathbf{Z} : n|(a - x)\} = \{a - kn : k \in \mathbf{Z}\}$$

die **Restklasse von  $a$  modulo  $n$** . Denn es gilt  $x \in [a]$  genau dann, wenn  $k \in \mathbf{Z}$  existiert mit  $kn = a - x$  oder  $a = kn + x$ . Das heißt,  $a$  ist durch  $n$  teilbar mit Rest  $x$ .

Addition und Multiplikation von Restklassen sind in der oben erläuterten Weise erklärt:

$$\begin{aligned} [a] + [b] &:= [a + b] = [a + b - r \cdot n], \\ [a] \cdot [b] &:= [a \cdot b] = [a \cdot b - s \cdot n], \end{aligned} \quad \text{mit } a, b \in \mathbf{Z} \text{ und } r, s \in \mathbf{Z}.$$

Zum Beispiel gelten für  $n = 7$  sowie für  $a = 5$  und  $b = -9$ :

$$\begin{aligned} [5] + [-9] &= [-4] = [-4 - (-1) \cdot 7] = [3], \\ [5] \cdot [-9] &= [-45] = [-45 - (-7) \cdot 7] = [4], \end{aligned}$$

und es ist

$$(\mathbf{Z}_7, +, \cdot) = (\{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}, +, \cdot).$$

Wie die Definition 1.21 zeigt, gibt es zu jedem  $a \in \mathbf{Z}$  und zu  $n \in \mathbf{N}$  Zahlen  $k, x \in \mathbf{Z}$  mit  $a = kn + x$ . Die **Divisionsreste**  $x$  bilden dabei gerade die Äquivalenzklasse  $[a]$ . Wir können diesen Sachverhalt in der folgenden Weise präzisieren:

**Satz 1.4** Es seien Zahlen  $a, b \in \mathbf{Z}$  mit  $b \neq 0$  gegeben. Dann gilt

$$\exists! q \in \mathbf{Z} \exists! r \in \{0, 1, \dots, |b| - 1\} : a = bq + r. \quad (4.3)$$

*Begründung* (i) Wir zeigen die Existenz von  $q$  und  $r$ . Sei zunächst  $b > 0$  angenommen. Dann bestimmen wir die Zahl  $q \in \mathbf{Z}$  so, dass gilt:  $q \leq \frac{a}{b} < q+1$ . Wegen  $b > 0$  folgt äquivalent:  $bq \leq a < bq+b$ . Setzen wir  $r := a - bq$ , so haben wir also  $0 \leq r < b$  sowie  $a = bq + r$ , wie behauptet wurde.

Ist hingegen  $b < 0$ , so bestimmen wir nun  $q \in \mathbf{Z}$  so, dass gilt:  $q - 1 < \frac{a}{b} \leq q$ . Wegen  $(-b) = |b| > 0$  gilt nun  $bq \leq a < bq + |b|$ , und somit erfüllt  $r := a - bq$  die geforderten Bedingungen  $0 \leq r < |b|$  sowie  $a = bq + r$ .

(ii) Wir zeigen die Eindeutigkeit von  $q$  und  $r$ . Wären  $q' \in \mathbf{Z}$  und  $r' \in \{0, 1, \dots, |b| - 1\}$  ebenfalls Zahlen, die das Verlangte leisten, so wäre  $bq + r = a = bq' + r'$ , und folglich  $b(q - q') = r' - r$ . Also wäre  $b$  Teiler von  $r' - r$ . Wegen  $|r' - r| < |b|$  kann dies nur für  $r' = r$  gelten, und daraus folgt wegen  $b \neq 0$  auch  $q = q'$ .  $\square$

Aus (4.3) ergibt sich  $b|a$  genau für  $r = 0$ . Ist also  $r = 0$ , so ist  $b$  der **größte gemeinsame Teiler** (ggT) von  $a$  und  $b$ . Ist hingegen  $r > 0$ , so müssen gemeinsame Teiler von  $r$  und  $b$  wegen (4.3) auch Teiler von  $a$  sein. Um solche zu bestimmen, unterscheiden wir wegen  $0 \leq r < |b|$  zwei Fälle gemäß

- $r|b$ , also  $b = rq_1$ . In diesem Fall folgt aus (4.3):  $a = r(qq_1 + 1)$ . Also ist  $r$  ggT von  $a$  und  $b$ . Ferner gilt wegen (4.3)

$$r = a - qb =: x_1a + y_1b \text{ mit } x_1 := 1 \text{ und } y_1 := -q \in \mathbf{Z}.$$

- $r \nmid b$  ( $r$  teilt nicht  $b$ ). In diesem Fall ist erneut Satz 1.4 anwendbar: Es existieren eindeutig Zahlen  $q_1, r_1 \in \mathbf{Z}$  mit

$$b = rq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < r.$$

Auch hier treffen wir eine Fallunterscheidung gemäß  $r_1|r$  bzw.  $r_1 \nmid r$ . Im ersten Fall gilt  $r = r_1q_2$ , und es folgen  $b = r_1(q_1q_2 + 1)$  sowie  $a = r_1(qq_1 + 1)q_2$ . Das heißt,  $r_1$  ist ggT von  $a$  und  $b$  mit der Darstellung

$$r_1 = b - rq_1 = b(x_1a + y_1b)q_1 =: x_2a + y_2b \text{ mit } x_2 := -x_1q_1 \text{ und } y_2 := 1 - y_1q_1.$$

Im zweiten Fall  $r_1 \nmid r$  ist wiederum Satz 1.4 anwendbar: Es existieren eindeutig Zahlen  $q_2, r_2 \in \mathbf{Z}$  mit

$$r = r_1q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1,$$

usf. Da die Divisionsreste  $r, r_1, r_2, \dots \in \mathbf{Z}$  nach absteigender Größe  $|b| > r > r_1 > r_2 > \dots > r_k > 0$  geordnet sind, endet das Verfahren nach endlich vielen Schritten mit einer Zerlegung

$$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k, \quad 0 < r_k < r_{k-1},$$

für die entweder  $r_k|r_{k-1}$ , ( $r_k > 1$ ), oder  $r_k = 1$  gilt. In beiden Fällen existieren Zahlen  $x_k, y_k \in \mathbf{Z}$  mit

$$r_k = x_k a + y_k b.$$

Im erstgenannten Fall ist  $r_k$  ggT von  $a$  und  $b$ . Im zweiten Fall gibt es (außer dem trivialen Teiler 1) keinen ggT von  $a$  und  $b$ , und in diesem Fall heißen  $a$  und  $b$  **teilerfremd**.

**Satz 1.5** *Zwei Zahlen  $a$  und  $b$  sind genau dann teilerfremd, wenn  $x, y \in \mathbf{Z}$  existieren mit  $1 = xa + yb$ .*

*Begründung:* Ganz offensichtlich folgt aus der Darstellung  $1 = xa + yb$ , dass  $a$  und  $b$  teilerfremd sein müssen. Sind andererseits  $a$  und  $b$  als teilerfremd vorausgesetzt, so ergibt sich die Behauptung aus dem oben angeführten Divisionsverfahren.  $\square$

**BSP. (1.4.13)** Wir berechnen den ggT der beiden Zahlen 246 und 384 sowie der Zahlen 161 und 384:

$$\begin{array}{rcl} 384 & = & 246 \cdot 1 + 138 \\ 246 & = & 138 \cdot 1 + 108 \\ 138 & = & 108 \cdot 1 + 30 \\ 108 & = & 30 \cdot 3 + 18 \\ 30 & = & 18 \cdot 1 + 12 \\ 18 & = & 12 \cdot 1 + \boxed{6} \\ 12 & = & 6 \cdot 2 + 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 384 & = & 161 \cdot 2 + 62 \\ 161 & = & 62 \cdot 2 + 37 \\ 62 & = & 37 \cdot 1 + 25 \\ 37 & = & 25 \cdot 1 + 12 \\ 25 & = & 12 \cdot 2 + \boxed{1} \end{array}$$

Der ggT von 246 und 384 ist also 6, während 161 und 384 teilerfremd sind.

**Definition 1.22** *Das oben vorgestellte Divisionsverfahren zur Ermittlung des ggT zweier Zahlen  $a, b \in \mathbf{Z}$  heißt EUKLIDISCHER DIVISIONALGORITHMUS [EUKLID, ca. 300 v. Chr.].*

In den meisten höheren Programmiersprachen kann die Zerlegung (4.3) der beiden Zahlen  $a, b \in \mathbf{Z}$  mit den folgenden Befehlen ausgeführt werden:

$$q := a \operatorname{div} b, \quad r := a \operatorname{mod} b.$$

Die gewünschte Zerlegung (4.3) resultiert dann für  $b \neq 0$  in der Form

$$a = b \cdot (a \operatorname{div} b) + a \operatorname{mod} b.$$

Diese Befehle verwenden wir in dem folgenden numerischen Algorithmus, der für zwei gegebene Zahlen  $a, b \in \mathbf{Z}$  den größten gemeinsamen Teiler  $d \in \mathbf{Z}$  berechnet, und dazu noch zwei Zahlen  $x, y \in \mathbf{Z}$  mit  $d = xa + yb$ . Der Fall  $d = 1$  (Teilerfremdheit) wird ebenfalls mitberücksichtigt.

|     |   |       |
|-----|---|-------|
| 1 : | Eingabe von $a, b \in \mathbf{Z}; d := a; c := b;$          | (4.4) |
| 2 : | $x := 1; y := 0; u := 0; v := 1;$                           |       |
| 3 : | falls $c \neq 0$ dann                                       |       |
| 4 : | wiederhole  |       |
| 5 : | $q := d \operatorname{div} c; r := d \operatorname{mod} c;$ |       |
| 6 : | $w := x - q * u; z := y - q * v;$                           |       |
| 7 : | $d := c; c := r; x := u; u := w; y := v; v := z;$           |       |
| 8 : | bis $(c = 0)$ . (Endedann)                                  |       |

In der folgenden Tabelle haben wir für einige Zahlenpaare  $a, b \in \mathbf{Z}$  den ggT mit Hilfe des EUKLIDISCHEN Teileralgorithmus (4.4) berechnet. Es ist zu beachten, dass der ggT  $d \in \mathbf{Z}$  nur bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt ist: Mit  $d$  ist auch  $-d$  größter gemeinsamer Teiler zweier Zahlen  $a, b \in \mathbf{Z}$ .

| $a$   | $b$   | $d$ | $x$ | $y$  | $xa + yb$ |
|-------|-------|-----|-----|------|-----------|
| 246   | 384   | 6   | 25  | -16  | 6         |
| 161   | 384   | 1   | -31 | 13   | 1         |
| -5687 | 451   | 11  | 18  | 227  | 11        |
| -9358 | -226  | -2  | -27 | 1118 | -2        |
| 55    | -4795 | 5   | 436 | 5    | 5         |
| 0     | 27    | 27  | 0   | 1    | 27        |
| -31   | 0     | -31 | 1   | 0    | -31       |

### 1.4.4 Gruppen, Ringe, Körper

Eine der einfachsten algebraischen Strukturen besteht aus einer nichtleeren Menge  $M$  mit einer einzigen Verknüpfung  $*$ . Eine solche Algebra  $(M, *)$  heie ein **Gruppoid**. Hat die Verknüpfung  $*$  weitere spezielle Eigenschaften, so erhält man Gruppoide, die eigene spezifische Namen tragen. Wir erwähnen hier nur die drei wichtigsten:

**Definition 1.23** Ein Gruppoid  $(M, *)$  heie

- **Halbgruppe** : $\Leftrightarrow$  Die Verknüpfung  $*$  ist **assoziativ**, d.h.

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in M. \tag{G2}$$

- **Gruppe** : $\Leftrightarrow$  Es gelten (G2) und

$$\forall a, b \in M \text{ existieren eindeutig bestimmte Lösungen } x, y \in M \text{ der Gleichungen } a * x = b \text{ und } y * a = b. \quad (\text{G3})$$

- **abelsche Gruppe** [nach N.H. ABEL, 1802–1829] : $\Leftrightarrow$   $(M, *)$  ist Gruppe mit **kommutativer Verknüpfung**  $*$ , d.h. es gelten:

$$x * y = y * x \quad \forall x, y \in M, \quad (\text{G1})$$

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in M, \quad (\text{G2})$$

$$\forall a, b \in M \text{ existiert genau eine Lösung } x \in M \text{ der Gleichung } a * x = b. \quad (\text{G3})$$

**Bemerkung 1.11** (a) In einer Gruppe  $(M, *)$  existiert stets **genau ein** neutrales Element  $e \in M$ .

*Begründung:* Wir setzen in (G3)  $b := a$ . Dann existieren zu jedem  $a \in M$  eindeutig  $e, e' \in M$  mit

$$a * e = a, \quad e' * a = a. \quad (4.5)$$

Wir zeigen,  $e$  und  $e'$  sind unabhängig von  $a$ . Denn sei  $b \in M$  beliebig. Dann existieren wegen (G3)  $x, y \in M$  mit  $a * x = b$  und  $y * a = b$ . Man erhält somit aus (4.5)

$$y * (a * e) = y * a = b, \quad (e' * a) * x = a * x = b.$$

Wegen (G2) können die Klammern anders gesetzt werden, so dass  $b * e = b$  und  $e' * b = b$  folgen. Also sind  $e$  und  $e'$  nicht von  $a$  abhängig. Nun setzen wir in (4.5)  $a := e$ . Dann gilt

$$e * e = e, \quad e' * e = e.$$

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung  $y * e = e$  muss somit  $e = e'$  gelten. Mit anderen Worten, es existiert genau ein  $e \in M$  mit

$$e * a = a = a * e \quad \forall a \in M,$$

und das ist gemäß Definition das neutrale Element. □

(b) In einer Gruppe  $(M, *)$  existiert zu jedem  $a \in M$  **genau ein** Inverses  $a^{-1} \in M$ .

*Begründung:* Wir setzen in (G3)  $b := e$ , worin  $e \in M$  das neutrale Element bezeichne. Dann existieren zu jedem  $a \in M$  eindeutig  $x, y \in M$  mit

$$a * x = e, \quad y * a = e.$$

Hieraus folgt unter Verwendung von (G2)

$$y = y * e = y * (a * x) = (y * a) * x = e * x = x,$$

also  $x = y$ , und somit  $x = a^{-1}$ . □

**BSP. (1.4.14)** (a) Die Algebra  $(\mathbf{N}, +)$  ist eine Halbgruppe, aber keine Gruppe. Offenbar gilt (G2), nicht aber (G3), denn beispielsweise besitzt die Gleichung  $3 + x = 2$  keine Lösung  $x \in \mathbf{N}$ .

(b) Die Algebra  $(M, \cdot)$  mit  $M := \mathbf{N}_0, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$  oder  $\mathbf{R}$  ist eine Halbgruppe, aber keine Gruppe. (G3) gilt nicht, denn beispielsweise besitzt die Gleichung  $0 \cdot x = 2$  keine Lösung  $x \in M$ .

(c) Die Algebra  $(M, +)$  mit  $M := \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$  oder  $\mathbf{R}$  ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist die Zahl 0, und das Inverse von  $a \in M$  ist  $(-a)$ .



(d) Die Algebra  $(M, \cdot)$  mit  $M := \mathbf{Q} \setminus \{0\}$  oder  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist die Zahl 1, und das Inverse von  $a \in M$  ist  $a^{-1} := \frac{1}{a}$ .

(e) Es sei  $\mathbf{Z}_4$  die Faktoralgebra  $\mathbf{Z}/\equiv_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$ , vgl. BSP. (1.4.11). Dann ist  $(\mathbf{Z}_4, +)$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $[0]$ . Das Inverse von  $[a]$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ , ist  $[-a] = [-a - 4k]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Diese Aussagen können sehr leicht an der Operationstafel für  $+$  überprüft werden, s. Seite 18. Ganz analog vergewissert man sich, dass die Algebra  $(\mathbf{Z}_n, +)$  für jedes feste  $n \in \mathbf{N}$  eine abelsche Gruppe mit neutralem Element  $[0]$  bildet. Das Element  $[a]$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ , hat das Inverse  $[-a] = [-a - kn]$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

(f) Die Algebra  $(\mathbf{Z}_n, \cdot)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , ist eine Halbgruppe, und für  $n \geq 2$  keine Gruppe. Da die Verknüpfung  $\cdot$  assoziativ ist, gilt (G2). Hingegen ist (G3) für  $n \geq 2$  nicht erfüllt. Beispielsweise besitzt die Gleichung  $[0] \cdot [x] = [n - 1]$  keine Lösung  $[x] \in \mathbf{Z}_n$ . Andernfalls gäbe es nämlich eine Zahl  $k \in \mathbf{Z}$  mit

$$[0] \cdot [x] = [0 \cdot x] = [0 \cdot x - kn] = [n - 1], \quad \text{also} \quad (k + 1)n = 1.$$

Wegen  $n \geq 2$  ist diese Gleichung für kein  $k \in \mathbf{Z}$  erfüllbar.

**Bemerkung 1.12** Eine abelsche Gruppe  $(M, +)$  mit der Addition  $+$  als Verknüpfung heißt auch **Modul**. □

Neben den Gruppoiden bilden Mengen mit **zwei** Verknüpfungen die nächst einfachen algebraischen Strukturen. Wir bezeichnen diese Verknüpfungen der Einfachheit halber als Addition  $+$  und Multiplikation  $\cdot$ , und wir schreiben  $ab$  anstelle von  $a \cdot b$ .

**Definition 1.24** Eine Algebra  $(M, +, \cdot)$  heie ein **Ring**, wenn gilt:

- $(M, +)$  ist eine abelsche Gruppe (also ein Modul), (R1)

- $(M, \cdot)$  ist ein Gruppoid, (R2)

- die Multiplikation  $\cdot$  ist distributiv bezüglich  $+$ : Für alle  $x, y, z \in M$  gilt

$$x(y + z) = xy + xz, \quad (x + y)z = xz + yz. \quad (\text{D})$$

Das neutrale Element der abelschen Gruppe  $(M, +)$  heie **Nullelement**, bezeichnet mit 0.

Spezielle Eigenschaften des multiplikativen Gruppoids  $(M, \cdot)$  spezifizieren Sonderformen von Ringen, die wir nachfolgend definieren.

**Definition 1.25** Ein Ring  $(M, +, \cdot)$  heie

- **assoziativ**  $:\Leftrightarrow (M, \cdot)$  bildet eine Halbgruppe,

- **assoziativ-kommutativ**  $:\Leftrightarrow (M, \cdot)$  bildet eine Halbgruppe mit kommutativer Multiplikation.

Ein assoziativer Ring, in welchem die Halbgruppe  $(M, \cdot)$  ein neutrales Element (**Einselement**)  $e \in M$  besitzt, heie **assoziativer Ring mit Einselement**.

**BSP. (1.4.15)** (a) Die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbf{Z}$  mit den Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  bildet einen assoziativ-kommutativen Ring  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  mit Einselement, nämlich dem Element  $e = 1$ , und dem Nullelement 0 der Addition. Dieser Ring hat noch folgende spezielle Eigenschaft. Für je zwei Zahlen  $a, b \in \mathbf{Z}$  gilt

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ und/oder } b = 0. \quad (\text{NT})$$

Diese Eigenschaft ist für einen Ring keineswegs selbstverständlich, wie wir an folgendem Beispiel sehen werden.

(b) Wir betrachten die Faktoralgebra  $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot) := (\mathbf{Z}/\equiv_n, +, \cdot)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , vgl. BSP. (1.4.12). Wir haben bereits in BSP. (1.4.14(e) und (f)) festgestellt, dass  $(\mathbf{Z}_n, +)$  eine abelsche Gruppe ist, während  $(\mathbf{Z}_n, \cdot)$  eine Halbgruppe bildet mit kommutativer Multiplikation. Es existiert sogar ein Einselement, nämlich die Äquivalenzklasse  $[1]$ :

$$[1] \cdot [x] = [x] \cdot [1] = [1 \cdot x] = [x] \quad \forall x \in \mathbf{Z}.$$

Das heißt die Faktoralgebra  $(\mathbf{Z}_n, +, \cdot)$  ist ein **assoziativ-kommutativer Ring mit Einselement**.

**Definition 1.26**  $\mathbf{Z}_n$  heißt **Restklassenring von  $\mathbf{Z}$  modulo  $n$** .

Wegen der Existenz eines Einselements in  $\mathbf{Z}_n$  ist es berechtigt zu fragen, ob zu jeder Restklasse  $[a] \in \mathbf{Z}_n$  ein Inverses  $[a]^{-1} \in \mathbf{Z}_n$  existiert. Wir beantworten diese Frage in dem folgenden Satz:

**Satz 1.6** *Es seien  $n \in \mathbf{N}$  und  $a \in \mathbf{Z}$  gegeben. Genau dann besitzt  $[a] \in \mathbf{Z}_n$  bezüglich der Multiplikation ein Inverses  $[a]^{-1} \in \mathbf{Z}_n$ , wenn  $a$  und  $n$  teilerfremd sind.*

*Begründung:* (i) Ist  $[a] \in \mathbf{Z}_n$  invertierbar, so existiert ein  $b \in \mathbf{Z}$  mit  $[a] \cdot [b] = [1]$ , also mit  $ab \equiv 1 \pmod n$  oder äquivalent:  $n \mid (1 - ab)$ . Folglich existiert ein  $k \in \mathbf{Z}$  mit  $kn = 1 - ab$ . Es gilt also  $1 = ab + kn$ , so dass  $a$  und  $n$  gemäß Satz 1.5 teilerfremd sind.

(ii) Sind nun andererseits  $a$  und  $n$  teilerfremd, so existieren nach Satz 1.5 Zahlen  $b, k \in \mathbf{Z}$  mit  $1 = ab + kn$ . Für die Restklasse  $[b] \in \mathbf{Z}_n$  gilt dann  $[a] \cdot [b] = [1]$ , vgl. (i). Also ist  $[b]$  invers zu  $[a]$ .  $\square$

**Bemerkung 1.13** Sind  $a \in \mathbf{Z}$  und  $n \in \mathbf{N}$  teilerfremd, so existiert gemäß Satz 1.6 zu  $[a] \in \mathbf{Z}_n$  ein Inverses  $[a]^{-1} \in \mathbf{Z}_n$  mit  $[a] \cdot [a]^{-1} = [1]$ . Die Berechnung von  $[a]^{-1}$  erfolgt am besten unter Verwendung des EUKLIDISCHEN Divisionsalgorithmus (4.4). Dieser liefert zu jedem Paar  $a, n$  teilerfremder Zahlen zwei Elemente  $x, y \in \mathbf{Z}$  mit  $1 = ax + ny$ . Setzt man  $[a]^{-1} := [x]$ , so gilt wegen  $ax \equiv 1 \pmod n$  die Relation  $[a] \cdot [a]^{-1} = [ax] = [1]$ . Somit ist  $[a]^{-1}$  invers zu  $[a]$ .  $\square$

In  $\mathbf{Z}_n$  ist die Bedingung (NT) i.a. nicht erfüllt. Es gilt zum Beispiel in  $\mathbf{Z}_4$  (vgl. BSP. (1.4.11)):

$$[2] \cdot [2] = [4] = [4 - 1 \cdot 4] = [0],$$

obwohl wir  $[2] \neq [0]$  haben. Ist allgemeiner  $n = j \cdot k$ ,  $1 < j, k < n$ , eine *zusammengesetzte* Zahl, so gilt in  $\mathbf{Z}_n$ :

$$[j] \neq [0], [k] \neq [0], \quad [j] \cdot [k] = [j \cdot k] = [n] = [n - 1 \cdot n] = [0],$$

das heißt, die Bedingung (NT) ist in diesem Fall stets verletzt.

**Definition 1.27** (a) Sei  $(M, +, \cdot)$  ein assoziativer Ring mit Nullelement 0. Gilt für  $a, b \in M \setminus \{0\}$  die Gleichung

$$ab = 0,$$

so heißen  $a, b$  **Nullteiler**, und zwar  $a$  ein **Links-** und  $b$  ein **Rechtsnullteiler**. In kommutativen Ringen entfallen die Spezifikationen Links und Rechts.

(b) Ein assoziativ-kommutativer Ring  $(M, +, \cdot)$  mit Einselement und **ohne Nullteiler** heißt **Integritätsbereich** oder **Integritätsring**.

**BSP. (1.4.16)** (a) Die Algebra  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  ist also ein Integritätsbereich.

(b) Wäre der Restklassenring  $\mathbf{Z}_n$  **nullteilerfrei**, so wäre er ebenfalls ein Integritätsring, wie das

BSP. (1.4.15(b)) lehrt. Wir fragen deshalb nach möglichen Zahlen  $2 \leq n \in \mathbf{N}$ , für die  $\mathbf{Z}_n$  nullteilerfrei ist. Angenommen, es gebe Nullteiler  $[a], [b] \in \mathbf{Z}_n \setminus \{[0]\}$ . Dann gilt für ein  $k \in \mathbf{Z}$

$$[a] \cdot [b] = [ab] = [ab - kn] = [0]. \quad (4.6)$$

Wegen  $0 \notin [a]$  und  $0 \notin [b]$  gelten  $n \nmid a$  ( $n$  teilt nicht  $a$ ) und  $n \nmid b$ . Andererseits hätten wir wegen (4.6) die Gleichung  $ab = kn$ . Da  $n$  kein Teiler von  $a$  oder  $b$  sein kann, folgt zwangsläufig  $k|a$  oder  $k|b$ . Es sei zum Beispiel  $k$  Teiler von  $a$ :  $a = jk$  mit  $0 \neq j \in \mathbf{Z}$ . Dann folgt  $jb = n$  mit  $j \neq n \neq b$  (sonst hätten wir  $n|a$  bzw.  $n|b$ ). Das heißt,  $j \neq 1$  und  $b \neq 1$  müssen Teiler von  $n$  sein:  $n$  ist eine *zusammengesetzte* Zahl.

**Definition 1.28** Eine Zahl  $p \in \mathbf{N}$  heie **Primzahl**, wenn  $p > 1$  gilt und wenn  $p$  nur die trivialen Teiler  $\pm 1$  und  $\pm p$  besitzt.

In der Zusammenfassung haben wir gezeigt:

**Satz 1.7** Der Restklassenring  $\mathbf{Z}_n$  modulo  $n$  ist genau dann nullteilerfrei, wenn  $n$  eine Primzahl ist. Für jede Primzahl  $p \in \mathbf{N}$  ist  $\mathbf{Z}_p$  also ein Integritätsbereich.

In einem Integritätsbereich  $(M, +, \cdot)$  mit *mehr als einem Element* müssen das Nullelement  $0$  und das Einselement  $e \in M$  **voneinander verschieden** sein.

*Begründung:* Sind  $0 \in M$  das Nullelement und  $e \in M$  das Einselement, und wäre  $e = 0$ , so hätten wir

$$ae = a, \quad b + e = b \quad \forall a, b \in M.$$

Hieraus folgte  $ab + ae = ab \quad \forall a, b \in M$ . Für  $b := e$  wären nun  $ab = a$  und  $a + ae = a \quad \forall a \in M$ . Folglich wäre  $ae$  neutral bezüglich  $+$ , und wegen der Eindeutigkeit neutraler Elemente hätten wir  $ae = 0 \quad \forall a \in M$ . Wir erhielten

$$ab = (ae) \cdot (be) = 0 \cdot 0 = 0 \cdot e = 0 \quad \forall a, b \in M.$$

Das heißt, jedes Element  $a \in M$  wäre Nullteiler, im Widerspruch zur Definition eines Integritätsbereichs. □

Sei nun ein assoziativer Ring  $(M, +, \cdot)$  mit dem Nullelement  $0$  gegeben. Bildet das Gruppoid  $(M \setminus \{0\}, \cdot)$  sogar eine abelsche Gruppe, so ist der Ring  $(M, +, \cdot)$  assoziativ-kommutativ, und es existiert ein Einselement. Wir behaupten, dass Nullteiler **nicht** existieren.

*Begründung:* Aus (G3) erhalten wir nämlich

$$\forall a, b \in M \setminus \{0\} \quad \exists! x \in M \setminus \{0\} : ax = b.$$

Wäre  $a$  ein Nullteiler, so wäre  $ay = 0$ , und es folgte

$$a(y + x) = ay + ax = 0 + b = b.$$

Das heißt, auch  $y + x$  wäre eine Lösung der Gleichung  $ax = b$ , im Widerspruch zur Eindeutigkeitsaussage in (G3). □

Wir haben mit anderen Worten einen Integritätsring vorliegen. Dieser trägt einen besonderen Namen:

**Definition 1.29** Ein assoziativer Ring  $(M, +, \cdot)$  mit *mehr als einem Element* heie ein **Körper**, wenn  $(M \setminus \{0\}, \cdot)$  eine abelsche Gruppe ist.

Zusammenfassend können wir einen Körper in der folgenden Weise charakterisieren.

**Satz 1.8** Eine Algebra  $(\mathbf{K}, +, \cdot)$  mit mehr als einem Element ist genau dann ein Körper, wenn das folgende Axiomensystem gilt.

**Axiome der Addition in  $\mathbf{K}$ :**

$\forall a, b \in \mathbf{K}$  gibt es genau ein Element  $a + b \in \mathbf{K}$ , genannt die *Summe von  $a$  und  $b$* .  
Die Verknüpfung " + " erfüllt  $\forall a, b, c \in \mathbf{K}$ :

$$(A1) \quad a + b = b + a, \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A2) \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$(A3) \quad \exists \text{ genau ein } x \in \mathbf{K} \text{ mit } a + x = b.$$

Es bezeichne  $0 \in \mathbf{K}$  das *neutrale Element* bezüglich " + ".

**Axiome der Multiplikation in  $\mathbf{K}$ :**

$\forall a, b \in \mathbf{K}$  gibt es genau ein Element  $a \cdot b \in \mathbf{K}$ , genannt das *Produkt von  $a$  und  $b$* .  
Die Verknüpfung "  $\cdot$  " erfüllt  $\forall a, b, c \in \mathbf{K}$ :

$$(M1) \quad a \cdot b = b \cdot a, \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(M2) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$(M3) \quad \forall 0 \neq a \in \mathbf{K} \exists \text{ genau ein } x \in \mathbf{K} \text{ mit } a \cdot x = b.$$

**Regelung zwischen " + " und "  $\cdot$  ":**

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (\text{Distributivgesetz})$$

**Bemerkung 1.14** In einem Körper  $(\mathbf{K}, +, \cdot)$  existieren also stets eindeutig bestimmte neutrale Elemente "0" der Addition + und "1" der Multiplikation  $\cdot$ . Es gilt

$$0 \neq 1.$$

Darüber hinaus existiert zu jedem  $a \in \mathbf{K}$  ein eindeutig bestimmtes Inverses der Addition +, bezeichnet mit  $(-a)$ :  $a + (-a) = 0$ , und zu jedem  $0 \neq a \in \mathbf{K}$  ein eindeutig bestimmtes Inverses der Multiplikation  $\cdot$ , bezeichnet mit  $a^{-1}$ :  $a \cdot a^{-1} = 1$ .  $\square$

**BSP. (1.4.17)** (a) Die Algebra  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$  ist ein Körper.  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  ist kein Körper, da (M3) nicht gilt.

(b) Es sei  $p$  eine **Primzahl**. Dann ist der Restklassenring  $\mathbf{Z}_p$  von  $\mathbf{Z}$  modulo  $p$  gemäß Satz 1.7 ein Integritätsbereich. Wir zeigen, dass das Gruppoid  $(\mathbf{Z}_p \setminus \{[0]\}, \cdot)$  alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe hat, so dass  $\mathbf{Z}_p$  sogar ein (endlicher) Körper ist.

Offenbar gelten in  $(\mathbf{Z}_p \setminus \{[0]\}, \cdot)$  bereits die beiden Axiome (M1) und (M2). Zum Beweis von (M3) seien  $[a] \in \mathbf{Z}_p \setminus \{[0]\}$  und  $[b] \in \mathbf{Z}_p$  vorgegeben. Da  $p \in [0]$  prim ist, und da  $[0] \cap [a] = \emptyset$  gilt, sind  $a$  und  $p$  teilerfremd. Gemäß Satz 1.6 existiert deshalb ein Inverses  $[a]^{-1} \in \mathbf{Z}_p$  mit  $[a] \cdot [a]^{-1} = [1]$ . Setzen wir  $[x] := [a]^{-1} \cdot [b] \in \mathbf{Z}_p$ , so folgt nun unter Verwendung von (M2)

$$[a] \cdot [x] = [a] \cdot ([a]^{-1} \cdot [b]) = ([a] \cdot [a]^{-1}) \cdot [b] = [1] \cdot [b] = [b].$$

Das heißt, die Gleichung  $[a] \cdot [x] = [b]$  hat stets eine Lösung  $[x] \in \mathbf{Z}_p$ . Wäre  $[x'] \in \mathbf{Z}_p$  eine weitere Lösung, so wäre

$$[a] \cdot ([x] + [-x']) = [a] \cdot [x - x'] = [b] + [-b] = [0].$$

Da  $\mathbf{Z}_p$  wegen Satz 1.7 nullteilerfrei ist, muss notwendig  $[x - x'] = [0]$  gelten. Somit ist  $[x] = [x']$ , und es gilt (M3). Ist  $n$  keine Primzahl,  $n = j \cdot k$ ,  $1 < j, k < n$ , und hätte die Gleichung  $[j] \cdot [x] = [b] \in \mathbf{Z}_n$  eine Lösung  $[x] \in \mathbf{Z}_n$ , so wäre  $[x'] := [x] + [k] \neq [x]$  ebenfalls Lösung:

$$[j] \cdot [x'] = [j] \cdot [x] + [j \cdot k] = [j] \cdot [x] + [0] = [j] \cdot [x] = [b].$$

In diesem Fall ist (M3) verletzt. Somit haben wir:

**Satz 1.9** *Der Restklassenring  $\mathbf{Z}_n$  von  $\mathbf{Z}$  modulo  $n$  ist genau dann ein Körper, wenn  $n$  eine Primzahl ist. Für  $p$  prim bezeichnen wir den Körper  $\mathbf{Z}_p$  mit  $\mathbf{F}_p$  und nennen ihn den **Restklassenkörper von  $\mathbf{Z}$  modulo  $p$** .*

---

## 1.5 Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

Am Anfang der in Abschnitt 1.3 vorgenommenen Zahlbereichserweiterungen stand als Grundmenge die Menge  $\mathbf{N}$  der natürlichen Zahlen. Was sind natürliche Zahlen? Diese Frage kann nach heutiger Meinung nicht sinnvoll gestellt werden. Natürliche Zahlen sind existent! Hingegen ist die Frage nach einem *Axiomensystem* für die natürlichen Zahlen durchaus sinnvoll. Von dem italienischen Mathematiker G. PEANO (1858–1932) stammt folgendes System von fünf Axiomen, aus dem durch logischen Schluss der gesamte Aussagenbestand der Theorie natürlicher Zahlen gefolgert werden kann.

- (P1) 1 ist eine natürliche Zahl.
- (P2) Jeder natürlichen Zahl  $n$  ist genau eine natürliche Zahl  $n'$  zugeordnet, die der **Nachfolger** von  $n$  heißt.
- (P3) 1 ist kein Nachfolger.
- (P4)  $n, m \in \mathbf{N}$  und  $n \neq m$  implizieren  $n' \neq m'$ .
- (P5) Eine Eigenschaft  $A(n)$ , die für  $n = 1$  gilt und die für beliebiges  $n$  die Implikation  $A(n) \Rightarrow A(n')$  zulässt, gilt für alle natürlichen Zahlen  $n$ .

Es ist üblich, den Nachfolger  $n'$  der natürlichen Zahl  $n$  mit  $n + 1$  zu bezeichnen, in Konsistenz mit der algebraischen Operation " + " auf  $\mathbf{N}$ . Für unsere Zwecke von wesentlichem Belang ist das Axiom (P5), aus dem sich das **Prinzip der vollständigen Induktion** ableitet.

### Satz 1.10 (Vollständige Induktion)

*Es sei  $A(n)$  eine Eigenschaft, die von natürlichen Zahlen  $n \in \mathbf{N}$  abhängt, und es gelte:*

- (a) **Induktionsverankerung:**  $A(1)$  ist wahr.
- (b) **Vererbung oder Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ :** Falls  $A(n)$  für beliebiges  $n \in \mathbf{N}$  wahr ist, so ist auch  $A(n + 1)$  wahr.

*Dann ist  $A(n)$  ist für alle  $n \in \mathbf{N}$  wahr.*

**Bemerkung 1.15** Die Induktionsverankerung muss nicht zwangsläufig bei  $n = 1$  gesetzt werden. Sie kann auch bei beliebigem  $n = n_0 \in \mathbf{N}_0$  beginnen. Die Behauptung des obigen Satzes gilt dann für alle  $n \geq n_0$ . □

**BSP. (1.5.1)** Die Beobachtung über die **Summe der ungeraden Zahlen**

$$1 = 1, \quad 1 + 3 = 4, \quad 1 + 3 + 5 = 9, \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16, \dots,$$

legt die folgende Vermutung nahe:

$A(n)$ :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Wir beweisen  $A(n)$  durch vollständige Induktion.

- *Verankerung:*  $n = 1$  :  $1 = 1^2 \Rightarrow A(1)$  ist richtig.
- *Vererbung:* Gelte  $A(n)$ . Zeige  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$  für alle  $n \in \mathbf{N}$ .

$$A(n + 1) : \quad \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{A(n): n^2} + [(2(n + 1) - 1)] = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

- *Folgerung:*  $A(n)$  gilt für alle  $n \in \mathbf{N}$ .

**BSP. (1.5.2)** Rekursive Definition mit dem Prinzip der vollständigen Induktion:

(I) **Summendefinition.** Gegeben seien Zahlen  $m, n \in \mathbf{Z}$  mit  $m \leq n$ . Wir definieren rekursiv

$$\sum_{k=m}^m a_k := a_m \quad (\text{Verankerung}),$$
$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k := \sum_{k=m}^n a_k + a_{n+1} \quad (\text{Vererbung}).$$

Aus Satz 1.10 folgt dann:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

**Bemerkung 1.16** (a) Vereinbarungsgemäß setzt man stets

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0 \quad \text{für } m > n.$$

(b) Die Variable  $k \in \mathbf{Z}$  heißt der **Summationsindex**. Man kann ein beliebiges Symbol als Summationsindex verwenden, ohne den Summenwert zu verändern.

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{j=m}^n a_j \stackrel{k:=j-m}{=} \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m}, \quad \text{usw.}$$

Wir geben nachfolgend einige *Beispiele*:

$$\sum_{k=0}^n a^k = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n \quad \text{für festes } a \in \mathbf{R} \text{ und } n \geq 0,$$
$$\sum_{j=1}^n j^2 = \sum_{j=0}^n j^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2,$$
$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m}^k a_j + \sum_{j=k+1}^n a_j \quad \text{für } k = m, m + 1, \dots, n,$$
$$\sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} = n,$$
$$\sum_{k=m}^n a = \begin{cases} 0 & : m > n, \\ a(n + 1 - m) & : m \leq n \text{ und } a \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

(II) **Produktdefinition.** Gegeben seien Zahlen  $m, n \in \mathbf{Z}$  mit  $m \leq n$ . Wir definieren rekursiv

$$\prod_{k=m}^m a_k := a_m \quad (\text{Verankerung}),$$

$$\prod_{k=m}^{n+1} a_k := \left( \prod_{k=m}^n a_k \right) a_{n+1} \quad (\text{Vererbung}).$$

Aus Satz 1.10 folgt dann:

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Vereinbarungsgemäß setzt man stets

$$\prod_{k=m}^n a_k := 1 \quad \text{für } m > n.$$

Als ein wichtiges *Beispiel* nennen wir hier:

$$\prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n =: n! \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{sprich: } n\text{-Fakultät.}$$

| $n$ | $n!$                | STIRLING: $n! \approx$          |
|-----|---------------------|---------------------------------|
| 1   | 1                   | 9.98981759637E <sup>-0001</sup> |
| 2   | 2                   | 1.99896286613E <sup>+0000</sup> |
| 3   | 6                   | 5.99832652444E <sup>+0000</sup> |
| 4   | 24                  | 2.39958871148E <sup>+0001</sup> |
| 5   | 120                 | 1.19986154090E <sup>+0002</sup> |
| 6   | 720                 | 7.19940381651E <sup>+0002</sup> |
| 7   | 5040                | 5.03968625818E <sup>+0003</sup> |
| 8   | 40320               | 4.03180454053E <sup>+0004</sup> |
| 9   | 362880              | 3.62865917961E <sup>+0005</sup> |
| 10  | 3628800             | 3.62868474890E <sup>+0006</sup> |
| 11  | 39916800            | 3.99157434222E <sup>+0007</sup> |
| 12  | 479001600           | 4.78990871796E <sup>+0008</sup> |
| 13  | 6227020800          | 6.22690126670E <sup>+0009</sup> |
| 14  | 87178291200         | 8.71768410367E <sup>+0010</sup> |
| 15  | 1307674368000       | 1.30765533732E <sup>+0012</sup> |
| 16  | 20922789888000      | 2.09225212611E <sup>+0013</sup> |
| 17  | 355687428096000     | 3.55683369493E <sup>+0014</sup> |
| 18  | 6402373705728000    | 6.40230835132E <sup>+0015</sup> |
| 19  | 121645100408832000  | 1.21643983025E <sup>+0017</sup> |
| 20  | 2432902008176640000 | 2.43288179196E <sup>+0018</sup> |

In der Spalte "STIRLING" ist eine Näherungsformel für  $n!$  angegeben, die für Werte  $n \gg 1$  eine sehr gute Approximation liefert. Dies ist die STIRLINGSche Formel ( $e$  ist die EULERSche Zahl, vgl. Abschnitt 2.3):

$$n! \approx \left( \frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad n \gg 1.$$

**Bemerkung 1.17** (a) Es gilt die folgende **Funktionalgleichung** der Fakultät

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Für  $n = 1$  hat man  $1! = 1 \cdot 0!$ , und hieraus gewinnt man vereinbarungsgemäß

$$0! := 1.$$

(b) Häufig setzt man für das Produkt der *ungeraden* Zahlen

$$\prod_{k=0}^n (2k+1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) =: (2n+1)!! \quad (\text{sprich: } (2n+1)\text{-Semifakultät.})$$

Es gilt

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

(c) Die Fakultäten wachsen mit  $n$  rasch an, wie die obige Tabelle zeigt. □

## 1.6 $\mathbf{R}$ als geordneter Körper

Hier soll nicht ein langwieriger genetischer Weg nachvollzogen werden, auf dem die reellen Zahlen aus dem PEANOSCHEN Axiomensystem der natürlichen Zahlen abgeleitet werden. Einem Vorschlag D. HILBERTS (1862–1943) folgend, wollen wir vielmehr für die reellen Zahlen selbst ein Axiomensystem aufstellen, welches uneingeschränkte Anwendung der vier arithmetischen Grundoperationen erlaubt. Es ist sicher sinnvoll, dem Beispiel des Körpers  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$  folgend, die Axiomatik in der Algebra  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  so festzulegen, dass  $\mathbf{R}$  selbst ein **Körper** wird. Dazu haben wir gemäß Satz 1.8 das folgende Axiomensystem auf  $\mathbf{R}$  einzuführen:

### Axiome der Addition in $\mathbf{R}$ :

$\forall a, b \in \mathbf{R}$  gibt es genau eine Zahl  $a + b \in \mathbf{R}$ , genannt die *Summe von  $a$  und  $b$* . Die Verknüpfung „+“ erfüllt  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$ :

$$(A1) \quad a + b = b + a, \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(A2) \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$(A3) \quad \exists \text{ genau ein } x \in \mathbf{R} \text{ mit } a + x = b.$$

### Axiome der Multiplikation in $\mathbf{R}$ :

$\forall a, b \in \mathbf{R}$  gibt es genau eine Zahl  $a \cdot b \in \mathbf{R}$ , genannt das *Produkt von  $a$  und  $b$* . Die Verknüpfung „ $\cdot$ “ erfüllt  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$ :

$$(M1) \quad a \cdot b = b \cdot a, \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

$$(M2) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

$$(M3) \quad \forall 0 \neq a \in \mathbf{R} \exists \text{ genau ein } x \in \mathbf{R} \text{ mit } a \cdot x = b.$$

### Regelung zwischen „+“ und „ $\cdot$ “:

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (\text{Distributivgesetz})$$

**Bemerkung 1.18** (a) Wie wir bereits in Bemerkung 1.14 festgestellt haben, folgen aus diesem Axiomensystem:



- $\exists!$  ein **neutrales Element der Addition**  $+$ , nämlich die reelle Zahl 0 ('Null') mit  $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbf{R}$ .
- $\exists!$  ein **neutrales Element der Multiplikation**  $\cdot$ , nämlich die reelle Zahl 1 ('Eins') mit  $1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbf{R}$ .
- $\forall a \in \mathbf{R} \exists!$  ein Inverses bezüglich  $+$ , nämlich die Zahl  $(-a) \in \mathbf{R}$  mit  $a + (-a) = 0$ .
- $\forall 0 \neq a \in \mathbf{R} \exists!$  ein Inverses bezüglich  $\cdot$ , nämlich die Zahl  $a^{-1} \in \mathbf{R}$  mit  $a \cdot a^{-1} = 1$ .

(b) Man verwendet nun in bekannter Weise die Abkürzungen

$$-a := (-a), \quad \frac{1}{a} := a^{-1}, \quad a - b := a + (-b), \quad \frac{b}{a} := b \cdot \frac{1}{a}, \quad ab := a \cdot b, \quad a + b + c := (a + b) + c,$$

usw. □

Aus dem Axiomensystem des Körpers  $\mathbf{R}$  können jetzt die zahlreichen Rechengesetze der Arithmetik abgeleitet werden, deren Großteil zum kanonischen Schulstoff gehören. Besonders erwähnt werden soll, dass  $\mathbf{R}$  ja nullteilerfrei ist. Demzufolge gelten:

|      |  |                        |
|------|--|------------------------|
| (i)  | $ab = ac$ und $a \neq 0 \Rightarrow b = c.$      | <b>(Kürzungsregel)</b> |
| (ii) | $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ und/oder $b = 0.$ |                        |

**Merke:** In (i) auf die Bedingung  $a \neq 0$  achten! Das folgende Beispiel sollte lehrreich sein. Gegeben seien  $a, b \in \mathbf{R}$ , und es werde  $c := a - b$  gesetzt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & b + c = a \quad | \cdot (a - b) \\ \Rightarrow & ab + ac - bb - bc = aa - ab \quad \Rightarrow \quad ab - bb - bc = aa - ab - ac \\ \Rightarrow & b(a - b - c) = a(a - b - c) \quad | : (a - b - c) \\ \Rightarrow & b = a \end{aligned}$$

für je zwei beliebige Zahlen. Was wurde falsch gemacht?

Die Regel (ii) verwendet man häufig zur Lösung von **Gleichungen**, z.B.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ oder } x = 3.$$

Die Regeln

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n, \quad \prod_{k=m}^n a_k = a_m a_{m+1} \cdots a_n$$

können als **verallgemeinerte Assoziativgesetze** der Addition bzw. der Multiplikation angesehen werden. Ebenso hat man ein **verallgemeinertes Distributivgesetz**

$$\left( \sum_{k=1}^r a_k \right) \left( \sum_{j=1}^s b_j \right) = \sum_{k=1}^r \left( \sum_{j=1}^s a_k b_j \right) = \sum_{j=1}^s \left( \sum_{k=1}^r a_k b_j \right) =: \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s a_k b_j.$$

(Manchmal schreibt man Doppelsummen in der Kurzform  $\sum_{j,k=1}^n := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n$ .)

**BSP. (1.6.1) Potenzen.**

$$\prod_{k=1}^n a = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} =: a^n \quad \forall a \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Mit den Erweiterungen

$$a^0 := 1 \quad \forall a \in \mathbf{R}, \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad \forall 0 \neq a \in \mathbf{R}$$

gelten die folgenden Rechenregeln für beliebige Potenzen  $m, n \in \mathbf{Z}$ :

$$(i) \ a^n a^m = a^{n+m}, \quad (ii) \ a^m b^m = (ab)^m, \quad (iii) \ (a^m)^n = a^{mn}.$$

**BSP. (1.6.2)** Der sechsjährige C.F. GAUSS verblüffte seinen Lehrer mit der folgenden Rechnung:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Warum GAUSS recht hatte, ergibt sich aus folgender Überlegung, die für jedes  $n \in \mathbf{N}$  gilt:

$$S := \sum_{j=1}^n j \stackrel{k:=n+1-j}{=} \sum_{k=1}^n (n+1-k) = (n+1) \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n k = n(n+1) - S.$$

Auflösen nach  $S$  ergibt:

$$S = \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**BSP. (1.6.3) Geometrische Summenformel.** Seien  $q \in \mathbf{R}$  und  $n \in \mathbf{N}_0$  fest gewählt.

$$S := \sum_{j=0}^n q^j = 1 + q \sum_{j=1}^n q^{j-1} \stackrel{k:=j-1}{=} 1 + q \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q \left( \sum_{k=0}^n q^k - q^n \right) = 1 + qS - q^{n+1}.$$

Auflösen nach  $S$  liefert

$$S = \sum_{j=0}^n q^j = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & : q \neq 1, \\ (n+1) & : q = 1. \end{cases}$$

Die obige Beziehung nennt man **geometrische Summenformel**. Wir vermerken hier zum späteren Gebrauch, dass die Formel auch für beliebige komplexe Zahlen  $q$  gilt.

Ausser den arithmetischen Operationen  $+$  und  $\cdot$  ist auf  $\mathbf{R}$  eine **Ordnungsrelation**

$$a \leq b \quad (\text{sprich: } a \text{ kleiner gleich } b) \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \text{ oder } a = b$$

erklärt, vgl. Definition 1.8. Man überprüft ohne Schwierigkeit den folgenden Sachverhalt:

**Satz 1.11** Die Körper  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$  und  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ , versehen mit der Ordnungsrelation  $\leq$ , sind vollständig geordnet.

Manchmal ist es sinnvoll, den Gleichheitsfall = auszuschließen und anstelle von  $\leq$  die "schärfere" Relation

$$a < b \text{ sprich: } a \text{ kleiner } b \quad (\Leftrightarrow b > a \quad (b \text{ größer } a))$$

zu betrachten. Für diese gilt nicht mehr das Axiom der Reflexivität. Ansonsten haben wir jedoch:

**Axiome der Ordnung  $<$  in  $\mathbf{R}$ :**

" $<$ " ist eine Relation auf der Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- (O1) Für  $a, b \in \mathbf{R}$  gilt genau eine der drei Möglichkeiten  
 $a < b, \quad a = b, \quad b < a,$  (Trichotomiegesetz)
- (O2)  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c,$  (Transitivität)
- (O3)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbf{R},$  (Monotonie der Addition)
- (O4)  $a < b$  und  $0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$  (Monotonie der Multiplikation)

**Beachte:** In (O4) ist die Forderung  $0 < c$  ganz wesentlich. Für  $c \leq 0$  ist die Schlussfolgerung falsch, zum Beispiel  $2 \cdot (-1) \not< 6 \cdot (-1).$

Die Ordnungsrelation  $\leq$  auf  $\mathbf{R}$  macht folgende Bezeichnungen sinnvoll:

$$a \in \mathbf{R} \text{ hei\ss e } \begin{cases} \text{positiv} & :\Leftrightarrow a > 0, \\ \text{negativ} & :\Leftrightarrow a < 0. \end{cases}$$

Als Folgerung aus der Ordnungsrelation  $\leq$  und den Axiomen (O1)–(O4) erhält man alle Rechenregeln für Ungleichungen, die wir nachfolgend auflisten. Die meisten sind intuitiv klar, eine Beweisführung jedoch mühsam. Es wird hier auf Beweise verzichtet.

**Rechenregeln der Ordnungsrelation.** Für  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  gilt:

- (1)  $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b < 0);$
- (2)  $a > 0 \text{ und } b > 0 \Rightarrow a + b > 0, \quad a > 0 \Leftrightarrow -a < 0;$
- (3)  $a \leq b \text{ und } b \leq a \Leftrightarrow a = b;$
- (4)  $a \neq 0 \Leftrightarrow a^2 > 0;$
- (5)  $a < b \text{ und } c \leq d \Rightarrow a + c < b + d \text{ und } a - d < b - c;$
- (6)  $0 \leq a < b \text{ und } 0 \leq c < d \Rightarrow 0 \leq ac < bd;$
- (7)  $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a};$  **Vorsicht** bei Kehrwerten!
- (8)  $b < a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0;$  **Vorsicht** bei Kehrwerten!
- (9)  $a < b \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a + b) < b;$
- (10)  $0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq a^n < b^n \quad \forall n \in \mathbf{N};$
- (11)  $a < b + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \Rightarrow a \leq b.$  Beachte das Gleichheitszeichen!

Ein in der Analysis wiederholt auftretendes Problem ist der Nachweis von Ungleichungen  $A \leq B$ , worin  $A$  und  $B$  reellwertige arithmetische Ausdrücke sind. Zwei Verfahren sind gebräuchlich:

(I) **Umformungsverfahren.**

$$A \leq B \Leftrightarrow A_1 \leq B_1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_n \leq B_n,$$

wobei die letzte Relation wahr ist.

(II) **Abschätzverfahren.**

$$A \leq A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq B,$$

wobei jeder Teilschritt mit einfachen Mitteln einsichtig gemacht werden kann. Häufig wird auch das Prinzip der vollständigen Induktion in diesem Zusammenhang verwendet. In der Regel benötigt man viel Erfahrung zum Auffinden des richtigen Abschätzverfahrens. Im folgenden Satz sind einige wichtige Ungleichungen zusammengefasst, an denen wir verschiedene Beweisverfahren demonstrieren können.

**Satz 1.12** *Es gelten die folgenden elementaren Ungleichungen.*

(i)  $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2 \quad \forall a, b \in \mathbf{R} \quad \forall \epsilon > 0.$

(ii)  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \quad \forall a, b \in \mathbf{R}.$

(iii)  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \forall a, b \in \mathbf{R} \quad \left( \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \forall a \geq 0, b \geq 0. \right)$

(iv)  $n < a^n \quad \forall a \geq 2 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$

(v)  $1 + na \leq (1+a)^n \quad \forall a \geq -1 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$  (BERNOULLI-Ungleichung)

*Begründungen:* (i) Für  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  folgt aus  $0 \leq (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$  die Ungleichung  $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ . Für beliebiges  $\epsilon > 0$  erschließt man:

$$2 \underbrace{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon}}\right)}_{=:a} \underbrace{(\sqrt{\epsilon}\beta)}_{=:b} \leq \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow 2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2.$$

(ii) Mit  $\epsilon := 1$  in (i) folgt  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ .

(iii) Wir schließen nach den Umformungsverfahren:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

und die letzte Relation ist wahr.

(iv) Wir beweisen mit vollständiger Induktion die Aussage  $A(n) : n < a^n$ .

- *Verankerung:*  $1 < a$  ist wahr für alle  $a \geq 2$ , also gilt  $A(1)$ .
- *Vererbung:* Wir zeigen die Implikation  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ .

$$A(n+1) : \quad a^{n+1} = a \cdot a^n \stackrel{A(n)}{>} a \cdot n \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

(v) Wir beweisen ebenfalls mit vollständiger Induktion die Aussage  $A(n) : 1 + na \leq (1 + a)^n$ .

- *Verankerung:*  $1 + 1 \cdot a = 1 + a = (1 + a)^1$  ist wahr, also gilt  $A(1)$ .
- *Vererbung:* Zum Beweis der Implikation  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$  verwenden wir  $a^2 \geq 0 \Rightarrow na^2 \geq 0$ .

$$A(n + 1) : \quad (1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) \stackrel{A(n)}{\geq} (1 + na)(1 + a) \geq 1 + (n + 1)a.$$

Hiermit ist alles gezeigt. □

Eine Verallgemeinerung der Ungleichung (ii) zeigen wir in dem folgenden

**Satz 1.13 (CAUCHY-SCHWARZSCHE UNGLEICHUNG)**

Gegeben seien  $n \in \mathbf{N}$  und beliebige reelle Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sowie  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Dann gilt:

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

*Begründung:* Wir setzen zur Abkürzung

$$A := \sum_{k=1}^n a_k^2 \geq 0, \quad B := \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0, \quad C := \sum_{k=1}^n a_k b_k \in \mathbf{R}.$$

Um die behauptete Ungleichung  $C^2 \leq AB$  zu zeigen, verwenden wir die für alle  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  gültige Identität

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k)^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B + 2\lambda\mu C.$$

Da über  $\lambda, \mu$  frei verfügt werden darf, wählen wir  $\lambda := \sqrt{B}$  und  $\mu := \epsilon\sqrt{A}$  mit  $\epsilon := \pm 1$  so, dass  $\epsilon C \leq 0$  gilt. Dann folgt

$$0 \leq 2AB + 2\epsilon C\sqrt{AB} = 2\sqrt{AB}(\sqrt{AB} + \epsilon C).$$

Im Falle  $AB > 0$  resultiert  $0 \leq \sqrt{AB} + \epsilon C$ , oder äquivalent  $-\epsilon C \leq \sqrt{AB}$ . Durch Quadrieren erhält man die behauptete Ungleichung. In den Fällen  $A = 0$  oder  $B = 0$  ist stets auch  $C = 0$ . □

**Bemerkung 1.19** Der Spezialfall  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$  führt auf die Ungleichung

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Für  $n = 2$  findet man hier die Aussage (ii), Satz 1.12, wieder. □

**BSP. (1.6.4)** Zu gegebenen Zahlen  $a_k := \sqrt{k^2 + 2} - \sqrt{k^2 + 1}$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , bestimme man ein  $N \in \mathbf{N}$  so, dass die Abschätzung  $0 < a_k < \epsilon := 10^{-6} \forall k \geq N$  gilt. Zur Lösung dieser Aufgabe verwenden wir den folgenden einfachen

**Trick:** Da  $a_k = \alpha_k - \beta_k$  mit Wurzelausdrücken  $\alpha_k, \beta_k$  gilt, sollte man stets eine Erweiterung mit  $\alpha_k + \beta_k$  vornehmen!

$$\alpha_k - \beta_k = \frac{(\alpha_k - \beta_k)(\alpha_k + \beta_k)}{\alpha_k + \beta_k} = \frac{\alpha_k^2 - \beta_k^2}{\alpha_k + \beta_k}, \quad \text{Wurzeln im Zähler verschwinden!}$$

Für das Beispiel folgt

$$a_k = \frac{k^2 + 2 - k^2 - 1}{\sqrt{k^2 + 2} + \sqrt{k^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^2} + \sqrt{k^2}} = \frac{1}{2k} \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Also muss die Bedingung  $a_N \leq \frac{1}{2N} < \epsilon = 10^{-6}$  erfüllt sein, und diese gilt sicher für  $N > \frac{1}{2\epsilon} = 0.5 \cdot 10^6$ , das heißt für  $\boxed{N := 500\,001}$ .

**BSP. (1.6.5)** Zu gegebenen Zahlen  $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$  zeige man

$$a_{n-1} \leq a_n \quad \forall n \geq 2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Die Lösung finden wir mit einem ähnlichen Trick wie im vorstehenden Beispiel und durch Anwendung der BERNOULLI-Ungleichung.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \stackrel{\text{BERN.}}{\geq} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}. \end{aligned}$$

## 1.7 Intervalle, Betrag, Signum

Mit der Ordnungsrelation  $\leq$  auf dem Körper  $\mathbf{R}$  lassen sich einige weitere Begriffe einführen.

### Definition 1.30 (Intervalle)

Es seien reelle Zahlen  $a, b \in \mathbf{R}$  gegeben mit  $a \leq b$ . Dann heißen die Teilmengen von  $\mathbf{R}$

|  |   |
|--|---|
| $[a, b] := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$ | <b>abgeschlossenes Intervall,</b>                   |
| $(a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$       | <b>offenes Intervall,</b>                           |
| $[a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$    | <i>(rechtsseitig)</i> <b>halboffenes Intervall,</b> |
| $(a, b] := \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$    | <i>(linksseitig)</i> <b>halboffenes Intervall.</b>  |

Zum Beispiel:

$$-1 \in [-1, 3), \quad 3 \notin [-1, 3), \quad (a, a) = \emptyset, \quad [a, a] = \{a\}.$$

**Bemerkung 1.20** (a) **Offene** Intervalle haben weder ein kleinstes noch ein größtes Element.

(b) Die Zahl  $b - a$  ist die **Länge** der Intervalle  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ .

(c) Jedes Intervall mit *endlicher Länge* heiße **beschränkt**. Die **unbeschränkten** Intervalle in  $\mathbf{R}$  sind genau die Intervalle der Form

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &:= \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}, & (a, +\infty) &:= \{x \in \mathbf{R} : x > a\}, \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbf{R} : x < b\}, & (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}, \end{aligned}$$

für beliebige Zahlen  $a, b \in \mathbf{R}$ , ferner

$$(-\infty, +\infty) := \mathbf{R}. \quad (\text{Spezielle Bezeichnung: } \mathbf{R}_+ := (0, +\infty), \quad \overline{\mathbf{R}_+} := [0, +\infty).)$$

(d) Stets gilt  $\pm\infty \notin \mathbf{R}$ , denn diese Elemente verstoßen gegen die Gesetze der Arithmetik. Zum Beispiel ist die Implikation  $+\infty + a = +\infty \Rightarrow a = 0 \quad \forall a \in \mathbf{R}$  ganz offenbar falsch. Wir folgern, dass Intervalle an den  $\infty$ -Enden immer offen sein müssen.  $\square$

### Definition 1.31 (Betrag und Signum)

Für reelle Zahlen  $x \in \mathbf{R}$  heie

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} +1 & : x > 0, \\ 0 & : x = 0, \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$$

das **Signum** von  $x$ . Die nichtnegative Zahl

$$|x| := x \cdot \text{sign}(x)$$

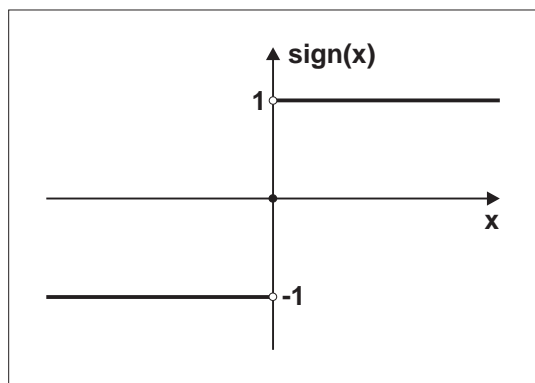
heie der **Absolutbetrag** (oder einfach der **Betrag**) von  $x$ .

Zum Beispiel:

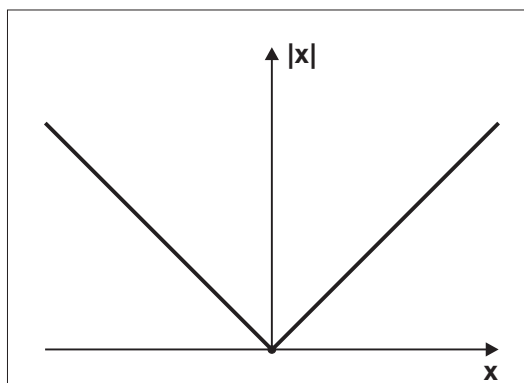
$$\begin{aligned} \text{sign}(0) &= 0, & \text{sign}(-7) &= -1, & \text{sign}(\sqrt{2}) &= 1, \\ |0| &= 0 \cdot \text{sign}(0) = 0, & |-7| &= -7 \text{sign}(-7) = 7, & |\sqrt{2}| &= \sqrt{2} \text{sign}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Allgemein folgt hieraus die Darstellung

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0, \\ -x & : x < 0. \end{cases}$$



Graph der Signums-Funktion



Graph der Betrags-Funktion

Für den Betrag gelten elementare Rechengesetze, die zum Teil direkt aus der Definition gefolgt werden können.

**Satz 1.14** Für reelle Zahlen  $x, y, \lambda \in \mathbf{R}$  gelten

(N1)  $|x| \geq 0$  und ( $|x| = 0$  genau, wenn  $x = 0$ );

(N2)  $|\lambda x| = |\lambda||x|$ ;

(N3)  $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ .

(Dreiecksungleichung)

Begründung für (N3), da (N1) und (N2) klar sind: Zunächst gilt für  $\lambda \geq 0$ :

$$|x| \leq \lambda \Leftrightarrow -\lambda \leq x \leq +\lambda. \tag{7.1}$$

Man hat ferner  $|x|+|y| \geq x+y \geq -|x|-|y| = -(|x|+|y|)$ , und wegen (7.1) folgt dann  $|x+y| \leq |x|+|y|$ . Ersetzt man  $y$  durch  $-y$  und verwendet (N2), so resultiert

$$\boxed{|x - y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.} \quad (7.2)$$

Mit (7.2) erschließen wir  $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y|$  oder äquivalent  $|x| - |y| \leq |x + y|$ , und durch Vertauschen von  $x$  und  $y$  die Ungleichung  $|y| - |x| = -(|x| - |y|) \leq |x + y|$ . Multiplizieren wir hier mit  $-1$  und verwenden (7.1), so ergibt sich die behauptete Ungleichung  $||x| - |y|| \leq |x + y|$ .  $\square$

Wir geben weitere Rechengesetze für den Betrag an:

$$\boxed{\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall 0 \neq y \in \mathbf{R}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.} \quad (7.3)$$

Eine Verallgemeinerung von (N2) lautet:

$$\boxed{\left| \prod_{k=1}^n a_k \right| = \prod_{k=1}^n |a_k|,} \quad (7.4)$$

und hieraus ergibt sich speziell  $a^2 = |a^2| = |a \cdot a| = |a| \cdot |a| = |a|^2$ . Eine Verallgemeinerung von (N3) lautet:

$$\boxed{\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|,} \quad (7.5)$$

und unter Verwendung von (7.4), (7.5) sowie der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ erhält man

$$\boxed{\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k| |b_k| \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right).} \quad (7.6)$$

Der Betrag  $|a|$  einer reellen Zahl  $a \in \mathbf{R}$  hat auf der Zahlengeraden die geometrische Bedeutung des **Abstandes** oder der **Distanz**  $d(a, 0)$  zum Nullpunkt. Allgemeiner bezeichnet

$$\boxed{d(x, a) := |x - a| \quad \forall x, a \in \mathbf{R}}$$

die Distanz eines Punktes  $x \in \mathbf{R}$  von einem Punkt  $a \in \mathbf{R}$ . Die Funktion  $d(\cdot, \cdot) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty)$  hat die folgenden charakteristischen Eigenschaften:

**Satz 1.15** Für reelle Zahlen  $x, y, z \in \mathbf{R}$  und für  $d(x, y) := |x - y|$  gelten

(M1)  $d(x, y) \geq 0$  und  $(d(x, y) = 0$  genau, wenn  $x = y)$ ;

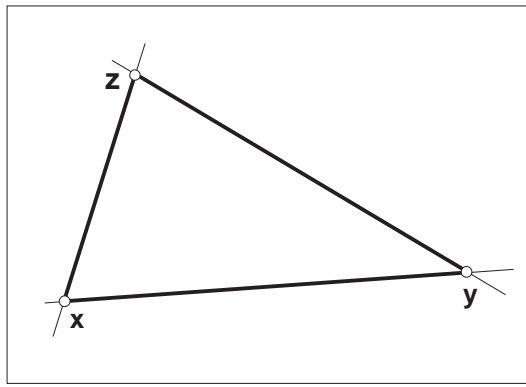
(M2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

(M3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

**(Dreiecksungleichung)**

*Begründung:* (M1) gilt wegen (N1) in Satz 1.14, während (M2) aus der Definition folgt. Schließlich erhält man (M3) unter Verwendung von (N3):  $d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$ .  $\square$





**Geometrische Veranschaulichung  
der Dreiecksungleichung**

**Bemerkung 1.21** (a) Die Dreiecksungleichung können wir erst in der Menge  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen richtig interpretieren. Werden nämlich in  $\mathbf{C}$  drei Geraden zum Schnitt gebracht und sind die Schnittpunkte  $x, y, z$  die Ecken des Dreiecks gemäß Skizze, so drückt (M3) die aus der Elementargeometrie bekannte Tatsache aus, dass die Summe zweier Dreiecksseiten nicht kleiner sein kann als die dritte Dreiecksseite, vgl. auch Abschnitt 2.2.

(b) Mit Hilfe von  $d(\cdot, \cdot)$  misst man entweder den Abstand zwischen zwei Punkten aus  $\mathbf{R}$ , zum Beispiel  $d(-1, 3) = |-1 - 3| = 4$ , oder man verwendet  $d(\cdot, \cdot)$  zur Definition von **Umgebungen** um einen festen Punkt, zum Beispiel

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) = \{x \in \mathbf{R} : d(x, a) < \epsilon\}, \quad [a - \epsilon, a + \epsilon] = \{x \in \mathbf{R} : d(x, a) \leq \epsilon\}.$$

Wegen dieser Maßeigenschaft trägt  $d(\cdot, \cdot)$  auch den Namen **Metrik**. □

## 1.8 Das Vollständigkeitsaxiom in $\mathbf{R}$ , DEDEKINDScher Schnitt

In Abschnitt 1.6 wurden Körper- und Ordnungsaxiome diskutiert, die nicht nur in  $\mathbf{R}$  Geltung haben, sondern gemäß Satz 1.11 auch in der Menge  $\mathbf{Q}$  der rationalen Zahlen. Was ist der wesentliche Unterschied zwischen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{Q}$ ? Wir haben gezeigt, dass die "rationale" Zahlengerade Lücken aufweist; es gilt zum Beispiel  $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ . **Die reelle Zahlengerade hingegen ist lückenlos!** Nicht nur auf dem Papier kann die Zahlengerade als beidseitig unendlich ausgehende Linie visualisiert werden, sondern zum Beispiel auch durch einen gespannten Faden, der nach zwei Seiten unendlich lang ist. Lückenlosigkeit bedeutet hier: Wird der Faden mit einer Schere in zwei Teile zerschnitten, *so trifft die Schere an der Schnittstelle genau eine "reelle Zahl"*. Diese unbeweisbare Feststellung gehört zu den Grundaxiomen der reellen Zahlen:

**Vollständigkeitsaxiom von  $\mathbf{R}$ :**

(V) Jeder Schnitt in  $\mathbf{R}$  trifft genau eine reelle Zahl.

Zu klären sind die Begriffe **Schnitt** und **Treffen** in mathematischer Terminologie. Diese Begriffsbildungen stammen von R. DEDEKIND (1831–1916).

**Definition 1.32 (DEDEKINDSCHER SCHNITT)**

Ein **Schnitt** in  $\mathbf{R}$  ist eine Partition von  $\mathbf{R}$  durch zwei Teilmengen  $O$  und  $U$  mit folgenden Eigenschaften:

|      |  |
|------|--|
| (S1) | $O \neq \emptyset \neq U,$                           |
| (S2) | $O \cup U = \mathbf{R}, \quad O \cap U = \emptyset,$ |
| (S3) | $x \in U \text{ und } y \in O \Rightarrow x < y.$    |

Ein Schnitt **trifft** die Zahl  $t \in \mathbf{R}$ , wenn  $x \leq t \leq y \quad \forall x \in U \quad \forall y \in O$  gelten, das heißt, wenn  $t$  **größtes** Element von  $U$  oder **kleinstes** Element von  $O$  ist.

**BSP. (1.8.1)** (a) Wir setzen  $U := \{x \in \mathbf{R} : x < \pi\}$  und  $O := \{x \in \mathbf{R} : x \geq \pi\}$ . Dieser Schnitt trifft die Zahl  $t = \pi \in \mathbf{R}$ .

(b) Wir setzen  $U := \{x \in \mathbf{R}_+ : x \leq 2\}$  und  $O := \{x \in \mathbf{R}_+ : x > 2\}$ . Dieser Schnitt trifft die Zahl  $t = 2 \in \mathbf{Q}$ .

(c) Für  $p > 0$  setzen wir  $U := \{x \in \mathbf{R}_+ : x^2 < p\}$  und  $O := \{x \in \mathbf{R}_+ : x^2 \geq p\}$ . Dieser Schnitt trifft die Zahl  $t \in \mathbf{R}_+$  mit  $t^2 = p$ . Das heißt, für jedes  $p > 0$  ist die Gleichung  $x^2 = p$  eindeutig in  $\mathbf{R}_+$  lösbar. Eine analoge Aussage gilt auch in  $\mathbf{R}_- := (-\infty, 0)$ .

**Beachte:** Für eine Schnittzahl  $t$  gilt **entweder**  $t \in U$  (dann ist  $t$  **größtes** Element von  $U$ , und es gilt gemäß Definition 1.10:  $t = \max U$ ) **oder**  $t \in O$  (dann ist  $t$  **kleinstes** Element von  $O$  und wir haben  $t = \min O$ ). Nicht jede *unendliche* Teilmenge  $M \subset \mathbf{R}$  hat ein größtes/kleinstes Element, vgl. BSP. (1.4.4). Diese Feststellung trifft selbst auf beschränkte Teilmengen zu:

**BSP. (1.8.2)** Die Teilmenge  $M \subset \mathbf{R}$  mit

$$M := \{x \in \mathbf{R} : x = 2 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N}\}$$

ist beschränkt; es gilt  $2 \leq x \leq 3 \quad \forall x \in M$ . Dennoch existiert  $\min M$  nicht, während  $\max M = 3$  ist (setze  $n = 1$ ).

Einen Ersatz für das fehlende Maximum oder Minimum verschaffen wir uns mit folgender Definition:

**Definition 1.33 (Infimum, Supremum)**

Gegeben sei eine nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbf{R}$ .

- $M$  heie **nach unten beschränkt**  $\Leftrightarrow \boxed{\exists a \in \mathbf{R} : a \leq x \quad \forall x \in M.}$  Jedes solche  $a$  heie **untere Schranke** von  $M$ .
- $M$  heie **nach oben beschränkt**  $\Leftrightarrow \boxed{\exists b \in \mathbf{R} : x \leq b \quad \forall x \in M.}$  Jedes solche  $b$  heißt **obere Schranke** von  $M$ .
- Gibt es eine größte untere Schranke  $s$  von  $M$ , so heie  $s$  das **Infimum** von  $M$ ,

$$\boxed{s = \inf M.}$$

- Gibt es eine kleinste obere Schranke  $S$  von  $M$ , so heie  $S$  das **Supremum** von  $M$ ,

$$\boxed{S = \sup M.}$$

**Folgerungen.** (a) Trifft ein Schnitt in  $\mathbf{R}$  die Zahl  $t$ , so gilt  $\inf O = t = \sup U$ .

(b) Besitzt  $M$  ein Maximum (ein Minimum), so gilt  $\max M = \sup M$ , und analog  $\min M = \inf M$ . Für  $M := \mathbf{N}$  existieren weder  $\max M$  noch  $\sup M$ , was in BSP. (1.8.3) näher begründet wird, während  $\min M = \inf M = 1$  gilt. In BSP. (1.8.2) existiert  $\min M$  nicht. Wir haben jedoch  $\inf M = 2$  sowie  $\max M = \sup M = 3$ .

(c) Setzt man  $-M := \{x \in \mathbf{R} : -x \in M\}$ , so folgert man

$$\boxed{\exists \inf M \Leftrightarrow \exists \sup(-M) \text{ und } \exists \sup M \Leftrightarrow \exists \inf(-M).}$$

(d) Für Intervalle  $I$  in der Form  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b)$ ,  $(a, b]$  mit  $a, b \in \mathbf{R}$  und  $a < b$  gilt stets

$$\boxed{\inf I = a, \quad \sup I = b.}$$

Ist  $I$  offen bei  $a$ , so existiert  $\min I$  nicht; ist  $I$  offen bei  $b$ , so existiert  $\max I$  nicht.

(e) Aus Konsistenzgründen setzt man

$$\boxed{\sup(a, +\infty) =: +\infty, \quad \inf(-\infty, b) =: -\infty.}$$

Die Frage nach der Existenz von Supremum und Infimum einer Teilmenge  $M \subset \mathbf{R}$  kann wegen Folgerung (c) auf die Frage nach der Existenz von  $\sup M$  allein beschränkt werden. Die Antwort geben wir im folgenden

### Satz 1.16 (Supremumsprinzip)

(a) Die nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbf{R}$  sei nach oben beschränkt. Dann existiert  $S := \sup M$ .

(b) Es sei  $S \in \mathbf{R}$  gegeben. Genau dann gilt  $S = \sup M$  für eine Teilmenge  $\emptyset \neq M \subset \mathbf{R}$ , wenn  $S$  eine obere Schranke ist und wenn gilt:

$$\boxed{\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{x \in M} S - \epsilon < x.} \tag{8.1}$$

*Begründungen:* (a) Mit den Mengen  $O := \{b \in \mathbf{R} : b \text{ obere Schranke von } M\} \neq \emptyset$  und  $U := \mathbf{R} \setminus O$  liegt wegen  $O \cup U = \mathbf{R}$ ,  $O \cap U = \emptyset$  und  $x < y \forall x \in U \forall y \in O$  ein DEDEKINDScher Schnitt vor, der gemäß (V) genau eine Schnitzzahl  $S = \inf O$  festlegt. Also folgt nach Definition die Existenz von  $\sup M = S$ .

(b) Wir zeigen hier nur die Implikation  $S = \sup M \Rightarrow (8.1)$ . Die Implikation " $\Leftarrow$ " kann mit Hilfe eines DEDEKIND-Schnittes vom Leser selbst gezeigt werden. Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen dazu an, es gelte  $S = \sup M$ , nicht aber (8.1). Das logische Gegenteil der Aussage (8.1) erhält man durch Umdrehen der Quantoren  $\wedge, \vee$  sowie aller Ungleichungen im Aussageteil:

$$\bigvee_{\epsilon > 0} \bigwedge_{x \in M} S - \epsilon \geq x.$$

Dies besagt,  $S - \epsilon < S$  ist obere Schranke von  $M$ . Also kann  $S$  **nicht** kleinste obere Schranke gewesen sein, im Widerspruch zu  $S = \sup M$ .  $\square$

**BSP. (1.8.3)** Es sei  $M := \mathbf{N}$  gesetzt. Angenommen, es existiere  $S := \sup \mathbf{N}$ . Wir setzen in (8.1)  $\epsilon := 1$  und folgern  $\exists n \in \mathbf{N} : S - 1 < n$  oder äquivalent  $S < n + 1$ . Aus den PEANO-Axiomen folgt aber  $n + 1 \in \mathbf{N}$ . Also kann  $S$  nicht obere Schranke von  $\mathbf{N}$  sein.

Die Menge  $\mathbf{N}$  der natürlichen Zahlen ist nach oben unbeschränkt.

Diese Tatsache wird in der Literatur – in leicht modifizierter Form – als Satz des ARCHIMEDES geführt.

**Satz 1.17** (ARCHIMEDES, um 280–212 v.Chr.)

Zu jeder reellen Zahl  $x \in \mathbf{R}$  gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbf{N}$  mit  $x \leq n$ .

**BSP. (1.8.4)** **Approximation einer Zahl  $x \in \mathbf{R}$  durch eine Zahl  $r \in \mathbf{Q}$ .** Nachfolgend sei stets  $n_j \in D := \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  eine dezimale Ziffer. Zu gegebenem  $x \in \mathbf{R}_+$  konstruieren wir durch wiederholte Anwendung des ARCHIMEDischen Satzes 1.17 eine natürliche Zahl  $n \in \mathbf{N}$  und dezimale Ziffern  $n_1, n_2, \dots, n_k$  so, dass die rationale Zahl  $r_k := n, n_1 n_2 \dots n_k$  das gegebene  $x$  mit einem Fehler höchstens  $10^{-k}$  approximiert:

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbf{N}_0 & : n < x \leq n + 1 \\ \Rightarrow \exists n_1 \in D & : n_1 < 10x - 10n \leq n_1 + 1 & (\Rightarrow 0 < x - (n + 0, n_1) \leq 10^{-1}) \\ \Rightarrow \exists n_2 \in D & : n_2 < 100x - 100n - 10n_1 \leq n_2 + 1 & (\Rightarrow 0 < x - (n + 0, n_1 n_2) \leq 10^{-2}) \\ & \vdots & \vdots \end{aligned}$$

nach  $k$  Schritten:

$$\Rightarrow \exists n_k \in D : n + 0, n_1 n_2 \dots n_k < x \leq n + 0, n_1 n_2 \dots n_k + 10^{-k}.$$

Der endliche Dezimalbruch  $r_k := n, n_1 n_2 \dots n_k$  ist eine rationale Zahl, für die gilt:

$$d(x, r_k) = |x - r_k| \leq 10^{-k}.$$

Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  kann  $k \in \mathbf{N}$  stets so bestimmt werden dass  $10^{-k} < \epsilon$  erfüllt ist. Mit dieser Feststellung erhalten wir zusammenfassend:

**Satz 1.18** *Zu jeder reellen Zahl  $x \in \mathbf{R}$  und zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es eine rationale Zahl  $r \in \mathbf{Q}$  mit  $d(x, r) = |x - r| < \epsilon$ . Das heißt,  $\mathbf{Q}$  liegt dicht in  $\mathbf{R}$ .*

Auf diesem Satz beruht das Prinzip jeder digitalen Rechenanlage. Digitale Computer arbeiten ausschließlich mit **rationalen** Zahlen in **endlicher** Dualdarstellung. Dass trotzdem Zahlen wie  $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$  verarbeitet werden können, ist durch Satz 1.18 begründet. Der Computer berechnet nicht wirklich  $\sqrt{2}$ , sondern eine rationale Approximation  $r_{\text{Wurzel}}$  mit  $d(\sqrt{2}, r_{\text{Wurzel}}) < \epsilon$ . Der Fehler  $\epsilon$  ist durch die Maschinengenauigkeit bestimmt ( $\sim$  Anzahl der verarbeiteten Dualstellen).

**BSP. (1.8.5)** **Ausschöpfung von  $\mathbf{R}$  durch Intervalle.** Aus den beiden Implikationen

$$(i) \quad \forall n \in \mathbf{N} : [-n, n] \subset \mathbf{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] \subseteq \mathbf{R},$$

$$(ii) \quad x \in \mathbf{R} \stackrel{\text{Satz 1.17}}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbf{N} : |x| \leq n_0 \Rightarrow x \in [-n_0, n_0] \Rightarrow \mathbf{R} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$$

resultiert die folgende **Ausschöpfung** von  $\mathbf{R}$  durch abgeschlossene Intervalle:

$$\mathbf{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n].$$

Analoge Ausschöpfungen gelten auch mit offenen bzw. halboffenen Intervallen der Form  $(-n, n)$ ,  $[-n, n)$  oder  $(-n, n]$ .

**BSP. (1.8.6)** **Ausschöpfung von offenen Intervallen durch abgeschlossene Intervalle.** Für gegebene reelle Zahlen  $a, b \in \mathbf{R}$  mit  $a + 2 < b$  (diese Bedingung ist rein technisch) gelten die beiden

folgenden Implikationen:

$$(i) \quad \forall n \in \mathbf{N} : [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subset (a, b) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \subseteq (a, b),$$

$$(ii) \quad x \in (a, b) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbf{N} : x \in [a + \frac{1}{n_0}, b - \frac{1}{n_0}] \Rightarrow (a, b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}].$$

Aus (i) und (ii) erschließen wir

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}].$$

**Beachte:** Eine solche Ausschöpfung gilt nicht für das abgeschlossene Intervall  $[a, b]$ . Denn die Implikation (ii) wird falsch für  $x = a$  und  $x = b$ . Hingegen gilt:

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}).$$

Man beweise dies zur Übung!

**BSP. (1.8.7)** Wir geben hier eine Mengenalgebra  $\mathcal{A}$  an, die *keine*  $\sigma$ -Algebra ist. Dazu sei  $\Omega := \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$  gesetzt.  $\mathcal{A}$  sei die Menge aller Intervalle der Form  $(-\infty, c]$ ,  $(a, b]$ ,  $(d, +\infty)$ ,  $\emptyset$ ,  $(-\infty, +\infty)$  und deren endliche Vereinigungen. Dabei sei angenommen, dass  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ , beliebige Zahlen sind. Offenbar sind die Komplemente der oben angegebenen Intervalle wiederum Intervalle oder endliche Vereinigungen von Intervallen des angegebenen Typs. Es ist nicht un schwer, für  $\mathcal{A}$  die Axiome (A1)–(A3) einer Mengenalgebra aus Definition 1.2(b) zu verifizieren.  $\mathcal{A}$  ist jedoch keine  $\sigma$ -Algebra, denn das Axiom (A4) aus Bemerkung 1.2 ist nicht erfüllt. Seien nämlich  $a, b \in \mathbf{R}$  mit  $a + 1 < b$  fest gewählt. Setzt man  $A_j := (a, b - \frac{1}{j}] \in \mathcal{A}$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , so erhält man wie in BSP. (1.8.6)

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = (a, b) \notin \mathcal{A}.$$

**BSP. (1.8.8)** **Potenzen mit rationalem Exponenten; Wurzeln.** Zu gegebenen Zahlen  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbf{N}$  ist eine Lösung  $x \geq 0$  der Gleichung  $x^n = a$  zu bestimmen. Da  $\mathbf{R}$  nullteilerfrei ist, hat die Gleichung  $x^n = 0$  genau eine Lösung, nämlich  $x = 0$ . Für  $a > 0$  diskutieren wir (i) das Problem der **Existenz** und (ii) das Problem der **Eindeutigkeit**.

(i) Sei  $a > 0$  gegeben. Durch die Mengen  $U := \{x \in \mathbf{R}_+ : x^n < a\}$  und  $O := \{x \in \mathbf{R}_+ : x^n \geq a\}$  wird ein DEDEKINDScher Schnitt von  $\mathbf{R}_+$  definiert, der wegen des Vollständigkeitsaxioms (V) genau eine Zahl  $t > 0$  trifft mit  $t^n = a$ . Also existiert eine Lösung  $x > 0$ .

(ii) Wären  $x, y \geq 0$  zwei Lösungen mit  $x < y$ , so ergäbe sich widersprüchlich  $a = x^n < y^n = a$ . Also ist die Lösung eindeutig.

**Satz 1.19** Für festes  $a \geq 0$  und  $n \in \mathbf{N}$  existiert genau eine reelle Zahl  $x \geq 0$  mit  $x^n = a$ .

**Definition 1.34** Die gemäß Satz 1.19 eindeutig bestimmte Lösung  $x \geq 0$  der Gleichung  $x^n = a$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , heiÙe  **$n$ -te Wurzel** von  $a \geq 0$ . Wir schreiben hierfür

$$x = \sqrt[n]{a} =: a^{1/n}.$$

Insbesondere gilt  $\sqrt[n]{0} = 0$ .

**Bemerkung 1.22** (a) Die reelle Zahl  $\sqrt[n]{a}$  ist hier ausschließlich für  $a \geq 0$  erklärt worden. Ist  $a < 0$ , so werden wir erst im Rahmen der **komplexen Zahlen** die Bedeutung des **mengenwertigen** Symbols  $\sqrt[n]{a}$  erklären können. Insbesondere ist es **falsch**, zum Beispiel  $\sqrt[3]{-8} = -2$  zu setzen, obwohl  $(-2)^3 = -8$  gilt. Man unterscheide sorgfältig die zwei verschiedenen Aufgaben

- Bestimme die **Zahl**  $x = \sqrt[n]{a} \geq 0$ , für welche  $x^n = a \geq 0$  gilt.
- Bestimme die **Lösungsmenge**  $\sqrt[n]{a}$  der Gleichung  $x^n = a \in \mathbf{R}$ .

(b) Man schreibt einfacher  $\sqrt{a}$  anstelle von  $\sqrt[2]{a}$ . Stets gilt  $\sqrt{a^2} = |a| \forall a \in \mathbf{R}$ . Existiert die Zahl  $\sqrt[n]{a}$ , so gilt  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ . Es ist im allgemeinen **falsch**,  $\sqrt[n]{a^n} = a$  zu setzen, wie das Beispiel  $\sqrt{(-1)^2} \neq -1$  lehrt. Jedoch:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a \Leftrightarrow a \geq 0.}$$

(c) Die **reellen** Lösungen  $x \in \mathbf{R}$  der Gleichung  $x^n = a \in \mathbf{R}$  fassen wir in der folgenden Tabelle zusammen: □

| Reelle Lösungen von $x^n = a$ |                              |                       |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------|
| $a \geq 0$                    | $n = 2m$ ( $n$ gerade)       | $x = \pm \sqrt[n]{a}$ |
|                               | $n = 2m + 1$ ( $n$ ungerade) | $x = \sqrt[n]{a}$     |
| $a < 0$                       | $n = 2m$ ( $n$ gerade)       | keine reelle Lsg.     |
|                               | $n = 2m + 1$ ( $n$ ungerade) | $x = -\sqrt[n]{ a }$  |

**Definition 1.35** Für  $a > 0$  und  $r := p/q$  mit  $q \in \mathbf{N}$ ,  $p \in \mathbf{N}_0$  gelte:

$$\boxed{a^r := (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}, \quad a^{-r} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}, \quad 0^r := 0 \text{ für } r > 0, \quad 0^0 := 1.}$$

Durch diese Definition sind Potenzen mit beliebigem rationalen Exponenten erklärt. Die **Potenzrechenregeln**, wie zum Beispiel

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = a^{1/nm},$$

werden als bekannt vorausgesetzt.

Wir können jetzt die Aussage (iii) aus Satz 1.12 verallgemeinern.

**Satz 1.20 (arithmetisch–geometrisches Mittel)**

Für gegebene reelle Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  mit  $a_k \geq 0$ , gilt stets

$$\boxed{A := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} =: G.}$$

Die Zahl  $A$  heißt **arithmetisches Mittel** der  $a_k$ , die Zahl  $G$  heißt **geometrisches Mittel** der  $a_k$ .

Die etwas umfangreichere Begründung wird in den Übungen erbracht.

## 1.9 Der binomische Lehrsatz; Elemente der Kombinatorik

**Binompotenzen** sind Ausdrücke der Form  $(a + b)^n$  mit  $a, b \in \mathbf{R}$  und  $n \in \mathbf{N}$ . Bekannt und leicht verifizierbar sind die folgenden Identitäten:

$$(a + b)^1 = a + b, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Für allgemeines  $n \in \mathbf{N}$  benötigen wir die folgende Begriffsbildung:

**Definition 1.36** *Es seien Zahlen  $\alpha \in \mathbf{R}$  und  $k \in \mathbf{N}_0$  gegeben. Es werde*

$$\boxed{\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!} \text{ für } k \geq 1}$$

*gesetzt. Die so definierten Zahlen  $\binom{\alpha}{k}$  (sprich:  $\alpha$  über  $k$ ) heißen **Binomialkoeffizienten**.*

**BSP. (1.9.1)** Die Zahlen  $\alpha \in \mathbf{R}$  und  $n \in \mathbf{N}$  seien beliebig.

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{1} &= \frac{\alpha}{1!} = \alpha, \\ \binom{n}{n} &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-n+1)}{n!} = 1, \\ \binom{5}{3} &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10, \\ \binom{10}{5} &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252, \\ \binom{-1/3}{4} &= \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)(-\frac{1}{3}-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{35}{243}. \end{aligned}$$

Weitere Rechenregeln, die ohne Schwierigkeiten aus der Definition der Binomialkoeffizienten gefolgert werden können, sind im folgenden Satz zusammengefasst.

**Satz 1.21** *Für Zahlen  $n, k \in \mathbf{N}_0$  gilt stets:*

- (a)  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$  falls  $0 \leq k \leq n$ ,
- (b)  $\binom{n}{k} = 0$  falls  $k > n$ ,
- (c)  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$  falls  $1 \leq k \leq n$ .

*Begründung für (c):*

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!} (k + n + 1 - k) \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

Die Formel (c) ermöglicht eine bequeme rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$ . Das folgende Berechnungsschema heißt **PASCALSches Dreieck** (B. PASCAL, 1623–1662). Jede Zahl ist die Summe der beiden darüberstehenden Zahlen.

$$\begin{array}{cccccccc}
 \binom{0}{0} & & & & & & & 1 \\
 \binom{1}{k} & & & & 1 & & 1 & \\
 \binom{2}{k} & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 \binom{3}{k} & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 \binom{4}{k} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 \binom{5}{k} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \binom{6}{k} & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

Aus derselben Beziehung lässt sich auch ein einfacher numerischer Algorithmus zur schnellen Berechnung der Binomialkoeffizienten herleiten. Wir setzen zur Vereinfachung  $b_{nk} := \binom{n}{k}$ . Mit dem folgenden Algorithmus werden zu einer vorgegebenen Zahl  $N \in \mathbf{N}$  alle Binomialkoeffizienten  $b_{nk}$ ,  $0 \leq k \leq n \leq N$ , berechnet.

|    |  |
|----|--|
| 1: | Einlesen: $N \in \mathbf{N}$ ; $b_{00} := 1$ ;               |
| 2: | für $n := 1, 2, \dots, N$ :                                  |
| 3: | $b_{n0} := 1$ ; $b_{nn} := 1$ ;                              |
| 4: | für $k := 1, 2, \dots, n - 1$ :                              |
| 5: | $b_{nk} := b_{n-1,k-1} + b_{n-1,k}$ . (Ende $k$ , Ende $n$ ) |

Für  $N = 12$  haben wir die folgende Tabelle mit dem obigen Algorithmus berechnet:

| $n \setminus k$ | 0 | 1  | 2  | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10 | 11 | 12 |
|-----------------|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|
| 0               | 1 |    |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |    |
| 1               | 1 | 1  |    |     |     |     |     |     |     |     |    |    |    |
| 2               | 1 | 2  | 1  |     |     |     |     |     |     |     |    |    |    |
| 3               | 1 | 3  | 3  | 1   |     |     |     |     |     |     |    |    |    |
| 4               | 1 | 4  | 6  | 4   | 1   |     |     |     |     |     |    |    |    |
| 5               | 1 | 5  | 10 | 10  | 5   | 1   |     |     |     |     |    |    |    |
| 6               | 1 | 6  | 15 | 20  | 15  | 6   | 1   |     |     |     |    |    |    |
| 7               | 1 | 7  | 21 | 35  | 35  | 21  | 7   | 1   |     |     |    |    |    |
| 8               | 1 | 8  | 28 | 56  | 70  | 56  | 28  | 8   | 1   |     |    |    |    |
| 9               | 1 | 9  | 36 | 84  | 126 | 126 | 84  | 36  | 9   | 1   |    |    |    |
| 10              | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45  | 10  | 1  |    |    |
| 11              | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55  | 11 | 1  |    |
| 12              | 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 | 12 | 1  |

### Satz 1.22 (Binomischer Lehrsatz)

Gegeben seien Zahlen  $a, b \in \mathbf{R}$  und  $n \in \mathbf{N}$ . Dann gilt:

$$A(n) \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(Zum Beispiel:  $(a + b)^5 = 1 \cdot b^5 + 5 \cdot ab^4 + 10 \cdot a^2b^3 + 10 \cdot a^3b^2 + 5 \cdot a^4b + 1 \cdot a^5$ .)

Begründung: Wir verwenden zum Beweis der Aussage  $A(n)$  vollständige Induktion nach  $n$ .



- *Verankerung:*  $A(1)$  ist richtig, denn es gilt

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0}b + \binom{1}{1}a = b + a = a + b.$$

- *Vererbung:* Wir zeigen die Implikation  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ .

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \stackrel{A(n)}{=} (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &\stackrel{j:=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &\stackrel{k:=j}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]}_{=\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1=\binom{n+1}{0}} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

**BSP. (1.9.2)**

Die Zeilensummen im PASCAL-Dreieck ergeben den Wert

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}. \quad (9.1)$$

Ganz analog erhält man

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}. \quad (9.2)$$

Addiert man (9.1) und (9.2) und teilt anschließend die Summe durch 2, so folgt:

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{2k} + \dots \quad (\text{bricht ab für } 2k > n). \quad (9.3)$$

Subtrahiert man (9.1) und (9.2) und teilt anschließend die Differenz durch 2, so folgt:

$$2^{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{2k+1} + \dots \quad (\text{bricht ab für } 2k+1 > n). \quad (9.4)$$

**BSP. (1.9.3)**

Das **Wachstum der Binomialkoeffizienten** wird durch folgende Ungleichungen angezeigt:

$$\frac{1}{m^k} \binom{m}{k} < \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \forall m, n, k \in \mathbf{N} : m < n \text{ und } 1 \leq k \leq n. \quad (9.5)$$

Eine *Begründung* verwendet die Tatsache, dass für jede Zahl  $1 \leq a < n$  die Ungleichung  $1 - \frac{a}{m} < 1 - \frac{a}{n}$  gilt. Hieraus resultiert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^k} \binom{m}{k} &= \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m}) \cdots (1 - \frac{k-1}{m})}{k!} < \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} \\ &= \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1 \cdot 1 \cdots 1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdots k} = \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

**BSP. (1.9.4)** Die Menge  $E := \{x \in \mathbf{R} : x = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbf{N}\}$  ist **beschränkt**:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall m, n \in \mathbf{N} : m < n. \quad (9.6)$$

Zur *Begründung* verwenden wir zunächst die BERNOULLI–Ungleichung  $(1 + \frac{1}{m})^m \geq 1 + m \cdot \frac{1}{m} = 2$ , aus der die linke Ungleichung folgt. Für den Beweis der rechten Ungleichung verwenden wir den binomischen Lehrsatz, indem wir  $a := 1/m$  und  $b := 1$  setzen:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{m^k} \binom{m}{k} \stackrel{(9.5)}{<} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\stackrel{(9.5)}{<} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &\stackrel{\text{geom. Summe}}{=} 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} < 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

**BSP. (1.9.5)** **Wachstum der Fakultäten.** Es gilt

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (9.7)$$

Die linke Ungleichungsseite zeigt man durch vollständige Induktion unter Verwendung von (9.6). Die rechte Ungleichungsseite erhält man Hilfe des Satzes vom arithmetisch–geometrischen Mittel. (Übungsaufgabe!)

”Die Fakultät erschlägt jede Potenz”, das heißt, für jede Zahl  $a > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbf{N}$  mit

$$\boxed{a^n < n! \quad \forall n \geq N.} \quad (9.8)$$

Zur *Begründung* wählen wir zum Beispiel  $N \geq 3a$ . Dann folgt aus der Ungleichung (9.7) die folgende Abschätzung:

$$a^n \leq \left(\frac{N}{3}\right)^n = \left(\frac{N}{3}\right)^N \prod_{k=1}^{n-N} \left(\frac{N}{3}\right) < N!(N+1)(N+2) \cdots n = n!$$

## Elemente der Kombinatorik, LAPLACE–Experimente.

**BSP. (1.9.6)** Wird ein idealer Spielwürfel (Augenzahlen: 1,2,3,4,5,6) geworfen, so ist im Ergebnis jede der sechs Augenzahlen gleichmöglich. Im physikalischen Sinn ist der Würfelwurf ein **Experiment**

(das heißt unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar) mit **nichtdeterministischem** Ausgang. Das Ergebnis des Experiments, nämlich die geworfene Augenzahl, ist **rein zufällig** bestimmt. Solche Experimente heißen im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinn **Zufallsexperimente**. Darunter fallen der hier vorgestellte Würfelwurf, aber auch Münzwurf, Ziehen von Losen in der Lotterie, Roulette, usw.

Die Gesamtheit aller möglichen Ausgänge oder **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments fasst man zu einer Menge  $\Omega$  zusammen, dem **Ergebnisraum**. Beispiele sind

- Würfelwurf:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,
- Münzwurf:  $\Omega = \{Z, W\}$ , mit der Bedeutung  $Z = \text{'Zahl'}$ ,  $W = \text{'Wappen'}$ ,
- Ziehen von Losen:  $\Omega = \{N, G\}$ , mit der Bedeutung  $N = \text{'Niete'}$ ,  $G = \text{'Gewinn'}$ .

Der Ergebnisraum  $\Omega$  ist nicht notwendig endlich; zum Beispiel trifft ein rein zufällig gelegter DEDEKINDScher Schnitt eine reelle Zahl  $x \in \mathbf{R} = \Omega$ .

**Definition 1.37** *Es sei ein Zufallsexperiment gegeben mit Ergebnisraum  $\Omega$ .*

(a) *Jede Teilmenge  $A \subset \Omega$  heie ein **Ereignis**; insbesondere heie  $A := \emptyset$  das **unmögliche Ereignis** und  $A := \Omega$  das **sichere Ereignis**.*

(b) *Ein Zufallsexperiment heie **LAPLACE-Experiment**, wenn der Ergebnisraum  $\Omega$  endlich ist:  $|\Omega| \equiv \text{card } \Omega < \infty$ , und wenn jedes Ergebnis gleichmöglich ist. Die einelementigen Teilmengen  $A := \{\omega\}$ ,  $\omega \in \Omega$ , heißen **Elementarereignisse**.*

(c) *Die Potenzmenge  $\mathcal{A} := 2^\Omega = \mathcal{P}(\Omega)$  heie die **Ereignisalgebra** des LAPLACE-Experiments. (Beachte:  $\mathcal{A}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.)*

(d) *Die Zahl*

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad A \in \mathcal{A},$$

heie die **LAPLACE-Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses  $A$ . Die hierdurch induzierte 'Funktion'  $P$  mit  $\mathcal{A} \ni A \mapsto P(A) \in [0, 1]$  heie **Wahrscheinlichkeitsverteilung** auf  $\mathcal{A}$  oder kurz **Wahrscheinlichkeit**.

**BSP. (1.9.7)** Beim **Münzwurf** hatten wir  $\Omega = \{Z, W\}$ , so dass  $|\Omega| = 2$  und  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{Z\}, \{W\}, \Omega\}$  folgen. Die Relationen

$$P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = 0, \quad P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

gelten offenbar für jedes Zufallsexperiment. Wir haben beim Münzwurf noch die beiden Wahrscheinlichkeiten (generell schreiben wir  $P(\omega)$  anstelle von  $P(\{\omega\})$ ):

$$P(Z) = \frac{|\{Z\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} = \frac{|\{W\}|}{|\Omega|} = P(W).$$

**BSP. (1.9.8)** Beim **Würfelwurf** hatten wir  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , so dass  $|\Omega| = 6$  gilt.  $\mathcal{A}$  besteht aus  $2^6 = 64$  Elementen, die hier nicht aufgelistet werden sollen. Einige Wahrscheinlichkeiten:

- $P(k) = \frac{|\{k\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \quad \forall k = 1, 2, \dots, 6;$

- $A \hat{=} \text{ "Augenzahl gerade" } \Rightarrow A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

- $A \hat{=} \text{ "Augenzahl prim" } \Rightarrow A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$ .

- $B \hat{=} \text{ "Augenzahl } \neq 6" \Rightarrow B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A^c \text{ mit } A = \{6\}$ .

$$\Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6} = 1 - P(A) = P(A^c).$$

Wir fassen die wichtigsten Regeln zusammen:

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1 \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Hier und im folgenden verwenden wir die in der Wahrscheinlichkeitstheorie übliche Bezeichnung  $\bar{A}$  für das Komplement einer Menge  $A$ .

**BSP. (1.9.9)** Wir greifen aus dem Intervall  $[100, 999]$  eine natürliche Zahl  $n \in \mathbf{N}$  rein zufällig heraus und bestimmen zu diesem LAPLACE-Experiment die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  für das Ereignis  $A \hat{=} \text{ "Die Zahl } n \text{ hat lauter verschiedene Ziffern"}$ . Es gilt offenbar  $\Omega = [100, 999] \cap \mathbf{N}$  mit  $|\Omega| = 999 - 99 = 900$  sowie

$$A = \{n \in \mathbf{N} : n = a_1 a_2 a_3, \quad a_1 \in \{1, 2, \dots, 9\} \text{ und } a_2, a_3 \in \{0, 1, \dots, 9\} \\ \text{und } a_j \text{ paarweise verschieden}\}.$$

Für die Berechnung von  $|A|$  überlegen wir uns die möglichen **Belegungen** der Ziffern  $a_1, a_2, a_3$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Belegung von } a_1 : 9 \text{ Möglichkeiten } \{1, 2, \dots, 9\} \\ \text{Belegung von } a_2 : 9 \text{ Möglichkeiten } \{0, 1, 2, \dots, 9\} \setminus \{a_1\} \\ \text{Belegung von } a_3 : 8 \text{ Möglichkeiten } \{0, 1, 2, \dots, 9\} \setminus \{a_1, a_2\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{insgesamt} \\ 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648 \\ \text{Möglichkeiten.} \end{array}$$

Hiermit erschließen wir:

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{648}{900} = 0.72.$$

**Bemerkung 1.23** Die Darstellung  $n = a_1 a_2 a_3$  darf nicht als Produkt  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$  missverstanden werden; es ist vielmehr die Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl gemeint, bei der die Stellung der Ziffern wesentlich ist. Unmissverständlich wird die Darstellung erst, wenn wir  $n = (a_1, a_2, a_3)$  schreiben. □

**Definition 1.38** (a) Eine Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  heiÙe (**geordnetes**)  $n$ -**Tupel**, geschrieben  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , wenn  $a_1$  stets das erste,  $a_2$  stets das zweite,  $\dots$ ,  $a_n$  stets das  $n$ -te Element ist. Zwei  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  und  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  sind genau dann gleich, wenn  $a_j = b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$  gilt.

(b) Gegeben seien nichtleere Mengen  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Die Menge aller geordneten  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  mit  $a_j \in E_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$ , heiÙe das **cartesische Produkt** der  $E_j$ , geschrieben  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ . Falls  $E_1 = E_2 = \dots = E_n$  gilt, so schreibt man kürzer  $E^n$ . Statt  $E^1$  schreibt man  $E$ , statt (a) einfach  $a$ .

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_+ \times [0, 1] &= \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R} \text{ und } x > 0, 0 \leq y \leq 1\}, \\ \mathbf{R}^3 &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_j \in \mathbf{R}, j = 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Das in BSP. (1.9.9) diskutierte Problem gehört zur Klasse der

**Belegungsprobleme:** Es seien  $k$  Schubladen  $S_1, S_2, \dots, S_k$  untereinander und in dieser Reihenfolge aufgestellt. In  $S_1$  werde ein Objekt  $a_1$ , dann in  $S_2$  ein Objekt  $a_2$  usw. gelegt. Das Ergebnis heie eine **Belegung**  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  der Schubladen.

**Problemstellung:** Wieviele Belegungen gibt es insgesamt, wenn es  $n_1$  Möglichkeiten gibt,  $S_1$  zu belegen, danach  $n_2$  Möglichkeiten,  $S_2$  zu belegen,  $\dots$ , und schließlich  $n_k$  Möglichkeiten,  $S_k$  zu belegen?

**Bemerkung 1.24** Bilden die  $n_j$  Elemente  $a_j$  die Menge  $E_j$ , so ist eine Belegung ein geordnetes  $k$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ .  $\square$

**BSP. (1.9.10)** Es sind alle dreistelligen Dezimalzahlen in  $\mathbf{N}$  zu bestimmen, die sich aus der Ziffernmenge  $\{1, 2, 3\}$  kombinieren lassen. Wenn wir **keine Wiederholung** einer Ziffer zulassen, so sind das offenkundig die  $6 = 3!$  Zahlen

123 213 312  
132 231 321

Lassen wir hingegen **Wiederholungen** von Ziffern zu, so sind die folgenden  $27 = 3^3$  Belegungen möglich:

111 121 131 211 221 231 311 321 331  
112 122 132 212 222 232 312 322 332  
113 123 133 213 223 233 313 323 333

Wir spezifizieren den Begriff der Belegung unter Berücksichtigung des Wiederholungsfalles:

**Definition 1.39** Gegeben sei die endliche Menge  $\Omega$  mit  $|\Omega| = n$ . Das geordnete  $k$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  mit  $k \leq n$  heie **geordnete Probe** vom Umfang  $k$  aus der Menge  $\Omega$  (vom Umfang  $n$ ) **ohne Wiederholung**, wenn  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  wie folgt entsteht:

$a_1$  wird aus  $\Omega$  entnommen,  
 $a_2$  wird aus  $\Omega \setminus \{a_1\}$  entnommen,  
 $\vdots$   
 $a_k$  wird aus  $\Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$  entnommen.

Die Lösung des Belegungsproblems wird jetzt durch das folgende Abzhltheorem beschrieben:

**Satz 1.23 (Produktregel)**

Für jede natürliche Zahl  $k \in \mathbf{N}$  gilt die folgende Aussage  $A(k)$ : Hat man  $k$  Schubladen  $S_1, S_2, \dots, S_k$  und

$n_1$  Möglichkeiten,  $S_1$  zu belegen, und danach  
 $n_2$  Möglichkeiten,  $S_2$  zu belegen, und danach  
 $\vdots$   
 $n_k$  Möglichkeiten,  $S_k$  zu belegen,

so gibt es insgesamt  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  Belegungen der  $S_1, S_2, \dots, S_k$ .

*Begründung:* Wir beweisen  $A(k)$  mit vollständiger Induktion nach  $k$ .

- *Verankerung*: Die Aussage  $A(1)$  ist nach Voraussetzung wahr.
- *Vererbung*: Gibt es  $n_{k+1}$  Möglichkeiten, die Schublade  $S_{k+1}$  zu belegen, so lässt sich jede dieser Möglichkeiten mit den gemäß  $A(k)$  bestehenden  $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$  Belegungen der  $S_1, S_2, \dots, S_k$  kombinieren. Insgesamt hat man dann  $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k \cdot n_{k+1}$  Belegungen der  $S_1, S_2, \dots, S_{k+1}$ , also Aussage  $A(k+1)$ .  $\square$

Der folgende Satz zählt zu den zentralen Resultaten der Kombinatorik:

**Satz 1.24** Gegeben seien eine endliche Menge  $\Omega$  mit  $|\Omega| = n$  und eine natürliche Zahl  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ . Dann gilt:

(a) Die Anzahl der **geordneten Proben** vom Umfang  $k$  aus  $\Omega$  **ohne Wiederholung** ist

$$\boxed{n(n-1) \cdots (n-k+1) = k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}} \quad (9.9)$$

(b) Die Anzahl der **geordneten Proben** vom Umfang  $k$  aus  $\Omega$  **mit Wiederholung** ist

$$\boxed{n^k} \quad (9.10)$$

(c) Die Anzahl der **ungeordneten Proben** vom Umfang  $k$  aus  $\Omega$  ( $\hat{=}$  nichtgeordnete Teilmenge  $A \subset \Omega$  mit  $|A| = k$ ) **ohne Wiederholung** ist

$$\boxed{\binom{n}{k}} \quad (9.11)$$

(d) Die Anzahl der **ungeordneten Proben** vom Umfang  $k$  aus  $\Omega$  **mit Wiederholung** ist

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k}} \quad (9.12)$$

**Bemerkung 1.25** Die Aussage (a) liefert im **Sonderfall**  $k = n$  die Anzahl der **verschiedenen Anordnungen** von  $n$  Elementen. Jede solche Anordnung ist ein geordnetes  $n$ -Tupel, das nach JAKOB BERNOULLI (1635–1705) eine **Permutation** der gegebenen  $n$  Elemente heißt.  $\square$

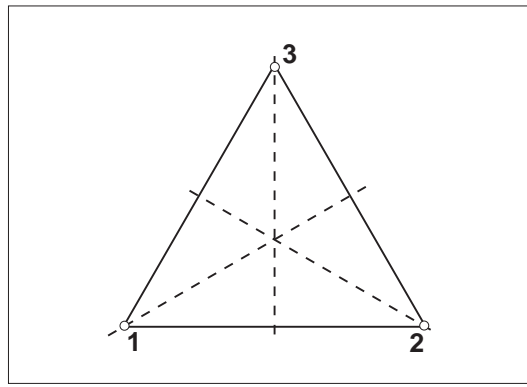
Im abbildungstheoretischen Sinn definieren wir allgemeiner:

**Definition 1.40** Für eine gegebene Menge  $\Omega$  heiÙe  $f \in \text{Abb}(\Omega, \Omega)$  eine **Permutation**  $:\Leftrightarrow f$  ist bijektiv.

Insbesondere ist die identische Abbildung  $\text{Id}_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$  eine Permutation. Ist  $\Omega$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen, so gibt Satz 1.24(a) also Auskunft über die Anzahl aller möglichen Permutationen auf  $\Omega$ :

$$\boxed{\text{Jede endliche Menge } \Omega \text{ mit } |\Omega| = n \text{ hat genau } n! \text{ Permutationen.}} \quad (9.13)$$

**BSP. (1.9.11)** Gegeben sei ein **gleichseitiges Dreieck**, dessen Eckpunkte wir entgegen der üblichen Nomenklatur mit  $1, 2, 3$  bezeichnen.



**Gleichseitiges Dreieck mit Höhen**

Die Menge  $M$  aller Abbildungen, die das gleichseitige Dreieck in sich selbst überführen, besteht genau aus den  $3! = 6$  Permutationen der Eckpunkte. Wir schreiben jede solche Permutation  $\alpha$  in der Form

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad a_i \in \{1, 2, 3\}, \quad a_i \neq a_j.$$

Zum Beispiel geht das gleichseitige Dreieck bei Drehung um  $120^\circ$  in sich selbst über: Die Eckpunkte 1, 2, 3 werden in dieser Reihenfolge auf die Eckpunkte 2, 3, 1 abgebildet. Wir schreiben dafür  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . In der folgenden Tabelle sind die 6 Permutationen  $\alpha_i$  zusammen mit ihrer geometrischen Bedeutung aufgelistet.

| $i$ | $\alpha_i$   | geometrische Bedeutung                      |
|-----|--|---|
| 1   | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | Drehung um $0^\circ$                        |
| 2   | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ | Drehung um $120^\circ$                      |
| 3   | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | Drehung um $240^\circ$                      |
| 4   | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ | Spiegelung an der Höhe durch den Eckpunkt 1 |
| 5   | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | Spiegelung an der Höhe durch den Eckpunkt 2 |
| 6   | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | Spiegelung an der Höhe durch den Eckpunkt 3 |

Es ist nun  $M := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$ . Wir führen auf  $M$  eine Verknüpfung  $\circ$  ein, nämlich die **Hintereinanderausführung** oder das **Kompositum** zweier Permutationen, z.B.:

$$\alpha_2 \circ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \alpha_4.$$

Man sieht sofort, dass  $\circ$  nicht aus  $M$  hinausführt:  $\circ : M \times M \rightarrow M$ . Darüber hinaus überzeugt man sich durch einfaches Nachrechnen, dass  $\circ$  **assoziativ** ist, nicht aber kommutativ. Es gilt zum Beispiel

$$\alpha_4 = \alpha_2 \circ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \alpha_5 \circ \alpha_2 = \alpha_6.$$

Ganz offensichtlich ist die Permutation  $\alpha_1$  das **neutrale Element (Einselement)** bezüglich  $\circ$ , und zu jedem Element  $\alpha_i \in M$  gibt es genau ein Inverses  $\alpha_i^{-1} \in M$ ; zum Beispiel gilt  $\alpha_3^{-1} = \alpha_2$ , wie folgende Rechnung zeigt:

$$\alpha_3 \circ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \circ \alpha_3.$$

Somit gilt das Gruppenaxiom (G3) aus Definition 1.23. Die Gleichungen

$$\alpha \circ x = \beta, \quad y \circ \alpha = \beta$$

haben für jedes Paar  $\alpha, \beta \in M$  jeweils genau eine Lösung  $x, y \in M$ , nämlich  $x = \alpha^{-1} \circ \beta$  und  $y = \beta \circ \alpha^{-1}$ . Wir setzen zum Beispiel  $\alpha := \alpha_3$  und  $\beta := \alpha_6$ . Dann haben wir  $\alpha_3 \circ x = \alpha_6$  genau für  $x = \alpha_2 \circ \alpha_6 = \alpha_5$  sowie  $y \circ \alpha_3 = \alpha_6$  genau für  $y = \alpha_6 \circ \alpha_2 = \alpha_4$ . Damit erfüllt die Algebra  $(M, \circ)$  alle Gruppenaxiome; es liegt eine **endliche Gruppe** vor, für die die folgende Operationstafel gilt:

| $\circ$    | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\alpha_1$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ |
| $\alpha_2$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_1$ | $\alpha_6$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ |
| $\alpha_3$ | $\alpha_3$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_4$ |
| $\alpha_4$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $\alpha_5$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_4$ | $\alpha_3$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
| $\alpha_6$ | $\alpha_6$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_1$ |

*Begründungen* von Satz 1.24: (a) Eine geordnete Probe vom Umfang  $k$  entspricht genau einer Belegung von  $S_1, S_2, \dots, S_k$ . **Ohne Wiederholung:** Es gibt nun genau  $n$  Möglichkeiten,  $S_1$  zu belegen, danach genau  $n-1$  Möglichkeiten,  $S_2$  zu belegen,  $\dots$ , und schließlich genau  $n-(k-1)$  Möglichkeiten,  $S_k$  zu belegen. Aus Satz 1.23 erhalten wir jetzt die Behauptung (9.9).

(b) **Mit Wiederholung:** Für jede Schublade  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , gibt es genau  $n = |\Omega|$  verschiedene Belegungen. Gemäß Satz 1.23 sind dies insgesamt  $n^k$  Belegungen.

(c) Bei ungeordneten Proben vom Umfang  $k$  brauchen offenbar die  $k!$  Permutationen nicht unterschieden zu werden. Mit dem Resultat (a) folgt dann  $(k! \binom{n}{k}) / k! = \binom{n}{k}$  für die Anzahl der ungeordneten Proben ohne Wiederholung.

(d) Durch  $n-1$  Trennstriche erzeugen wir zunächst für jedes der  $n$  Objekte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  der Menge  $\Omega$  ein Feld:

|       |       |         |       |         |           |       |
|-------|-------|---------|-------|---------|-----------|-------|
| $a_1$ | $a_2$ | $\dots$ | $a_j$ | $\dots$ | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
|-------|-------|---------|-------|---------|-----------|-------|

Wird bei der Entnahme der Probe das Objekt  $a_j$  gezogen, so schreiben wir ein Kreuz  $\times$  in das Feld  $a_j$ . Da wir Wiederholung zulassen, können in einem Feld mehrere Kreuze auftreten. Da die Probe den Umfang  $k$  hat, entsteht auf diese Weise eine Folge von  $n+k-1$  Zeichen, nämlich  $k$  Kreuzen und  $n-1$  Strichen, zum Beispiel  $\times \times | \times || \times \times \times$ . Hier ist  $n = 4$ ,  $k = 6$ , und die Objekte  $a_1, a_2$  und  $a_4$  wurden zweimal, einmal bzw. dreimal gezogen. Durch die Vorgabe der  $n-1$  Striche sind bereits  $n-1$  Stellen in der Zeichenkette belegt. Also stellt sich die Frage, auf wieviele Arten die  $k$  Kreuze auf die  $n+k-1$  Zeichenstellen verteilt werden können. Nach (c) geht das auf  $\binom{n+k-1}{k}$  Arten.  $\square$

| Anzahl der Proben von Umfang $k$ aus $\Omega$ mit $ \Omega  = n$ |                     |                    |
|--|---------------------|--------------------|
|  | geordnete Probe     | ungeordnete Probe  |
| ohne Wiederholung ( $k \leq n$ )                                 | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}$     |
| mit Wiederholung ( $k \in \mathbf{N}$ )                          | $n^k$               | $\binom{n+k-1}{k}$ |

**Beachte:** Der Umfang  $k$  von Proben **mit Wiederholung** ist nicht auf  $k \leq n$  beschränkt, da jedes der  $n$  Elemente aus  $\Omega$  in der Wiederholung beliebig oft auftreten kann.



**BSP. (1.9.12)** *"k aus n"-Lotto.* Es sei  $1 \leq k \leq n$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man beim *"k aus n"-Lotto* genau  $k$  Richtige? Zur Beantwortung dieser Frage wird das Lotto als LAPLACE-Experiment gedeutet. Das Ankreuzen von  $k$  Zahlen auf dem Lottoschein entspricht der *"Entnahme einer ungeordneten Probe vom Umfang k aus der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$  ohne Wiederholung"*, und dies ist ein Elementarereignis  $\{\omega\}$  aus dem Ergebnisraum  $\Omega := \bigcup\{\omega\}$ . Wir erhalten aus (9.11)

$$|\Omega| = \binom{n}{k} \Rightarrow P(\omega) = 1 / \binom{n}{k}.$$

Zwei Zahlenbeispiele:

$$\begin{aligned} \text{"6 aus 49"} : |\Omega| &= \binom{49}{6} = 13\,983\,816 \Rightarrow P(\text{"6 Richtige"}) = 0.000\,000\,071\,5, \\ \text{"7 aus 38"} : |\Omega| &= \binom{38}{7} = 12\,620\,256 \Rightarrow P(\text{"7 Richtige"}) = 0.000\,000\,079. \end{aligned}$$

**BSP. (1.9.13)** *Fußballtoto.* Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man genau 11 Richtige getippt? (Hier gehen wir von der hypothetischen Annahme aus, dass die 11 Spielergebnisse rein zufällig bestimmt wurden, zum Beispiel durch Losentscheid, weil wegen schlechter Witterung alle Spiele eines Spieltags abgesagt werden mussten.) Wir deuten das Toto als LAPLACE-Experiment. Das Ankreuzen der 11 Ergebnisse auf den Totozettel entspricht der *"Entnahme einer geordneten Probe vom Umfang 11 aus  $\{0, 1, 2\}$  mit Wiederholung"*, und dies ist ein Elementarereignis  $\{\omega\}$  aus dem Ergebnisraum  $\Omega := \bigcup\{\omega\}$ . Wir erhalten aus (9.10)

$$|\Omega| = 3^{11} = 177\,147 \Rightarrow P(\text{"11 Richtige"}) = 3^{-11} = 0.000\,005\,645.$$

**BSP. (1.9.14)** Eine Gruppe von 15 Studenten erhält ein Freikontingent von 3 Theaterkarten. Wieviele Arten der Kartenvergabe gibt es, wenn

- (a) 3 numerierte Sitzplätze,      (b) 3 unnumerierte Stehplätze

vorliegen? Man unterscheide, ob eine Person

- (i) genau eine Karte,      (ii) mehrere Karten

nehmen kann. Wir verwenden zur Lösung die Aussagen von Satz 1.24:

(ai)  $\hat{=}$  *"Entnahme einer geordneten Probe vom Umfang 3 aus  $\{1, 2, \dots, 15\}$  ohne Wiederholung"*  
 $\stackrel{(9.9)}{\Rightarrow} \frac{15!}{(15-3)!} = 2730$  Möglichkeiten.

(a(ii))  $\hat{=}$  *"Entnahme einer geordneten Probe vom Umfang 3 aus  $\{1, 2, \dots, 15\}$  mit Wiederholung"*  
 $\stackrel{(9.10)}{\Rightarrow} 15^3 = 3375$  Möglichkeiten.

(bi)  $\hat{=}$  *"Entnahme einer ungeordneten Probe vom Umfang 3 aus  $\{1, 2, \dots, 15\}$  ohne Wiederholung"*  
 $\stackrel{(9.11)}{\Rightarrow} \binom{15}{3} = 455$  Möglichkeiten.

(b(ii))  $\hat{=}$  *"Entnahme einer ungeordneten Probe vom Umfang 3 aus  $\{1, 2, \dots, 15\}$  mit Wiederholung"*  
 $\stackrel{(9.12)}{\Rightarrow} \binom{15+3-1}{3} = \binom{17}{3} = 680$  Möglichkeiten.

(Wir wollen zur Formel (9.12) noch eine Plausibilitätsbetrachtung anschließen und nehmen dazu in dem obigen Beispiel die einfachere Situation mit  $n = 3$  Studenten und  $k = 3$  Karten an. Es gibt nur folgende Fälle:

- Einer hat alle 3 Karten : 3 Möglichkeiten;

- Je einer hat 1 Karte : 1 Möglichkeit;
- Einer hat 2 Karten, ein weiterer 1 Karte, der dritte 0 Karten : 6 Möglichkeiten.

In der Summe resultieren  $10 = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3}$  Möglichkeiten.)

**BSP. (1.9.15)**

**Geburtstags-Matching.** In meiner Vorlesung sitzen  $n \geq 1$  Hörer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens 2 Hörer am selben Tag Geburtstag (unter der Annahme, dass Schaltjahre nicht berücksichtigt werden und dass jeder der 365 Tage gleichwahrscheinlich ist)? Wir beschreiben zunächst das zugeordnete LAPLACE-Experiment. Es ist klar, für  $n > 365$  erhält man  $P = 1$ . Jeden Hörer identifizieren wir mit seinem Geburtstag  $a_j$ . Gemäß der Sitzordnung erhalten wir dann ein geordnetes  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  und dieses entspricht der "Entnahme einer geordneten Probe vom Umfang  $n$  aus  $\{1, 2, \dots, 365\}$  mit Wiederholung". Dies sind die Elementarereignisse  $\{\omega\}$  aus dem Ergebnisraum  $\Omega := \bigcup\{\omega\}$ . Wir erhalten aus (9.10)  $|\Omega| = 365^n$ . Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A \hat{=} \text{"Mindestens zwei Elemente des } n\text{-Tupels } \omega \in \Omega \text{ sind gleich"}$ . Dazu betrachten wir das komplementäre Ereignis  $\bar{A} \hat{=} \text{"Alle Elemente sind verschieden" } \hat{=} \text{"geordnete Probe vom Umfang } n \text{ aus } \{1, 2, \dots, 365\} \text{ ohne Wiederholung"}$ . Für  $n \leq 365$  folgt nun aus (9.9):

$$|\bar{A}| = \frac{365!}{(365 - n)!} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{365!}{365^n (365 - n)!}, \quad 1 \leq n \leq 365.$$

Die numerischen Werte der Wahrscheinlichkeiten  $P(A)$  haben wir für die Zahlen  $1 \leq n \leq 100$  in der folgenden Tabelle aufgelistet. Es ist ganz interessant zu wissen, dass bereits ab 23 Hörern mit mehr als 50%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens 2 Hörer am selben Tag Geburtstag haben. Bei 100 Hörern ist dieses Ereignis fast sicher.

| $n$ | $P(A)$   | $n$ | $P(A)$   | $n$ | $P(A)$   | $n$ | $P(A)$   |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|
| 1   | 0.000000 | 26  | 0.598241 | 51  | 0.974432 | 76  | 0.999777 |
| 2   | 0.002740 | 27  | 0.626859 | 52  | 0.978005 | 77  | 0.999824 |
| 3   | 0.008204 | 28  | 0.654461 | 53  | 0.981138 | 78  | 0.999861 |
| 4   | 0.016356 | 29  | 0.680969 | 54  | 0.983877 | 79  | 0.999891 |
| 5   | 0.027136 | 30  | 0.706316 | 55  | 0.986262 | 80  | 0.999914 |
| 6   | 0.040462 | 31  | 0.730455 | 56  | 0.988332 | 81  | 0.999933 |
| 7   | 0.056236 | 32  | 0.753348 | 57  | 0.990122 | 82  | 0.999948 |
| 8   | 0.074335 | 33  | 0.774972 | 58  | 0.991665 | 83  | 0.999960 |
| 9   | 0.094624 | 34  | 0.795317 | 59  | 0.992989 | 84  | 0.999969 |
| 10  | 0.116948 | 35  | 0.814383 | 60  | 0.994123 | 85  | 0.999976 |
| 11  | 0.141141 | 36  | 0.832182 | 61  | 0.995089 | 86  | 0.999982 |
| 12  | 0.167025 | 37  | 0.848734 | 62  | 0.995910 | 87  | 0.999986 |
| 13  | 0.194410 | 38  | 0.864068 | 63  | 0.996604 | 88  | 0.999989 |
| 14  | 0.223103 | 39  | 0.878220 | 64  | 0.997190 | 89  | 0.999992 |
| 15  | 0.252901 | 40  | 0.891232 | 65  | 0.997683 | 90  | 0.999994 |
| 16  | 0.283604 | 41  | 0.903152 | 66  | 0.998096 | 91  | 0.999995 |
| 17  | 0.315008 | 42  | 0.914030 | 67  | 0.998440 | 92  | 0.999997 |
| 18  | 0.346911 | 43  | 0.923923 | 68  | 0.998726 | 93  | 0.999997 |
| 19  | 0.379119 | 44  | 0.932885 | 69  | 0.998964 | 94  | 0.999998 |
| 20  | 0.411438 | 45  | 0.940976 | 70  | 0.999160 | 95  | 0.999999 |
| 21  | 0.443688 | 46  | 0.948253 | 71  | 0.999321 | 96  | 0.999999 |
| 22  | 0.475695 | 47  | 0.954774 | 72  | 0.999453 | 97  | 0.999999 |
| 23  | 0.507297 | 48  | 0.960598 | 73  | 0.999561 | 98  | 0.999999 |
| 24  | 0.538344 | 49  | 0.965780 | 74  | 0.999649 | 99  | 1.000000 |
| 25  | 0.568700 | 50  | 0.970374 | 75  | 0.999720 | 100 | 1.000000 |

---

Bei weitem schwieriger zu bestimmen ist zum Beispiel beim "6 aus 49"-Lotto die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Genau  $k$  Richtige",  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , oder für das Ereignis "Mindestens

*k Richtige*”. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung dieser Probleme ist das **Urnenmodell** von G. PÓLYA (1887-?).

**Urnenmodell.** In einer Urne befinden sich  $N$  Kugeln, darunter  $S$  schwarze,  $1 \leq S < N$ . Die restlichen Kugeln sind weiß. Es werden zwei Zufallsexperimente unterschieden:

(a) **Ziehen ohne Zurücklegen:** Es werden rein zufällig nacheinander  $n$  Kugeln ( $1 \leq n \leq N$ ) aus der Urne gezogen und beiseitegelegt.

(b) **Ziehen mit Zurücklegen:** Es werden rein zufällig nacheinander  $n$  Kugeln ( $n \in \mathbf{N}$ ) aus der Urne gezogen, und jede gezogene Kugel wird vor dem nächsten Zug wieder in die Urne zurückgelegt.

**Satz 1.25** *Beim obigen Urnenmodell werden rein zufällig  $n \leq N$  Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses*

$$A_k \hat{=} \text{”Genau } k \text{ der gezogenen } n \text{ Kugeln sind schwarz”}$$

durch folgende Vorschrift bestimmt:

$$P(A_k) = \frac{\binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \leq k \leq \min\{n, S\}. \quad (9.14)$$

Werden hingegen  $n \in \mathbf{N}$  Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A_k$  durch folgende Vorschrift bestimmt:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n; \quad p := \frac{S}{N}. \quad (9.15)$$

*Begründung:* Wir denken uns die  $N$  Kugeln unterscheidbar, etwa numeriert von 1 bis  $N$  (wie zum Beispiel die Kugeln der Lottozahlen). Die Unterscheidbarkeit ist wichtig beim Ziehen mit Zurücklegen. Zum Beispiel muss das  $n$ -Tupel  $(1, 1, \dots, 1)$  unterscheidbar sein vom  $n$ -Tupel  $(1, 2, \dots, n)$ . Das Unterscheidungsmerkmal ’Schwarz’ bzw. ’Weiß’ berücksichtigen wir in der Numerierung der schwarzen Kugeln von 1 bis  $S$  und der weißen Kugeln von  $S+1$  bis  $N$ .

(i) *Ziehen mit Zurücklegen:* Werden  $n$  Kugeln gezogen, so entspricht dies der ”Entnahme einer geordneten Probe vom Umfang  $n$  aus  $\{1, 2, \dots, N\}$  mit Wiederholung”. Der aus diesen Elementarereignissen gebildete Ereignisraum  $\Omega$  erfüllt gemäß (9.10)  $|\Omega| = N^n$ . Das Ereignis  $A_k$  wird nun in der folgenden Weise zerlegt:

- $B_1 \hat{=} \text{”Ziehe zuerst } k \text{ schwarze Kugeln aus } \{1, 2, \dots, S\} \text{ mit Zurücklegen”} \hat{=} \text{”Entnahme einer geordneten Probe vom Umfang } k \text{ aus } \{1, 2, \dots, S\} \text{ mit Wiederholung”}$ . Es gilt gemäß (9.10)  $|B_1| = S^k$ .
- $B_2 \hat{=} \text{”Ziehe dann } n-k \text{ weiße Kugeln aus } \{S+1, S+2, \dots, N\} \text{ mit Zurücklegen”} \hat{=} \text{”Entnahme einer geordneten Probe vom Umfang } n-k \text{ aus } \{S+1, S+2, \dots, N\} \text{ mit Wiederholung”}$ . Es gilt gemäß (9.10)  $|B_2| = (N-S)^{n-k}$ .
- $B_3 \hat{=} \text{”Verteile schließlich die } k \text{ schwarzen Kugeln auf die } n \text{ Plätze des } n\text{-Tupels”} \hat{=} \text{”Entnahme einer ungeordneten Probe vom Umfang } k \text{ aus } \{1, 2, \dots, n\} \text{ ohne Wiederholung”}$ . Es gilt gemäß (9.11)  $|B_3| = \binom{n}{k}$ .

Der Produktsatz 1.23 liefert jetzt:

$$|A_k| = |B_1||B_2||B_3| = \binom{n}{k} S^k (N - S)^{n-k} = N^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

und schließlich folgt die LAPLACE-Wahrscheinlichkeit

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

(ii) *Ziehen ohne Zurücklegen*: Wir erklären  $\Omega, B_1, B_2, B_3$  wie in (i), wobei in  $\Omega, B_1, B_2$  "mit Wiederholung" ersetzt wird durch "ohne Wiederholung". Gemäß Satz 1.24 gilt nun:

$$|\Omega| = n! \binom{N}{n}, \quad |B_1| = k! \binom{S}{k}, \quad |B_2| = (n-k)! \binom{N-S}{n-k}.$$

Mithin folgt

$$|A_k| = |B_1||B_2||B_3| = n! \binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k}.$$

Wir erhalten das behauptete Resultat

$$P(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \binom{S}{k} \binom{N-S}{n-k} / \binom{N}{n}.$$

**BSP. (1.9.16)** "7 aus 38"-Lotto (ehemaliges Mittwochs-Lotto). Es sind die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse zu bestimmen:

(i)  $A_k \hat{=} \text{"Genau } k \text{ Richtige getippt"}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 7$ ,

(ii)  $B_k \hat{=} \text{"Mindestens } k \text{ Richtige getippt"}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 7$ .

Wir interpretieren das Lotto als Urnenmodell mit  $N = 38$  Kugeln. Die 7 von der Lottogesellschaft gezogenen Kugeln entsprechen nun den  $S = 7$  schwarzen Kugeln in der Urne. Das Ankreuzen der 7 Zahlen auf dem Tippzettel entspricht dann dem Ziehen von  $n = 7$  Kugeln ohne Zurücklegen. Aus Satz 1.25 resultiert somit die folgende Lösung der Aufgabe (i):

$$P(A_k) = \binom{7}{k} \binom{31}{7-k} / \binom{38}{7}.$$

Numerische Werte können der folgenden Tabelle entnommen werden:

| $k$ | $P(A_k)$      | $k$ | $P(A_k)$      |
|-----|---------------|-----|---------------|
| 0   | 0.208 361 463 | 4   | 0.012 466 070 |
| 1   | 0.408 388 467 | 5   | 0.000 773 756 |
| 2   | 0.282 730 477 | 6   | 0.000 017 195 |
| 3   | 0.087 262 493 | 7   | 0.000 000 079 |

(ii) Es ist zunächst klar, dass  $B_k = A_k \cup A_{k+1} \cup \dots \cup A_7$  gilt und dass die Ereignisse  $A_k$  und  $A_j$  für  $j \neq k$  disjunkt sind. Bei solchen Ereignissen addieren sich die Wahrscheinlichkeiten:

$$P\left(\bigcup_{j=k}^n A_j\right) = \sum_{j=k}^n P(A_j).$$

Diese Beziehung wird mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Hilfsmitteln begründet, die wir hier nicht bereitstellen wollen. Aus (i) erhalten wir somit die folgende Lösung der Aufgabe (ii):

$$P(B_k) = \sum_{j=k}^7 P(A_j) = \left( \sum_{j=k}^7 \binom{7}{k} \binom{31}{7-k} \right) / \binom{38}{7}.$$

Zum Beispiel errechnet man aus den Daten der obigen Tabelle den folgenden Zahlenwert  $P(B_5) = 0.000\,791\,030 \doteq 0.08\%$ . Das heißt, in 8 von 10 000 Fällen kann man damit rechnen, 5 Richtige getippt zu haben. (Bei zwei Tippreihen pro Woche stellt sich etwa alle 12 Jahre ein solches Erfolgserlebnis ein!)

**BSP. (1.9.17)** Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt beträgt  $p = 0.514$ . Eine Familie hat 5 Kinder. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten für folgende Verteilungen:

- (i) 2 Mädchen und 3 Jungen,      (ii) 5 Mädchen.

Wir lösen die Aufgabe unter Heranziehung des Urnenmodells. Von  $N$  Kugeln (entsprechend der Gesamtzahl aller Geburten) sind  $S$  schwarz (Anzahl der Knabengeburt).  $N$  und  $S$  brauchen nicht bekannt zu sein, da der Quotient  $p = S/N = 0.514$  gegeben ist. Greift man nun willkürlich 5 Kinder heraus, so entspricht dies dem Ziehen von  $n = 5$  Kugeln mit Zurücklegen aus der Urne. Die Ereignisse  $A_k \doteq$  "Genau  $k$  der  $n$  Kinder sind Knaben" haben gemäß Satz 1.25 die Wahrscheinlichkeit  $P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . Wir erhalten also folgende Lösungen:

- (i)  $n = 5, k = 3$  :  $P(A_3) = \binom{5}{3} (0.514)^3 (0.486)^2 \doteq 0.3207$ ,  
(ii)  $n = 5, k = 0$  :  $P(A_0) = \binom{5}{0} (0.514)^0 (0.486)^5 \doteq 0.0271$ .

Abschließend teilen wir noch ohne Beweis eine Variante des Belegungsproblems mit.

**Satz 1.26** *Es seien  $k$  Schubladen  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , und dazu natürliche Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_k$  sowie  $n := n_1 + n_2 + \dots + n_k$  Objekte gegeben. Dann gibt es*

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \tag{9.16}$$

*Möglichkeiten, diese  $n$  Objekte so auf die  $k$  Schubladen zu verteilen, dass  $n_1$  Objekte in  $S_1$ ,  $n_2$  Objekte in  $S_2$ , ..., schließlich  $n_k$  Objekte in  $S_k$  liegen.*

**BSP. (1.9.18)** Beim Skatspiel sind  $S_1, S_2, S_3$  die drei Spieler, und  $S_4$  ist der Skat. Jeder Spieler erhält  $n_1 = n_2 = n_3 = 10$  Karten; in den Skat wandern  $n_4 = 2$  Karten. Es gibt  $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 32$  Spielkarten. Gemäß Satz 1.26 erlaubt somit das Skatspiel

$$\frac{32!}{10!10!10!2!} = 2\,753\,294\,408\,504\,640$$

verschiedene Kartenverteilungen.

# Kapitel 2

## Komplexe Zahlen

### 2.1 Die komplexen Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen

Wir beginnen mit einer motivierenden

**Definition 2.1** *Gleichungen in der Form*

$$\boxed{x^2 + ax + b = 0 \quad \text{mit gegebenen Zahlen } a, b \in \mathbf{R}} \quad (1.1)$$

heißen **quadratische Gleichungen** für eine gesuchte Zahl  $x$ . Jedes  $x \in \mathbf{R}$ , für welches die Gleichung (1.1) gilt, heiße eine **reelle Lösung**. Durch Addition von  $-b + \frac{a^2}{4}$  auf beiden Seiten von (1.1) erscheint links eine Binompotenz, so dass folgende Gleichungen äquivalent mit (1.1) sind:

$$\boxed{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b} \quad y := x + a/2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y^2 = \frac{1}{4}(a^2 - 4b)}. \quad (1.2)$$

Der Ausdruck  $\frac{a^2}{4}$  heißt **quadratische Ergänzung**.

**Bemerkung 2.1** (a) Gilt  $\boxed{a^2 - 4b > 0}$ , so hat die Gleichung (1.1) genau zwei reelle Lösungen, nämlich

$$x_+ := -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, \quad x_- := -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}, \quad \text{kurz: } \boxed{x_{\pm} := \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})}.$$

(b) Gilt  $\boxed{a^2 - 4b = 0}$ , so hat die Gleichung (1.1) genau eine reelle Lösung, nämlich  $\boxed{x_0 := -\frac{a}{2}}$ .

(c) Gilt  $\boxed{a^2 - 4b < 0}$ , so ist die Gleichung (1.1) in  $\mathbf{R}$  **nicht lösbar**. □

Um im Falle (c) einen Ausweg zu finden, konstruieren wir einen *Erweiterungskörper* von  $\mathbf{R}$  derart, dass die Gleichung (1.1) ohne Einschränkungen an  $a, b \in \mathbf{R}$  stets lösbar ist. In diesem Körper gibt es **keine** lineare Ordnung  $\leq$  mit den Eigenschaften aus Definition 1.8.

Wir erinnern daran, dass wir bei der Erweiterung der ganzen Zahlen  $\mathbf{Z}$  auf die rationalen Zahlen  $\mathbf{Q}$  die Brüche  $r := \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$  eingeführt hatten. Da jeder Bruch eindeutig durch die beiden Zahlen  $p, q$  festgelegt ist, können wir  $\mathbf{Q}$  auch deuten als die Menge aller geordneten Zahlenpaare  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ . Wir hatten gezeigt, dass die so definierte Zahlenmenge mit der bekannten Addition  $+$  und der Multiplikation  $\cdot$  ein Körper ist. Bei der vorzunehmenden Zahlbereichserweiterung von  $\mathbf{R}$  gehen wir jetzt in analogen Schritten vor:

**Definition 2.2** Auf der Menge der geordneten Zahlenpaare  $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} =: \mathbf{R}^2$  seien die zwei Verknüpfungen  $+$  (**Addition**) und  $\cdot$  (**Multiplikation**) wie folgt erklärt:

$$\begin{array}{l} \text{"+" : } \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \quad := \quad (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ \text{"\cdot" : } \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \quad := \quad (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{array} \quad (1.3)$$

Mit einiger Rechenarbeit verbunden, aber durchaus elementar beweisbar ist folgender Satz:

**Satz 2.1** In der Algebra  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, +, \cdot)$  mit den gemäß (1.3) definierten Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  gelten die Körperaxiome (A1)–(A3) und (M1)–(M3) sowie (D) aus Satz 1.8. Dabei ist

$(0, 0)$  **neutrales Element** bezüglich  $+$ ,  $(1, 0)$  **neutrales Element** bezüglich  $\cdot$ .

*Begründung:* Es sollen hier nur die Axiome (A3) und (M3) gezeigt werden; die anderen Axiome erhält man ganz analog.

(A3): Die Gleichung  $(a, b) + z = (c, d)$  hat die Lösung  $z = (c - a, d - b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , und für  $c = a, d = b$  folgt  $z = (0, 0)$  als neutrales Element der Addition.

(M3): Die Gleichung  $(a, b) \cdot z = (c, d)$  hat für  $(a, b) \neq (0, 0)$  die Lösung

$$z = \left( \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \right) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

und für  $c = a, d = b$  folgt  $z = (1, 0)$  als neutrales Element der Multiplikation.  $\square$

**BSP. (2.1.1)** (i) **Inverses Element der Addition:** Die Gleichung  $(a, b) + z = (0, 0)$  hat gemäß (A3) die Lösung

$$z = (-a, -b) =: -(a, b),$$

zum Beispiel:  $(\frac{3}{4}, -7) - (\frac{1}{8}, 10) := (\frac{3}{4}, -7) + (-\frac{1}{8}, -10) = (\frac{3}{4} - \frac{1}{8}, -7 - 10) = (\frac{5}{8}, -17)$ .

(ii) **Inverses Element der Multiplikation:** Die Gleichung  $(a, b) \cdot z = (1, 0)$  hat für  $(a, b) \neq (0, 0)$  gemäß (M3) die Lösung

$$z = (a, b)^{-1} =: \frac{1}{(a, b)} := \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

zum Beispiel:  $(\frac{3}{4}, -7) : (\frac{1}{8}, 10) = (\frac{3}{4}, -7) \cdot \frac{1}{(\frac{1}{8}, 10)} = (\frac{3}{4}, -7) \cdot \left( \frac{8}{6401}, -\frac{640}{6401} \right) = \left( -\frac{4474}{6401}, -\frac{536}{6401} \right)$ .

Nach diesen Vorbetrachtungen wird die folgende Definition sinnvoll:

**Definition 2.3** Die Menge  $\mathbf{C} := \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , versehen mit den in (1.3) erklärten algebraischen Operationen  $+$  und  $\cdot$ , heie **Körper der komplexen Zahlen**.

An dieser Stelle ist es noch nicht erkennbar, dass  $\mathbf{C}$  eine Erweiterung des Körpers  $\mathbf{R}$  ist; dies gelingt erst, wenn  $\mathbf{R}$  mit einer geeigneten Teilmenge von  $\mathbf{C}$  identifiziert wird. Dazu betrachten wir die **Projektion** von  $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$  auf die erste Komponente

$$\mathbf{R}_{\mathbf{C}} := \{z \in \mathbf{C} : z = (a, 0)\} \subset \mathbf{C}.$$

In  $\mathbf{R}_{\mathbf{C}}$  gelten die Operationen  $+$  und  $\cdot$  wie in  $\mathbf{R}$ :  $(a_1, 0) \dot{+} (a_2, 0) = (a_1 \dot{+} a_2, 0)$ , und deshalb macht die folgende Definition einen Sinn:

**Definition 2.4** (a) Wir setzen  $(a, 0) := a$  und identifizieren so die Menge  $\mathbf{R}_{\mathbf{C}} \subset \mathbf{C}$  mit  $\mathbf{R}$ .

(b) Das Element  $(0, 1) \notin \mathbf{R}_{\mathbf{C}}$  heie **imaginäre Einheit**, bezeichnet mit  $i$ ;  $i := (0, 1)$ .

**Satz 2.2** (a) Es gilt für jedes  $z \in \mathbf{C}$  die Darstellung  $z = x + iy$  mit reellen Zahlen  $x, y \in \mathbf{R}$ , und somit

$$\mathbf{C} = \{z : z = x + iy, x, y \in \mathbf{R}\}.$$

(b) Es gilt  $i^2 = -1$ , das heißt, die Gleichung  $z^2 = -1$  hat in  $\mathbf{C}$  mindestens die Lösung  $z = i$ .

*Begründung:* (a) Wir haben  $z = (x, y) \in \mathbf{C}$  genau, wenn  $z = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$  oder äquivalent  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbf{R}$ .

(b) Es gilt  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ . □

Die Darstellung  $z = x + iy$  hat für das formale Rechnen den Vorteil, dass man mit ihr genauso wie im Reellen rechnen kann – lediglich unter Beachtung der zusätzlichen Rechenregel  $i^2 = -1$ . Mit anderen Worten, die oben eingeführte Multiplikation  $\cdot$  darf wieder vergessen werden!

**Merke:**  $\mathbf{C}$  ist ein Körper, der **nicht geordnet** ist. Die Ordnungsaxiome für  $\leq$  können in  $\mathbf{C}$  nicht gelten. Zum Beispiel müsste aus  $i \neq 0$  nach den Rechenregeln der Ordnungsrelation  $-1 = i^2 > 0$  gelten, was offenkundig widersprüchlich ist.

Die folgenden Begriffe muss man sich unbedingt einprägen:

Für jede komplexe Zahl  $z = x + iy \in \mathbf{C}$  heiße

- $x =: \operatorname{Re} z$  der **Realteil** von  $z$ ,
- $y =: \operatorname{Im} z$  der **Imaginärteil** von  $z$ ,
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  der **Betrag** von  $z$ ,
- $\bar{z} := x - iy$  die zu  $z$  **konjugiert komplexe Zahl**.

Häufig setzt man auch

$$\|z\| := |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2},$$

und nennt  $\|z\|$  die **Norm** von  $z \in \mathbf{C}$ . Für  $\|z\|$  gelten die Eigenschaften (N1)–(N3) aus Satz 1.14, nämlich:

(N1)  $\|z\| \geq 0$  und ( $\|z\| = 0$  genau für  $z = 0$ ).

Klar,  $z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0$  und  $y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \|z\| = 0$ .

(N2)  $\|\lambda z\| = |\lambda| \|z\| \forall \lambda \in \mathbf{C}$ .

Setzt man  $\lambda := \sigma + i\tau$ , so ist  $\lambda z = x\sigma - y\tau + i(y\sigma + x\tau)$ . Und hieraus folgt

$$\|\lambda z\| = \sqrt{(x\sigma - y\tau)^2 + (y\sigma + x\tau)^2} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| \|z\|.$$

(N3)  $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| \forall z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbf{C} \forall z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbf{C}$ .

Wir verwenden die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung aus Satz 1.13. Es gilt  $x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \|z_1\| \|z_2\|$ , und hiermit folgt

$$\|z_1 + z_2\|^2 = \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 + 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \leq (\|z_1\| + \|z_2\|)^2.$$



Wir haben hier bereits Gebrauch gemacht von den Formeln der arithmetischen Operationen für  $z_1 = x_1 + iy_1$  und  $z_2 = x_2 + iy_2$ :

**Addition in  $\mathbf{C}$ :**

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

**Multiplikation in  $\mathbf{C}$ :**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

**Division in  $\mathbf{C}$  für  $z_2 \neq 0$  ( $\Leftrightarrow \bar{z}_2 \neq 0$ ):**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Wir stellen nachfolgend weitere Rechenregeln für komplexe Zahlen  $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$  zusammen.

- (a)  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z});$
- (b)  $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ für } z_2 \neq 0;$
- (c)  $|z| = |\bar{z}|, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2| \geq 0;$
- (d)  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ für } z_2 \neq 0;$
- (e)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$
- (f)  $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|, \quad z_k \in \mathbf{C}. \quad \text{(Verallg. Dreiecksungleichung)}$

**BSP. (2.1.2)**

**Arithmetisches Rechnen mit komplexen Zahlen**, z.B. mit  $z_1 := 2 + 5i, z_2 := -1 + 2i$ :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 - 1) + i(5 + 2) = 1 + 7i, \\ z_1 - z_2 &= (2 + 1) + i(5 - 2) = 3 + 3i, \\ z_1 z_2 &= (-2 - 10) + i(4 - 5) = -12 - i, \\ |z_2| &= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(-2 + 10) + i(-4 - 5)}{5} = \frac{8 - 9i}{5}. \end{aligned}$$

**BSP. (2.1.3)**

**Potenzen von  $z$ .**

$$\begin{aligned} z^0 &:= 1 \quad \forall z \in \mathbf{C}, \\ z^n &= (x + iy)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (iy)^k \quad \forall z \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}, \\ z^{-n} &:= \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \forall 0 \neq z, n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Zum Beispiel gelten  $i^{21} = i(i^2)^{10} = i(-1)^{10} = i, i^{90} = (i^2)^{45} = (-1)^{45} = -1$ . Allgemein hat man vier Fallunterscheidungen für  $k \in \mathbf{N}$ :

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Es gilt ferner

$$\boxed{|i| = |\bar{i}| = 1, \quad \frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = -i.}$$

**Beachte:** Die Berechnung der Potenzen  $z^n$  mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes mag für  $n = 1, 2, 3$  gerade noch angehen; zum Beispiel prüft man einfach nach:

$$(2 + 5i)^3 = 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i.$$

Für höhere Potenzen wird dieses Verfahren schnell unübersichtlich und aufwendig. Wir stellen ein wesentlich einfacheres Verfahren in Abschnitt 2.2 vor.

**BSP. (2.1.4) Quadratwurzeln.** Die Gesamtheit der Lösungen  $z \in \mathbf{C}$  der quadratischen Gleichung  $z^2 = c = (a + ib) \in \mathbf{C}$  ist zu bestimmen. Wir zeigen hier **einen** möglichen Weg auf, der von dem *Ansatz*  $z = x + iy$  ausgeht und nach dem Einsetzen in  $z^2 = c$  auf beiden Seiten der Gleichung Real- und Imaginärteile abgleicht. Wir zeigen dies exemplarisch für  $c := -21 - 20i$ . Zunächst sind die beiden Gleichungen  $z^2 = -21 - 20i$  und  $x^2 - y^2 + 2ixy = -21 - 20i$  äquivalent. Vergleich der Real- und Imaginärteile liefert:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 = -21 & \stackrel{(*)}{\Rightarrow} & (x^2 - y^2)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = 441 \\ 2xy = -20 & \stackrel{(*)}{\Rightarrow} & 4x^2y^2 = 400 \\ \hline x^2 + y^2 = 29 & \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} & (x^2 + y^2)^2 = 841 \\ \hline 2x^2 = 8 & \Leftrightarrow & \boxed{x = \pm 2, y = -10/x = \mp 5} \end{array}$$

Wir haben auf diese Weise die zwei komplexen Zahlen  $\boxed{z_{\pm} := \pm(2 - 5i)}$  bestimmt. Da wir an der Stelle (\*) die Äquivalenz der Aussagen unterbrochen haben (beachte:  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ , nicht aber  $a = b \Leftarrow a^2 = b^2$ ), müssen wir die Richtigkeit der gefundenen Lösungen noch durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung bestätigen:

$$z_+^2 = (2 - 5i)(2 - 5i) = (4 - 25) + i(-10 - 10) = -21 - 20i = (-z_+)^2 = z_-^2.$$

(Wir bemerken zur Äquivalenz bei (\*\*): Die zweite Lösung von  $(x^2 + y^2)^2 = 841$ , nämlich  $x^2 + y^2 = -29$ , kann nicht mit reellen Zahlen  $x, y$  erreicht werden!)

Wir geben abschließend eine allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen an. Dabei gelte  $\text{csign}(b) := 1$  für  $b \geq 0$  und  $\text{csign}(b) := -1$  für  $b < 0$ :

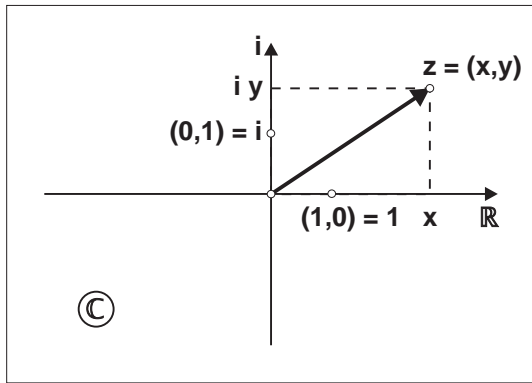
$$\boxed{z^2 = a + ib \Leftrightarrow z_{\pm} = \pm \left[ \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} + i \text{csign}(b) \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)} \right].}$$

Nach dem Verfahren von BSP. (2.1.4) kann man prinzipiell auch  $z^3 = a + ib$  unter Verwendung des Ansatzes  $z = x + iy$  und der binomischen Formel lösen. Da dies jedoch sehr mühsam ist und bei höheren Potenzen nicht mehr durchführbar wird, werden wir ein einfacheres und allgemeingültiges Verfahren in Abschnitt 2.3 vorstellen.

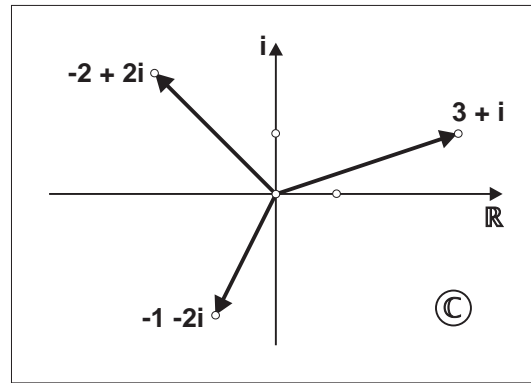
## 2.2 Die GAUSSsche Zahlenebene. Polardarstellung komplexer Zahlen

Eine **geometrische Interpretation** der komplexen Zahlen  $\mathbf{C}$  ergibt sich, wenn man auf die Darstellung von  $z = x + iy$  als geordnetes Paar  $z = (x, y)$  reeller Zahlen  $x, y \in \mathbf{R}$  zurückgreift.

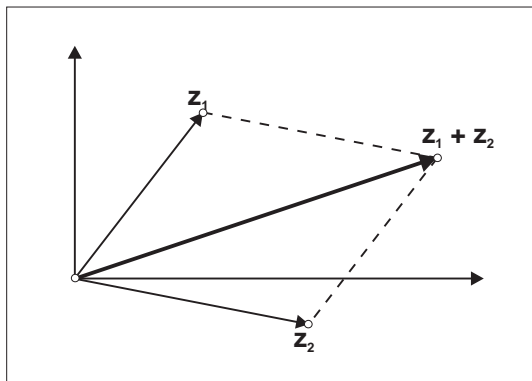
Solche Paare stellen Punkte der **EUKLIDISCHEN Ebene** dar. Es war die Idee von C.F. GAUSS (1777–1855), die reelle Zahl  $y$  in "i-Einheiten" aufzutragen, hingegen die Zahl  $x$  in "1-Einheiten".



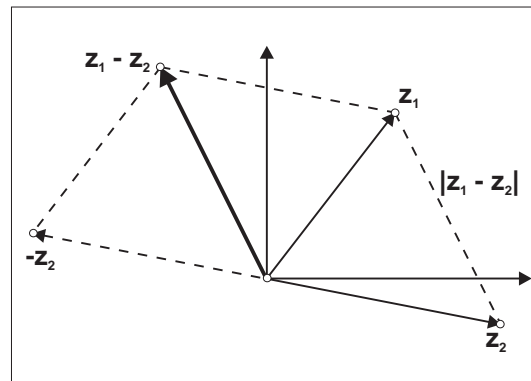
GAUSSsche Zahlenebene



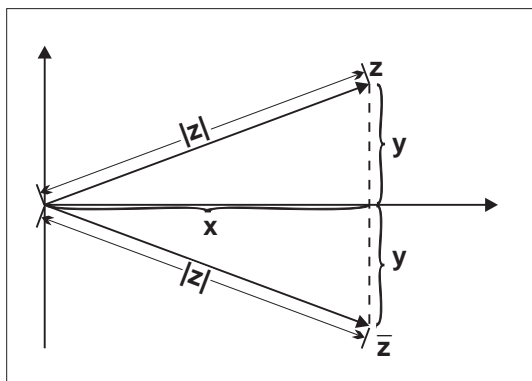
Darstellung komplexer Zahlen



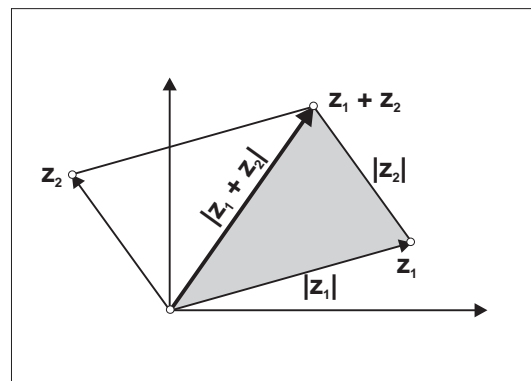
Summe zweier Zahlen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$



Differenz zweier Zahlen  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$



Betrag und konjugierte Zahl von  $z \in \mathbb{C}$



Dreiecksungleichung

**Bemerkung 2.2** Wie im Reellen gibt die **Norm**  $\|z\|$  oder der Betrag  $|z|$  einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ihren **EUKLIDISCHEN Abstand** vom Ursprungspunkt  $0 \in \mathbb{C}$  an. Bezeichnen wir wieder mit

$$d(z_1, z_2) := \|z_1 - z_2\| = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

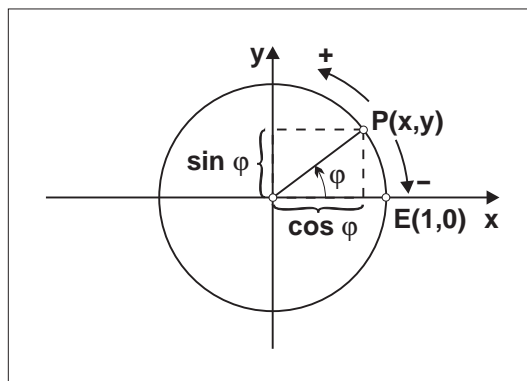
die **Distanz** zweier Punkte  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , so erfüllt die "Funktion"  $d(\cdot, \cdot) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty)$  die in Satz 1.15 formulierten Bedingungen (M1)–(M3) einer Metrik.  $\square$

Nachfolgend werden elementare Kenntnisse der ebenen Geometrie und der Trigonometrie aus der Schulmathematik vorausgesetzt, das heißt insbesondere, Vertrautheit mit den Symbolen

der trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  usw.

## Polardarstellung komplexer Zahlen

**Winkelmessung** ( $\curvearrowright$ -Messung). Die Bewegung eines Punktes  $P(x, y)$  auf der **Einheitskreislinie** wird unter Berücksichtigung der Bewegungsrichtung mit Hilfe des Winkels  $\varphi$  beschrieben.



**Winkelmessung**

**Definition 2.5** (a) *Bewegt sich  $P(x, y)$  auf der Einheitskreislinie entgegen dem Uhrzeigersinn, so heie diese Richtung **mathematisch positiv**. Die entgegengesetzte Richtung heie **mathematisch negativ**.*

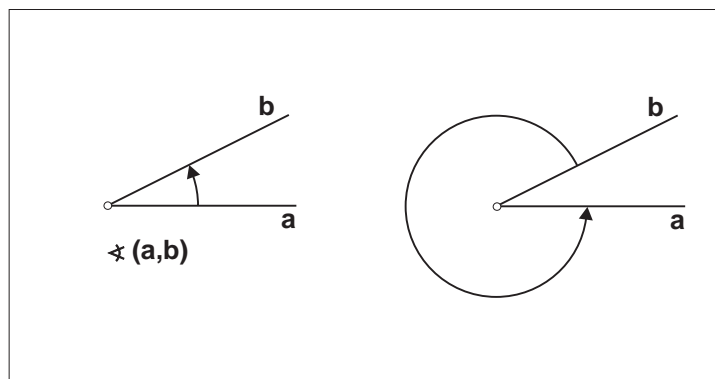
(b) *Ein in mathematisch positiver Richtung gemessener Winkel  $\varphi$  hat ein **positives Winkelmaß**.*

(c) *Die Einheiten des Winkelmaßes sind entweder das **Gradmaß** oder das **Bogenmaß**. Die Vollkreislinie hat das Gradmaß  $360^\circ$  bzw. das Bogenmaß  $2\pi$ . Dem Bogenmaß entspricht die Länge des über einem Winkel  $\varphi$  liegenden Kreisbogenstckes der Einheitskreislinie. Es gelten folgende Umrechnungsformeln:*

| Gradmaß  |               | Bogenmaß                                       |
|--|---------------|--|
| $\alpha^\circ$                                 | $\Rightarrow$ | $\varphi = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \pi$ |
| $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \varphi$ | $\Leftarrow$  | $\varphi$                                      |

*Zum Beispiel:  $180^\circ \hat{=} \pi$ ,  $90^\circ \hat{=} \pi/2$ ,  $60^\circ \hat{=} \pi/3$ ,  $45^\circ \hat{=} \pi/4$ ,  $30^\circ \hat{=} \pi/6$ ,  $1^\circ \hat{=} \pi/180 \hat{=} 0.017$ .*

**Bemerkung 2.3** Winkel werden häufig durch Angabe der beiden Schenkel  $a, b$  gekennzeichnet:



**Orientierung beachten:**  $\curvearrowright(a, b) \neq \curvearrowright(b, a)$

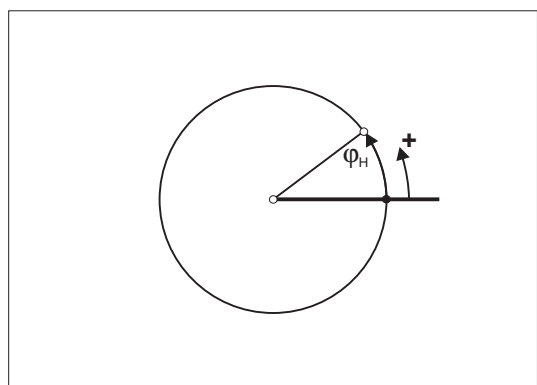
Allerdings ist  $\sphericalangle(a, b)$  durch die Angabe der Schenkel  $a, b$  nur bis auf additive Vielfache von  $2\pi$  festgelegt. Will man zum Beispiel **Bewegungen** beschreiben, bei denen der Punkt  $P(x, y)$  die Einheitskreislinie mehrfach in positiver oder negativer Richtung durchläuft, so müssen Winkel  $\varphi \geq 2\pi$  und  $\varphi < 0$  zugelassen werden. Der Wertebereich umfasst die Gesamtheit der reellen Zahlen  $-\infty < \varphi < +\infty$ , und die Winkelangabe  $\varphi = \sphericalangle(a, b)$  ist nun unendlich vieldeutig. Setzen wir

$$R := \{(\varphi, \psi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \varphi \equiv \psi \pmod{2\pi}\} = \{(\varphi, \psi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \exists k \in \mathbf{Z} \text{ mit } \psi - \varphi = 2\pi k\},$$

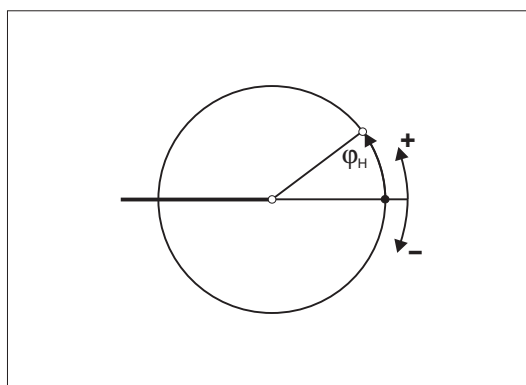
so rechnet man nach, dass  $R$  eine **Kongruenzrelation** auf der abelschen Gruppe  $(\mathbf{R}, +)$  ist, vgl. Definition 1.19. Winkelmessung induziert mit anderen Worten auf  $\mathbf{R}$  eine Partition durch Äquivalenzklassen

$$[\varphi_H]_R := \{\varphi \in \mathbf{R} : \varphi \equiv \varphi_H \pmod{2\pi}\} = \{\varphi_H + 2\pi k : k \in \mathbf{Z}\}, \quad \varphi_H \in I,$$

worin  $I \subset \mathbf{R}$  ein halboffenes Intervall der Länge  $2\pi$  bezeichnet. Man nennt  $\varphi_H \in I$  den **Hauptwert**, wobei für die Festlegung von  $I$  zwei Standards üblich sind:



**Standard (A):**  $0 \leq \varphi_H < 2\pi$



**Standard (B):**  $-\pi < \varphi_H \leq \pi$

Zum Beispiel:

$$\left[\frac{21\pi}{4}\right]_R \ni \varphi_H = \begin{cases} \frac{5\pi}{4} & : \text{Standard (A)}, \\ -\frac{3\pi}{4} & : \text{Standard (B)}. \end{cases}$$

Stets gilt jedoch:

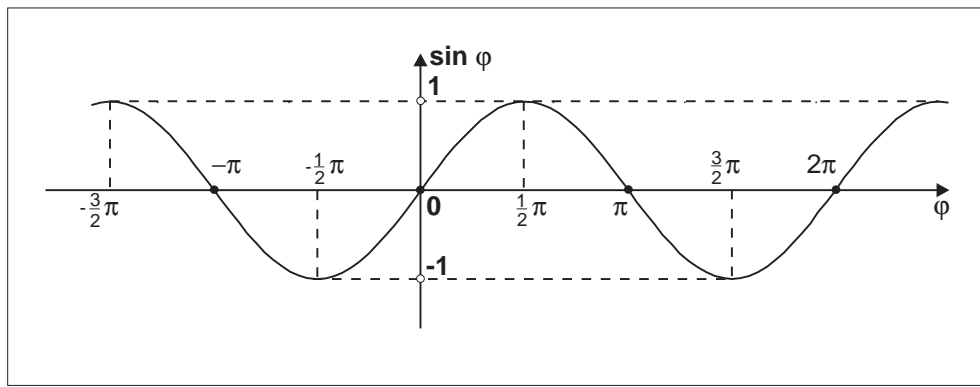
$$\varphi_H - \varphi = 2k\pi \quad \text{für ein } k \in \mathbf{Z}.$$

**Bemerkung 2.4** Bei Verwendung der Schreibweise  $\varphi = \sphericalangle(a, b)$  ist immer die Äquivalenzklasse  $[\varphi]_R$  gemeint, deren Repräsentant  $\varphi$  ist. Die  $2\pi$ -Vielfachen sind geometrisch unbedeutend, da sie in der Zeichnung nicht gesehen werden. Sie werden aber bei den komplexen Wurzeln relevant, die wir weiter unten studieren werden.  $\square$

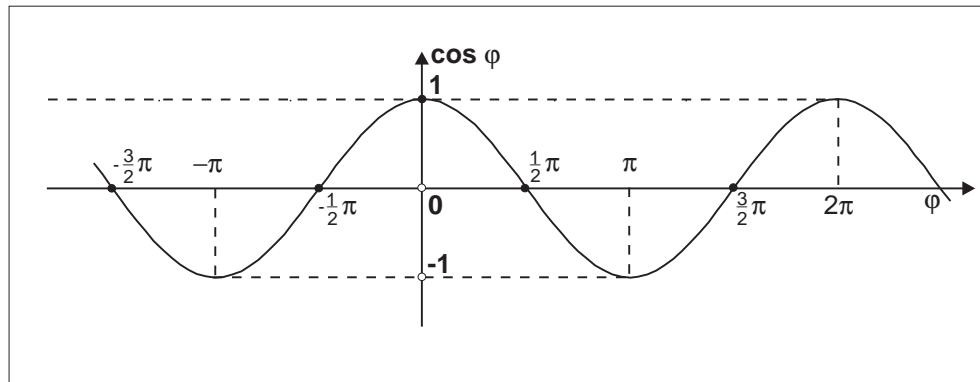
Durch Projektion des Punktes  $P(x, y)$  erhält man in bekannter Weise die von  $\varphi$  abhängigen **Winkelfunktionen**

$$\varphi \mapsto \sin \varphi =: y \quad (y\text{-Koordinate oder Ordinate von } P(x, y)) \quad \text{”Sinus von } \varphi\text{”},$$

$$\varphi \mapsto \cos \varphi =: x \quad (x\text{-Koordinate oder Abszisse von } P(x, y)) \quad \text{”Cosinus von } \varphi\text{”}.$$



Der Graph der Sinus-Funktion



Der Graph der Cosinus-Funktion

**Sinus** und **Cosinus** sind auf ganz  $\mathbf{R}$  erklärte reelle Funktionen, für die die folgenden Rechenregeln gelten:

- (a)  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , (Satz des PYTHAGORAS)
- (b)  $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$ ,  $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ , (Parität ungerade/gerade)
- (c)  $\sin(\varphi + 2k\pi) = \sin \varphi$ ,  $\cos(\varphi + 2k\pi) = \cos \varphi \quad \forall k \in \mathbf{Z}$ , (Periodizität)
- (d)  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ , (Additionstheorem)  
 $(\Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha)$ ,
- (e)  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ , (Additionstheorem)  
 $(\Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$ ,
- (f) Ist  $a^2 + b^2 = 1$  für  $a, b \in \mathbf{R}$ , so existiert ein  $\varphi \in \mathbf{R}$  mit  $a = \cos \varphi$  und  $b = \sin \varphi$ . Dabei ist  $\varphi$  eindeutig bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt. Das heißt, der Hauptwert  $\varphi_H$  ist eindeutig bestimmt.

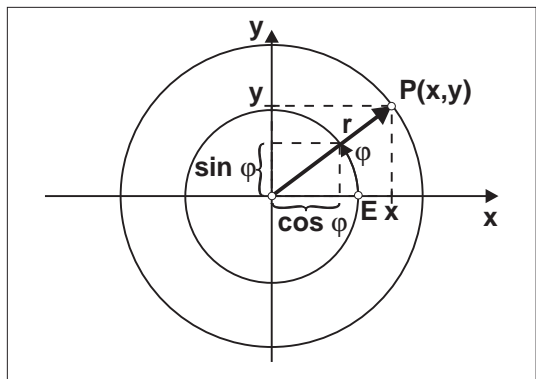
Man berechnet  $\cos \varphi, \sin \varphi$  bzw.  $\varphi_H$  in (f) entweder aus  $\sin / \cos$ -Tabellen oder in unserem Computer-Zeitalter einfacher mit dem Taschenrechner.

**BSP. (2.2.1)** Wir verwenden die Additionstheoreme zur Berechnung von **Amplitude**  $A$  und **Phasenverschiebung**  $\varphi_H$  der **Schwingung**  $x := 3 \cos \psi + 4 \sin \psi =: A \cos(\psi - \varphi_H)$ .

$$x = \sqrt{3^2 + 4^2} \left[ \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cos \psi + \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \sin \psi \right].$$

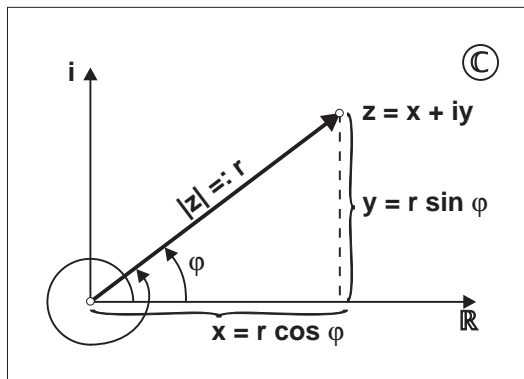
Setzen wir hier  $a := 3/\sqrt{3^2 + 4^2} = 3/5$  und  $b := 4/\sqrt{3^2 + 4^2} = 4/5$ , so gilt  $a^2 + b^2 = 1$ . Also gibt es genau einen Hauptwert  $\varphi_H \in [0, 2\pi)$  mit  $\cos \varphi_H = 3/5$  und  $\sin \varphi_H = 4/5$ . Mit dem Taschenrechner ermittelt man  $\varphi_H \doteq 0.9273$ . Nun erhalten wir mit dem Additionstheorem (e)

$$x = 5 (\cos \varphi_H \cos \psi + \sin \varphi_H \sin \psi) = 5 \cos(\psi - \varphi_H).$$



**Strahlensatz:**  $\frac{x}{\cos \varphi} = \frac{r}{1} = \frac{y}{\sin \varphi}$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$



**GAUSSsche Zahlenebene**

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

**Definition 2.6** Die Darstellung  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  der komplexen Zahl  $z = x + iy$  mit

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

heiße **Polardarstellung** von  $z$ . Der Winkel  $\varphi$  heißt das **Argument** von  $z$ , geschrieben  $\varphi = \arg z$  für  $z \neq 0$ . Für  $z = 0$  ist **kein** Argument erklärt.

**Bemerkung 2.5** (a) Das Argument  $\varphi = \arg z$  der komplexen Zahl  $z$  ist **mehrdeutig**; hingegen ist der Hauptwert  $\arg_H z := \varphi_H$  eindeutig festgelegt. Es gilt  $\arg z = \arg_H z + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

(b) Jede komplexe Zahl  $z = x + iy \in \mathbf{C}$  ist durch Vorgabe von Betrag  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  und Argument  $\varphi_H = \arg_H z$  eindeutig festgelegt. Denn es gibt genau ein  $\varphi_H$  mit

$$\cos \varphi_H = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi_H = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}.$$

Die Darstellung von  $\varphi_H$  kann erst im Rahmen der **Umkehrfunktionen** (Ingenieur-Mathematik II) verständlich erfolgen. Wir geben hier eine praktikable Erklärung unter Verwendung der Taschenrechnerfunktion  $\tan^{-1} \equiv \arctan$ , wobei wir den Standard (A) ( $0 \leq \varphi_H < 2\pi$ ) zugrundelegen.  $\square$

$$z = x + iy \Rightarrow \varphi_H = \arg_H z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : x > 0, y \geq 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : x < 0, y \in \mathbf{R}, \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : x > 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & : x = 0, y > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & : x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Wird hingegen der Standard (B) ( $-\pi < \varphi_H \leq \pi$ ) zugrundegelegt, so gilt:

$$z = x + iy \Rightarrow \varphi_H = \arg_H z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : x > 0, y \in \mathbf{R}, \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & : x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & : x = 0, y < 0. \end{cases}$$

**BSP. (2.2.2)** (a) Für  $z = 3 - 2i$  haben wir  $x = 3 > 0$  und  $y = -2 < 0$ . Also folgen  $r = |z| = \sqrt{13}$  sowie  $\varphi_A = \arg_H z = 2\pi + \arctan(-2/3) \doteq 5.695183$  im Standard (A) bzw.  $\varphi_B = \arg_H z = \arctan(-2/3) \doteq -0.588003$  im Standard (B). Es gilt  $\varphi_A - \varphi_B = 2\pi$  sowie die Polardarstellung

$$z = \sqrt{13} [\cos(\varphi_{A,B}) + i \sin(\varphi_{A,B})].$$

(b) Seien  $r = |z| := 2$  und  $\varphi = \arg z = 5\pi/6$  gegeben. Dann resultiert

$$z = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i.$$

Die folgende Tabelle nützlicher Funktionswerte von  $\sin$  und  $\cos$  wurde bereits in BSP. (2.2.2) zu Rate gezogen:

| $\varphi$      | 0                         | $30^\circ \triangleq \frac{\pi}{6}$ | $45^\circ \triangleq \frac{\pi}{4}$ | $60^\circ \triangleq \frac{\pi}{3}$ | $90^\circ \triangleq \frac{\pi}{2}$ | $120^\circ \triangleq \frac{2\pi}{3}$ | $135^\circ \triangleq \frac{3\pi}{4}$ | $150^\circ \triangleq \frac{5\pi}{6}$ | $180^\circ \triangleq \pi$  |
|----------------|---------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| $\sin \varphi$ | $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$               | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$               | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$               | $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$           | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$                 | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$                 | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$                 | $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$   |
| $\cos \varphi$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$               | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$               | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$               | $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$           | $-\frac{1}{2}\sqrt{1}$                | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$                | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$                | $-\frac{1}{2}\sqrt{4} = -1$ |

## 2.3 Die komplexe Exponentialfunktion

Wir wollen eine neue Bezeichnung für die in der Polardarstellung  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  einer komplexen Zahl  $z$  auftretende Summe  $f(\varphi) := \cos \varphi + i \sin \varphi \in \mathbf{C}$  finden. Dabei gehen wir aus von den beiden Identitäten

$$f(0) = 1, \tag{3.1}$$

$$f(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \stackrel{\text{Add.---Thm.}}{=} f(\varphi_1)f(\varphi_2). \tag{3.2}$$

Solche Identitäten gelten zum Beispiel für Potenzen einer reellen Zahl  $a > 0$ :

$$f(x) := a^x \Rightarrow f(0) = a^0 = 1, \quad f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y),$$

vgl. auch BSP. (1.4.9). Die letzte Gleichung wurde zunächst nur für rationale Zahlen  $x, y$  begründet. Wir werden später eine solche Gesetzmäßigkeit für beliebige Zahlen  $x, y \in \mathbf{R}$  zeigen.

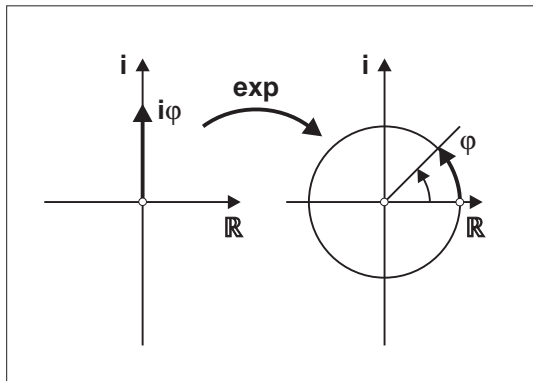


**Definition 2.7** Für  $\varphi \in \mathbf{R}$  setzen wir  $\exp(i\varphi) := f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , kurz  $\exp(i\varphi) = e^{i\varphi}$ . Jede komplexe Zahl  $z$  mit  $|z| = r$  und  $\arg z = \varphi$  gestattet jetzt die Polardarstellung

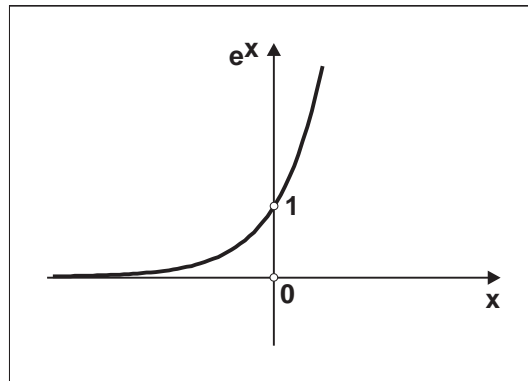
$$z = r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi+2k\pi)}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Zum Beispiel:

(i)  $z = -\sqrt{3} + i = 2 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2 e^{5\pi i/6}$  usw.      (ii)  $e^{i\pi} + 1 = \cos \pi + i \sin \pi + 1 = -1 + 1 = 0$ .



Die Funktionswerte  $\exp(i\varphi)$  liegen auf der Einheitskreislinie



Graph der Exponential-Funktion

Wegen  $|e^{i\varphi}| = 1$  liegen die Zahlen  $e^{i\varphi} \in \mathbf{C}$  auf der Einheitskreislinie. Das heißt, die 'Funktion' **exp** wickelt die imaginäre Achse in  $\mathbf{C}$  um den Einheitskreis. Der Versuch,  $\exp z$  für beliebige Zahlen  $z \in \mathbf{C}$  zu erklären, ergibt sich nun zwangsläufig. Aus Kontinuitätsgründen ist es sinnvoll, das Bestehen der Identität (3.1) sowie der **Funktionalgleichung** (3.2) für alle  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$  zu fordern. Es soll mit anderen Worten gelten:

$$\exp(0) = 1, \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}. \quad (3.3)$$

Setzen wir hier  $z = x + iy$  ein, so resultiert

$$\exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x) (\cos y + i \sin y).$$

Das heißt, die Vorschrift  $\exp z$  ist für alle  $z \in \mathbf{C}$  eindeutig festgelegt, wenn  $\exp x$  für alle  $x \in \mathbf{R}$  erklärt ist. Hinsichtlich der Beziehungen (3.3) bietet sich ein Ansatz in der Form

$$\exp x := a^x, \quad x \in \mathbf{R},$$

mit geeigneter Basis  $a > 0$  an. Aus Gründen, die später durch Reihenentwicklungen motiviert werden, wählen wir:

**Definition 2.8** (a) Mit der **EULERSCHEN ZAH**  $e := 2.718\ 281\ 828\ 459\ 04 \dots$  setzen wir

$$\exp x := e^x \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

wobei für rationale  $x = p/q$ ,  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}$ , gelte:  $e^x := \sqrt[q]{e^p}$ . (Im Sinne der numerischen Mathematik ist es ausreichend, diese Darstellung zu verwenden, da wir jedes  $x \in \mathbf{R}$  ja beliebig genau durch eine Zahl  $r \in \mathbf{Q}$  annähern können.)

(b) Die **komplexe Exponentialfunktion**  $\exp : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  ist definiert gemäß

$$e^z := \exp z = \exp(x + iy) := e^x (\cos y + i \sin y) \quad \forall z := x + iy \in \mathbf{C}.$$

Zum Beispiel:  $e^{-3+7i} = e^{-3}(\cos 7 + i \sin 7) \doteq 0.0498(0.7539 + i \cdot 0.6570)$ . Hier sind die numerischen Werte mit den Taschenrechnerfunktionen  $\sin, \cos, e^x$  ermittelt worden. Eine analytische Berechnungsmethode mittels **Reihenentwicklungen** werden wir in Abschnitt 3.2 angeben.

## Rechenregeln für Polardarstellungen komplexer Zahlen.

(I) **Konjugation.** Aus der Polardarstellung von  $z = r e^{i\varphi}$  folgern wir:

$$\bar{z} = \overline{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r e^{-i\varphi}.$$

Bei Konjugation resultiert somit die Rechenregel

$$\overline{r e^{i\varphi}} = r e^{-i\varphi}, \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

(II) **Multiplikation.** Für je zwei Zahlen  $z_j := r_j e^{i\varphi_j}$ ,  $j = 1, 2$ , folgern wir:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} \stackrel{(3.3)}{=} r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

das heißt, es gilt  $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ .

Bei **Multiplikation**: Beträge multiplizieren und Argumente addieren!

(III) **Division.** Für je zwei Zahlen  $z_j := r_j e^{i\varphi_j}$ ,  $j = 1, 2$ , mit  $r_2 \neq 0$  folgern wir:

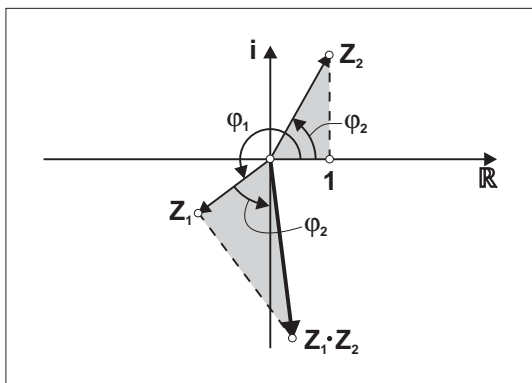
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} \stackrel{(3.3)}{=} \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

das heißt, es gilt  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$ .

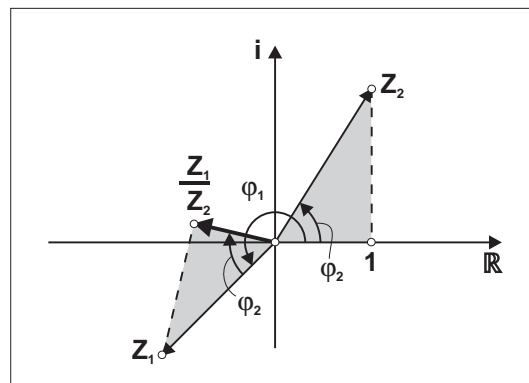
Bei **Division**: Beträge dividieren und Argumente subtrahieren!

Zum Beispiel gilt für  $z_1 := -1 - i = \sqrt{2} e^{5\pi i/4}$  und  $z_2 := 1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\pi/3}$ :

- $z_1 z_2 = 2\sqrt{2} e^{19\pi i/12} = 2\sqrt{2} e^{-5\pi i/12} = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12} \right) = 1 - \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})$ ;
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} e^{11\pi i/12} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}))$ .



Graphische Darstellung  
der Multiplikation



Graphische Darstellung  
der Division

Multiplikation und Division der Zahl  $z_1 := r_1 e^{i\varphi_1}$  mit  $z_2 := r_2 e^{i\varphi_2}$  bewirken **Drehstreckungen**, das heißt, eine Drehung um den Winkel  $\nabla \varphi_2$  und eine Streckung (oder Stauchung) um den Faktor  $r_2$ . Die oben eingezeichneten Dreiecke sind jeweils **ähnlich**; sie haben gleiche Winkel. Daraus resultiert eine **graphische** Konstruktionsmöglichkeit von  $z_1 z_2$  und  $z_1/z_2$ .

(IV) **Formeln von MOIVRE.** Eine  $n$ -fache Anwendung der Multiplikationsregel auf  $z := r e^{i\varphi}$  liefert:

**Satz 2.3 (von MOIVRE)**

Für  $z := r e^{i\varphi} \in \mathbf{C}$  mit  $z \neq 0$  gilt:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Insbesondere erhält man

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi} = \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Zum Beispiel: (i)  $(1+i)^{10} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{10} = 2^5 e^{10\pi i/4} = 32i$ .

(ii) Einerseits gilt wegen der MOIVRESche Formeln

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

zum Beispiel:  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$ . Andererseits folgt aus dem binomischen Lehrsatz

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k \varphi (i \sin \varphi)^{n-k},$$

was im Falle  $n = 3$  die Summe  $\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)$  liefert. Vergleicht man auf beiden Seiten Real- und Imaginärteile, so resultieren speziell für  $n = 3$  die Beziehungen

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{4} \cos 3\varphi + \frac{3}{4} \cos \varphi, \quad \sin^3 \varphi = \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi.$$

(V) **Komplexe Wurzeln.** Mit Hilfe des Satzes von MOIVRE zeigen wir:

**Satz 2.4 (von den  $n$ -ten Wurzeln)**

Gegeben seien die komplexe Zahl  $c = r e^{i\varphi} \in \mathbf{C}$  mit  $r \neq 0$ , und eine natürliche Zahl  $n \in \mathbf{N}$ . Dann gibt es genau  $n$  verschiedene Lösungen  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$  der Gleichung  $z^n = c$ , und zwar gilt

$$z_k = r^{1/n} e^{i\varphi_k} \quad \text{mit} \quad \varphi_k := \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Die Lösungen  $z_k$  heißen die  **$n$ -ten (komplexen) Wurzeln von  $c$** ; die Menge der  $z_k$  bezeichnet man mit  $c^{1/n}$  oder  $\sqrt[n]{c}$ :

$$c^{1/n} := \sqrt[n]{c} := \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}.$$

Begründung: Die möglichen Lösungen setzen wir in Parameterdarstellung  $z = R e^{i\Phi}$  an, so dass  $z^n = c$  äquivalent ist mit

$$R^n e^{in\Phi} = r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi+2\pi k)} \Leftrightarrow R = r^{1/n} \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{1}{n} [\varphi + 2\pi k], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  erhält man verschiedene Lösungen  $\Phi = \varphi_k$ . Für  $k = n$  erhält man wiederum  $\Phi = \varphi_0 + 2\pi \hat{=} \varphi_0$ , und für alle anderen  $k \in \mathbf{Z}$  erhält man ebenso ein  $\Phi$ , welches sich nur um ein  $2\pi$ -Vielfaches von einem bereits bestimmten  $\varphi_k$  unterscheidet.  $\square$

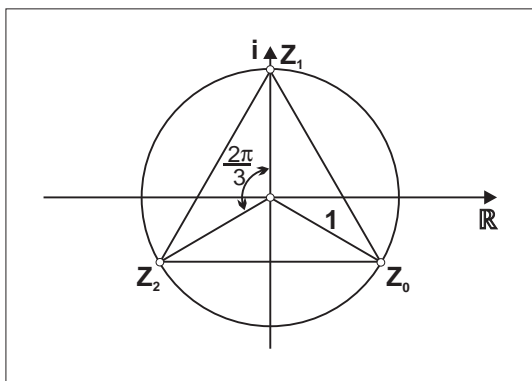
**Bemerkung 2.6** (a) Es gilt  $\sqrt[n]{0} = 0$ .

(b) Für  $c \neq 0$  ist  $\sqrt[n]{c}$  stets eine **Menge** von  $n$  verschiedenen komplexen Zahlen, also  $n$ -deutig.

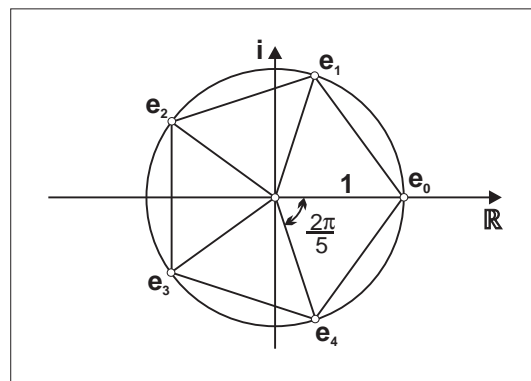
(c) Wegen der Mehrdeutigkeit haben einige Potenzgesetze aus  $\mathbf{R}$  keine Gültigkeit mehr; es sind zum Beispiel im allgemeinen  $\sqrt[n]{c^m}$  und  $(\sqrt[n]{c})^m$  verschiedene Mengen! Ebenso

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} \Rightarrow i^2 = 1 \quad \boxed{\text{W}}. \quad \text{Was ist falsch?}$$

(d) Die Lösungen  $\sqrt[n]{c}$  der Gleichung  $z^n = c$  liegen alle auf einem Kreis vom Radius  $|c|^{1/n}$  und bilden die **Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks**.  $\square$



Die Wurzeln  $\sqrt[3]{-i}$



Die 5-ten Einheitswurzeln

Wir bestimmen zum Beispiel die Menge  $\sqrt[3]{-i} = \{z \in \mathbf{C} : z^3 = -i\} = \{z_k, k = 0, 1, 2\}$ . Aus der Polardarstellung  $-i = e^{-\pi i/2}$  ergibt sich sofort  $z_k = e^{i(-\pi/2 + 2\pi k)/3}$ , und somit

$$\sqrt[3]{-i} = \left\{ e^{\pi i/6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i), e^{\pi i/2} = i, e^{7\pi i/6} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \right\}.$$

Wir bestimmen zum Beispiel die Menge  $\sqrt[5]{1} = \{z \in \mathbf{C} : z^5 = 1\} = \{z_k, k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ . Aus der Polardarstellung  $1 = e^{i \cdot 0}$  ergibt sich sofort  $z_k = e^{2\pi i k/5}$ , und somit

$$\sqrt[5]{1} = \left\{ 1, e^{2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{6\pi i/5}, e^{8\pi i/5} \right\}.$$

**Definition 2.9** Die Wurzeln

$$\sqrt[n]{1} = \left\{ e_k : e_k := e^{2\pi i k/n}, k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

heißen die  **$n$ -ten Einheitswurzeln**.

**Satz 2.5** (a) Ist  $\hat{z}$  eine (bekannte) Lösung der Gleichung  $z^n = c \neq 0$ , so erhält man alle Lösungen gemäß

$$z_k = \hat{z} \cdot e_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

worin  $e_k$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln sind.

(b) Die Lösungen  $z_k$  der Gleichung  $z^n = c$  erfüllen die Bedingung

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0, \quad n \geq 2.$$

Begründungen: (a) Wegen  $c \neq 0$  gilt auch  $\hat{z} \neq 0$ , so dass alle oben definierten Zahlen  $z_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , verschieden sind. Darüber hinaus gilt offenkundig  $z_k^n = \hat{z}^n \cdot e_k^n = \hat{z}^n = c$ .

(b) Mit dem Resultat (a) findet man sofort:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \hat{z} \sum_{k=0}^{n-1} \left( e^{2\pi i/n} \right)^k = \hat{z} \frac{1 - e^{2\pi i n/n}}{1 - e^{2\pi i/n}} = \hat{z} \cdot 0 = 0.$$

(VI) **Teilmengen der komplexen Ebene.** Durch Gleichungen oder Ungleichungen mit *Be-trägern* komplexer Zahlen lassen sich manchmal Teilmengen von  $\mathbf{C}$  recht elegant beschreiben. Wir führen dies an drei Beispielen vor.

**BSP. (2.3.1)** (a) Die Menge  $S_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = r\}$  mit  $r > 0$  und festem  $z_0 \in \mathbf{C}$  ist die **Kreislinie** vom Radius  $r$  um den Mittelpunkt  $z_0$ . Denn setzen wir  $z = x + iy$  und  $z_0 = x_0 + iy_0$ , so erschließen wir die bekannte Kreisgleichung

$$|z - z_0|^2 = r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

(b) Die Menge  $B_r(z_0) := \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\}$  ist die **Kreisscheibe** vom Radius  $r$  um den Mittelpunkt  $z_0$  ohne die Randlinie  $S_r(z_0)$ .

(c) Wir analysieren die Teilmenge  $M := \left\{ z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z-i} \right) < 0 \right\}$ . Dazu setzen wir  $z = x + iy$  und berechnen

$$\frac{z}{z-i} = \frac{z(\bar{z} + i)}{|z-i|^2} = \frac{(x + iy)(x - i(y-1))}{x^2 + (y-1)^2} = \frac{x^2 + y(y-1) + ix}{x^2 + (y-1)^2}.$$

Wir bilden jetzt den Realteil:

$$\operatorname{Re} \frac{z}{z-i} = \frac{x^2 + y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y \equiv x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < 0.$$

Dies ist die Gleichung der Kreisscheibe vom Radius  $\frac{1}{2}$  um den Mittelpunkt  $\frac{i}{2}$  ohne Randlinie.

## 2.4 Polynome

**Definition 2.10** Eine Abbildung  $P_n : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  mit  $n \in \mathbf{N}_0$  und

$$P_n(z) := a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \forall z \in \mathbf{C}, \quad a_k \in \mathbf{C}, \quad a_n \neq 0, \quad (4.1)$$

heiße ein **komplexes Polynom  $n$ -ten Grades**. Eine Abbildung  $P_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  in der Form (4.1), jedoch mit  $a_k \in \mathbf{R}$  und  $z = x \in \mathbf{R}$  heiße ein **reelles Polynom  $n$ -ten Grades**. Die Zahl  $\operatorname{Grad} P_n := n \in \mathbf{N}_0$  heiße **Grad des Polynoms**; die gegebenen Elemente  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , heißen die **Koeffizienten des Polynoms**. Ein Polynom  $P_0(z) := a_0 \neq 0$  vom Grade 0 ist das Element  $a_0$  selbst. Gilt in (4.1)  $a_k = 0$  für alle Koeffizienten, so heiße  $P(z) \equiv 0$  das **Nullpolynom**, welches keinen Grad hat. Zwei Polynome  $P_n$  und  $Q_m$ ,  $Q_m(z) := \sum_{k=0}^m b_k z^k$ , heißen **gleich**, wenn  $a_k = b_k$  für alle  $k$  gilt.

Zum Beispiel ist eine Binompotenz

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = 1 + nz + \frac{1}{2} n(n-1)z^2 + \dots + z^n =: P_n(z)$$

ein (komplexes, falls  $z \in \mathbf{C}$ , bzw. reelles, falls  $z \in \mathbf{R}$ ) Polynom vom Grade  $n$ .

In der Menge  $\Pi[z]$  aller Polynome (von beliebigem Grad) sind eine Addition  $+$  und eine Multiplikation  $\cdot$  durch 'punktweise' Operationen erklärt: Man addiert bzw. multipliziert jeweils die Funktionswerte  $P_n(z)$  und  $Q_m(z)$  von Polynomen  $P_n, Q_m \in \Pi[z]$ , d.h. man definiert für alle  $z \in \mathbf{C}$ :

$$\begin{array}{l} + : \quad (P_n + Q_m)(z) := P_n(z) + Q_m(z), \\ \cdot : \quad (P_n \cdot Q_m)(z) := P_n(z) \cdot Q_m(z). \end{array} \quad (4.2)$$

Es gilt

$$\begin{array}{l} \text{Grad}(P_n + Q_m) \leq \max\{\text{Grad } P_n, \text{Grad } Q_m\}, \\ \text{Grad}(P_n \cdot Q_m) = \text{Grad } P_n + \text{Grad } Q_m, \text{ sofern } P_n \neq 0 \neq Q_m. \end{array}$$

Zum Beispiel seien  $P_3(z) := 4z^3 - 3iz + 2i - 1$  und  $Q_2(z) := 2z^2 - iz + 1$  vorgelegt. Dann gilt:

- $(P_3 + Q_2)(z) = 4z^3 + 2z^2 - 4iz + 2i - 1, \quad \text{Grad}(P_3 + Q_2) = 3.$
- $(P_3 \cdot Q_2)(z) = (4z^3 - 3iz + 2i - 1)(2z^2 - iz + 1)$   
 $= 8z^5 - 4iz^4 + (4 - 6i)z^3 + (4i - 5)z^2 + (2 - 2i)z + 2i - 1,$   
 $\text{Grad}(P_3 \cdot Q_2) = 3 + 2 = 5.$

Wie die Definition 2.10 zeigt, wird zur Konstruktion von Polynomen nach der Vorschrift (4.1) als **wesentliche Voraussetzung** die Vorgabe eines assoziativ-kommutativen Rings  $R = (R, +, \cdot)$  mit Einselement verlangt, vgl. Definition 1.25. Für Koeffizienten  $a_k \in R$  und für  $z \in R$  ist dann der algebraische Ausdruck (4.1) stets sinnvoll erklärt, und wir haben  $P_n(z) \in R$ . Die Menge aller Polynome über  $R$  wird mit  $R[z]$  bezeichnet. Auf  $R[z]$  werden genau durch die Vorschrift (4.2) eine Addition  $+$  und eine Multiplikation  $\cdot$  erklärt. Die resultierende Algebra  $(R[z], +, \cdot)$  ist wieder ein Ring:

**Satz 2.6** *Es sei  $R = (R, +, \cdot)$  ein assoziativ-kommutativer Ring mit Einselement  $e$ . Dann bildet die Menge  $R[z]$  aller durch die formale Vorschrift*

$$P_n(z) := a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

*definierten Polynome  $P_n$ , zusammen mit den Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  aus (4.2) einen assoziativ-kommutativen Ring mit Einselement  $P_0(z) := e$  und Nullelement  $P(z) \equiv 0$ . Man nennt  $R[z]$  den **Polynomring über  $R$** .*

Die einzelnen Ringaxiome sind leicht nachzurechnen; dies sei dem Leser zur Übung empfohlen.

In Definition 2.10 haben wir Polynome sogar über einem **Körper** erklärt, nämlich über  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{R}$ . Wir spezifizieren deshalb  $R[z]$  gemäß  $\mathbf{C}[z]$  bzw.  $\mathbf{R}[x]$ . Allgemeiner schreiben wir  $\mathbf{K}[z]$  für den Polynomring über einem Körper  $\mathbf{K}$ . Die Vermutung, dass  $\mathbf{K}[z]$  selbst ein Körper sein könnte, ist leider falsch: Das Körperaxiom (M3) (siehe Satz 1.8) gilt nicht! Denn zu  $0 \neq P_n \in \mathbf{K}[z]$  und  $0 \neq R_m \in \mathbf{K}[z]$  mit  $\text{Grad } R_m < \text{Grad } P_n$  existiert kein Polynom  $D \in \mathbf{K}[z]$  mit

$$P_n(z) \cdot D(z) = R_m(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}.$$

Andernfalls wäre  $\text{Grad } R_m = \text{Grad } P_n + \text{Grad } D \geq \text{Grad } P_n$ , im Widerspruch zur Vorgabe. Hingegen gilt stets:

**Satz 2.7** *Ist  $R$  ein Integritätsbereich, so ist stets auch  $R[z]$  integer.*

*Begründung:* Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass  $R[z]$  nullteilerfrei ist. Seien also  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ,  $Q_m(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k \in R[z] \setminus \{0\}$  mit  $\text{Grad } P_n = n$  und  $\text{Grad } Q_m = m$  gegeben. Dann gilt  $a_n \neq 0 \neq b_m$ , und folglich auch  $a_n b_m \neq 0$ , denn  $R$  ist nullteilerfrei. Also folgt

$$(P_n \cdot Q_m)(z) = P_n(z) \cdot Q_m(z) = \left( \sum_{k=0}^n a_k z^k \right) \left( \sum_{k=0}^m b_k z^k \right) = a_n b_m z^{n+m} + \dots + a_0 b_0 \neq 0,$$

und somit  $\text{Grad}(P_n \cdot Q_m) = n + m$ . Das heißt,  $P_n \cdot Q_m$  kann nicht das Nullpolynom sein.  $\square$

Wie wir in BSP. (1.4.16) gesehen haben, ist  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$  ein Integritätsbereich, und somit ist auch der Polynomring  $\mathbf{Z}[z]$  integer. In  $\mathbf{Z}$  konnten wir eine **Division mit Rest** durchführen (Satz 1.4). Ist  $R$  ein **Körper**, so gilt ein Analogon auch für den Polynomring  $R[z]$ :

### Satz 2.8 (Division mit Rest)

Es sei  $\mathbf{K}$  ein Körper, und es sei  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  mit  $P_n \neq 0$ . Dann existieren zu jedem  $Q_m \in \mathbf{K}[z]$  eindeutig bestimmte Polynome  $D, R \in \mathbf{K}[z]$  mit  $R = 0$  oder  $\text{Grad } R < \text{Grad } P_n$  und

$$Q_m(z) = P_n(z) \cdot D(z) + R(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}.$$

*Begründung:* (a) Existenz: Gilt  $Q_m = 0$  oder  $\text{Grad } Q_m = m < n = \text{Grad } P_n$ , so liegt der **triviale** Fall mit  $D(z) = 0$  und  $R := Q_m$  vor. Es sei also  $m \geq n$ . Dann berechnet man  $D$  und  $R$  mit dem bekannten **EUKLIDISCHEN TEILERALGORITHMUS**, den wir hier exemplarisch auf  $\mathbf{Q}[z]$  vorführen. Es seien zum Beispiel  $P_3(z) := -8z^3 + 15z^2 - 5$  und  $Q_4(z) := 2z^4 - 5z^3 + 5z - 2$ .

$$\begin{array}{r} (2z^4 \quad -5z^3 \quad \quad \quad +5z \quad -2) : \overbrace{(-8z^3 + 15z^2 - 5)}{=P_3(z)} = \overbrace{-\frac{1}{4}z + \frac{5}{32}}{=:D(z)} \\ \underline{2z^4 \quad -\frac{15}{4}z^3 \quad \quad \quad +\frac{5}{4}z} \\ \quad \quad -\frac{5}{4}z^3 \quad \quad \quad +\frac{15}{4}z \quad -2 \\ \quad \quad \underline{-\frac{5}{4}z^3 \quad +\frac{75}{32}z^2 \quad \quad \quad -\frac{25}{32}} \\ \quad \quad \quad \quad -\frac{75}{32}z^2 \quad +\frac{15}{4}z \quad -\frac{39}{32} \quad \quad \quad =: R(z) \end{array}$$

Es gilt nun in der Tat

$$\begin{aligned} P_3(z) \cdot D(z) + R(z) &= (-8z^3 + 15z^2 - 5) \left(-\frac{1}{4}z + \frac{5}{32}\right) + \left(-\frac{75}{32}z^2 + \frac{15}{4}z - \frac{39}{32}\right) \\ &= Q_4(z) = 2z^4 - 5z^3 + 5z - 2. \end{aligned}$$

Mit diesem konstruktiven Verfahren können auf ganz analoge Weise die Polynome  $D(z)$  und  $R(z)$  über einem beliebigen Körper  $\mathbf{K}$  berechnet werden.

(b) Eindeutigkeit: Sind  $D'$  und  $R'$  ebenfalls Polynome, die das Verlangte leisten, so folgt

$$P_n(z) \cdot (D(z) - D'(z)) = R(z) - R'(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}$$

mit  $\text{Grad}(R - R') < \text{Grad } P_n$ . Wäre  $D - D' \neq 0$ , so wäre im Widerspruch dazu  $\text{Grad}(R - R') = \text{Grad } P_n + \text{Grad}(D - D') \geq \text{Grad } P_n$ . Also folgt  $D = D'$  und somit auch  $R = R'$ .  $\square$

Für numerische Zwecke kann der EUKLIDISCHE TEILERALGORITHMUS leicht mit dem folgenden Programm realisiert werden, welches zu vorgegebenen Polynomen

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n \neq 0, \quad Q_m(z) := \sum_{k=0}^m b_k z^k$$

zwei Polynome

$$D(z) := \sum_{k=0}^{m-n} d_k z^k, \quad R(z) := \sum_k r_k z^k, \quad \text{Grad } R < \text{Grad } P_n,$$

so berechnet, dass die folgende Darstellung gilt:

$$Q_m(z) = P_n(z) \cdot D(z) + R(z).$$

**EUKLIDISCHER DIVISIONSALGORITHMUS ZUR BERECHNUNG VON  $D(z)$  UND  $R(z)$ :**

|     |  |
|-----|--|
| 1:  | Einlesen von $n := \text{Grad } P_n; m := \text{Grad } Q_m; a_k$ mit $a_n \neq 0; b_k$ ; |
| 2:  | $a := a_n; k := 1$ ;   |
| 3:  | für $j := 0, 1, \dots, \max\{n, m\}$ :   |
| 4:  | $d_j := 0$ ; (Ende $j$ )   |
| 5:  | falls ( $b_m = 0$ ) dann   |
| 6:  | wiederhole   |
| 7:  | $m := m - 1$ ;   |
| 8:  | bis ( $(b_m \neq 0)$ oder ( $m = 0$ )); (Ende falls)                                     |
| 9:  | falls ( $b_m \neq 0$ und $m \geq n$ ) dann   |
| 10: | $e := m - n + 1$ ;   |
| 11: | wiederhole   |
| 12: | $c := b_{m-k+1}/a; d_{e-k} := c$ ;   |
| 13: | für $j := 0, 1, \dots, n$ :  |
| 14: | $b_{j+e-k} := b_{j+e-k} - c * a_j$ ; (Ende $j$ )   |
| 15: | $k := k + 1$ ;   |
| 16: | bis ( $k > e$ ). (Ende dann)   |

Nach Ablauf des Programms hat der Algorithmus die gesuchten Koeffizienten  $d_k$  und  $r_k := b_k$  berechnet.

Für die Polynome vom Grade  $\leq 3$  verwendet man in der Regel spezielle Bezeichnungen:

- $P_0(z) := a_0$  heie **konstantes** Polynom oder **Konstante**,
- $P_1(z) := a_0 + a_1 z$  heie **lineares** Polynom,
- $P_2(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2$  heie **quadratisches** Polynom,
- $P_3(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$  heie **kubisches** Polynom.

Grundlage fur die folgenden Überlegungen ist die Division mit Rest eines Polynoms  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  durch ein lineares Polynom in der speziellen Form  $P_1(z) := z - z_0$ . Man nennt dieses spezielle  $P_1(z)$  mit festem  $z_0 \in \mathbf{K}$  einen **Linearfaktor**. Die gestellte Aufgabe wird am effizientesten durch das

**HORNER-Schema**

gelöst (WILLIAM GEORGE HORNER, 1786–1837).

Zunächst einmal liefert das HORNER-Schema einen **numerisch stabilen Algorithmus** zur Berechnung des Funktionswertes  $P_n(z_0)$  fur ein gegebenes Polynom  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  in einem festen Punkt  $z_0 \in \mathbf{K}$ ,



(wenn wir speziell  $\mathbf{K} := \mathbf{Q}$  betrachten). Auf einem *sequentiell* arbeitenden Computer ist es wegen ungünstiger Fehlerfortpflanzung unvorteilhaft, die Berechnung durch sequentielles Abarbeiten der Darstellung

$$P_n(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \cdots + a_n z_0^n \quad (4.3)$$

vorzunehmen. Besser ist es (nach einer Idee von P. RUFFINI (1765–1822) aus dem Jahre 1808, die dann 1819 von HORNER nochmals unabhängig entdeckt wurde), die Berechnung durch sequentielles Abarbeiten der folgenden Darstellung vorzunehmen:

$$P_n(z_0) = [\cdots [(a_n z_0 + a_{n-1}) z_0 + a_{n-2}] z_0 + a_{n-3}] z_0 + \cdots + a_1] z_0 + a_0. \quad (4.4)$$

Die Gleichheit der beiden Darstellungen (4.3) und (4.4) erkennt man sofort durch Ausmultiplizieren. Man startet mit der Berechnung der innersten Klammer und schreitet danach sukzessive bis zur Berechnung der äußersten Klammer voran. Die Rechenvorschrift (4.4) ist gegenüber (4.3) weitaus unempfindlicher hinsichtlich der **Fortpflanzung von Rundungsfehlern** bei numerischer Rechnung. Zum Beispiel sind für  $|z_0| \ll 1$ ,  $z_0 \in \mathbf{Q}$ , die Potenzen  $z_0^k$  sehr kleine Zahlen, so dass die Berechnung von  $P_n(z_0)$  in der Reihenfolge (4.3) zu erheblichen *Stellenauslöschungen* führen kann. Ein computer-gerechter Algorithmus des HORNER-Schemas hat folgende Form:

**Algorithmus zur Berechnung von  $P_n(z)$  an einer Neustelle  $z_0$ :**

|    |                                     |
|----|-------------------------------------|
| 1: | Einlesen von $a_k, z_0$ ;           |
| 2: | $p := a_n$ ;                        |
| 3: | für $k := n - 1, n - 2, \dots, 0$ : |
| 4: | $p := a_k + z_0 * p$ . (Ende $k$ )  |

Nach Ablauf des Algorithmus hat die Variable  $p$  die Wertzuweisung  $P_n(z_0)$  erhalten.

Will man genau dieselbe Rechnung von Hand auf dem Papier durchführen, so ist es vorteilhaft, die folgende Anordnung, genannt **HORNER-Schema**, zu verwenden. Diese gilt für beliebige Polynome  $P_n \in \mathbf{K}[z]$ :

|       |               |               |            |            |            |
|-------|---------------|---------------|------------|------------|------------|
| $a_n$ | $a_{n-1}$     | $a_{n-2}$     | $\cdots$   | $a_1$      | $a_0$      |
| +     | +             | +             | $\cdots$   | +          | +          |
| 0     | $z_0 b_{n-1}$ | $z_0 b_{n-2}$ | $\cdots$   | $z_0 b_1$  | $z_0 b_0$  |
| $z_0$ | $b_{n-1}$     | $b_{n-2}$     | $b_{n-3}$  | $\cdots$   | $b_0$      |
|       | $\nearrow$    | $\nearrow$    | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |
|       |               |               |            |            | $P_n(z_0)$ |

**Beachte:** Auch verschwindende Koeffizienten  $a_k = 0$  müssen in diesem Schema mitgeführt werden! Sie zu vergessen ist eine beliebte Fehlerquelle bei dem unerfahrenen Anwender des HORNER-Schemas.

**BSP. (2.4.1)** Es sei das reelle Polynom  $P_4(x) := 4x^4 - 3x^3 + x - 10$  gegeben. Man berechne den Funktionswert  $P_4(-3)$ . Hier ist also zu beachten, dass  $a_2 = 0$  gilt, während wir  $z_0 = x_0 = -3$  zu setzen haben.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -3 & 0 & 1 & -10 \\ & * & -12 & 45 & -135 & 402 \\ x_0 = -3 & 4 & -15 & 45 & -134 & \boxed{392} \end{array} = P_4(-3)$$

Die Bedeutung der **Koeffizienten  $b_k$  im HORNER-Schema**: Man erkennt an der oben angegebenen Berechnungsvorschrift sehr leicht, dass die Koeffizienten  $b_k$  gemäß folgender Vorschrift rekursiv definiert sind:

$$\boxed{b_{n-1} := a_n, \quad b_k := a_{k+1} + z_0 b_{k+1}, \quad k = n - 2, n - 3, \dots, 0.} \quad (4.5)$$

Die so definierten Koeffizienten  $b_k$  sind mit der Lösung der folgenden Aufgabe verknüpft. Zu gegebenem  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  ist dasjenige Polynom

$$P_{n-1}(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k z^k$$

gesucht, für welches die Beziehung

$$P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z) + P_n(z_0) = (z - z_0) [\beta_{n-1}z^{n-1} + \beta_{n-2}z^{n-2} + \cdots + \beta_0] + P_n(z_0) \quad (4.6)$$

identisch in  $z \in \mathbf{K}$  erfüllt ist. Durch Ordnen nach gleichen Potenzen in  $z$  erhält man die äquivalente Gleichung

$$[a_n - \beta_{n-1}]z^n + [a_{n-1} - (\beta_{n-2} - z_0\beta_{n-1})]z^{n-1} + \cdots + [a_1 - (\beta_0 - z_0\beta_1)]z + [a_0 - (P_n(z_0) - z_0\beta_0)] = 0.$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle  $z \in \mathbf{K}$  erfüllt, wenn die Koeffizientenausdrücke  $[\cdots]$  vor den  $z$ -Potenzen verschwinden (Methode des **Koeffizientenvergleichs**). Dies führt ganz offenbar auf die Bedingungen

$$\beta_{n-1} := a_n, \quad \beta_k := a_{k+1} + z_0\beta_{k+1}, \quad k = n-2, n-3, \dots, 0, \quad (4.7)$$

und schließlich  $P_n(z_0) - z_0\beta_0 = a_0$ . Durch Vergleich der beiden Rekursionen (4.5) und (4.7) ergibt sich offenkundig  $\beta_k = b_k \forall k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Zusammenfassend haben wir:

### Satz 2.9 (Abspaltung eines Linearfaktors)

Es sei ein Polynom  $P_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbf{K}[z]$  vom Grade  $n \geq 1$  gegeben, ferner ein festes Element  $z_0 \in \mathbf{K}$ . Es seien  $b_k, k = 0, 1, \dots, n-1$ , die gemäß (4.5) mit dem HORNER-Schema berechneten Koeffizienten. Dann gilt

$$P_n(z) = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k + P_n(z_0) \quad \forall z_0 \in \mathbf{K}. \quad (4.8)$$

Das lineare Polynom  $z - z_0$  heie **Linearfaktor**.

In BSP. (2.4.1) hat also (4.8) die Form

$$P_4(x) = 4x^4 - 3x^3 + x - 10 = (x + 3)(4x^3 - 15x^2 + 45x - 134) + 392.$$

**TAYLOR-Entwicklung eines Polynoms** (BROOK TAYLOR, 1685–1731). Wir führen nun die Abspaltung des Linearfaktors  $z - z_0$  am Polynom  $P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$  durch:

$$P_{n-1}(z) = (z - z_0)P_{n-2}(z) + P_{n-1}(z_0).$$

Die Koeffizienten  $c_k$  des neuen Polynoms  $P_{n-2}(z) := \sum_{k=0}^{n-2} c_k z^k$  ergeben sich wiederum aus dem HORNER-Schema nach der Berechnungsvorschrift (4.5):

$$c_{n-2} := b_{n-1}, \quad c_k := b_{k+1} + z_0 c_{k+1}, \quad k = n-3, n-4, \dots, 0.$$

Wir verfahren so fort, bis wir schließlich bei  $P_1(z) = (z - z_0)a_n + P_1(z_0)$  angelangt sind. Durch sukzessives Einsetzen erkennt man jetzt die folgende Darstellung

$$\left. \begin{aligned} P_n(z) &= \left[ \cdots \left[ \left[ (z - z_0)a_n + P_1(z_0) \right] (z - z_0) + P_2(z_0) \right] (z - z_0) + P_3(z_0) \right] (z - z_0) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + P_{n-1}(z_0) \right] (z - z_0) + P_n(z_0) \\ &= \sum_{k=0}^n d_k (z - z_0)^k \quad \text{mit } d_k := P_{n-k}(z_0) \quad \text{und } d_n := P_0(z_0) = a_n. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

**Definition 2.11** Die Darstellung (4.9) heie die **TAYLOR-Entwicklung** des Polynoms  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  an der Stelle  $z_0$ . Die Koeffizienten  $d_k$  erhält man durch fortgesetzte Anwendung des **HORNER-Schemas** mit  $z = z_0$ . Dabei entsteht das **vollständige HORNER-Schema**.

**Bemerkung 2.7** Wir werden im Rahmen der Differentialrechnung den folgenden Zusammenhang zwischen den Koeffizienten  $d_k$  und den Ableitungen  $P_n^{(k)}(z_0)$  des Polynoms  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  an der Stelle  $z = z_0$  herstellen, sofern wir uns in  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$  bewegen:  $\square$

$$d_k = P_{n-k}(z_0) = \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(z_0). \quad (4.10)$$

**BSP. (2.4.2)**

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & -3 & 0 & 1 & -10 \\
 -3 & * & -12 & 45 & -135 & 402 \\
 \hline
 & 4 & -15 & 45 & -134 & \boxed{392} \\
 -3 & * & -12 & 81 & -378 & \\
 \hline
 & 4 & -27 & 126 & \boxed{-512} & \\
 -3 & * & -12 & 117 & & \\
 \hline
 & 4 & -39 & \boxed{243} & & \\
 -3 & * & -12 & & & \\
 \hline
 & 4 & \boxed{-51} & & & \\
 & * & & & & \\
 \hline
 & \boxed{4} & & & & 
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 = P_4(-3) \\
 \\
 = \frac{1}{1!} \cdot P_4'(-3) \\
 \\
 = \frac{1}{2!} \cdot P_4''(-3) \\
 \\
 = \frac{1}{3!} \cdot P_4'''(-3) \\
 \\
 = \frac{1}{4!} \cdot P_4^{iv}(-3)
 \end{array}$$

Wir greifen hier nochmals das reelle Polynom  $P_4(x) := 4x^4 - 3x^3 + x - 10$  aus BSP. (2.4.1) auf. Mit  $x_0 := -3$  und  $a_4 := 4$ ,  $a_3 := -3$ ,  $a_2 := 0$ ,  $a_1 := 1$ ,  $a_0 := -10$  berechnen wir das vollständige **HORNER-Schema**. Aus den eingerahmten Koeffizienten ergibt sich die **TAYLOR-Entwicklung** des Polynoms  $P_4(x)$  an der Stelle  $x_0 = -3$  in der Form:

$$P_4(x) = 4(x+3)^4 - 51(x+3)^3 + 243(x+3)^2 - 512(x+3) + 392.$$

## 2.5 Nullstellen von Polynomen

Es sei  $R = (R, +, \cdot)$  ein assoziativ-kommutativer Ring mit Einselement.

**Definition 2.12** Ein Element  $z_0 \in R$  heie **Nullstelle** des Polynoms  $P_n \in R[z]$ , wenn gilt:  $P_n(z_0) = 0$ .

**BSP. (2.5.1)** (a) Beim **Nullpolynom**  $P(z) \equiv 0 \in R[z]$  ist jedes  $z_0 \in R$  Nullstelle. Das konstante Polynom  $P_0(z) := a_0 \neq 0$  hat **keine** Nullstelle.

(b) Ist  $\mathbf{K}$  ein **Körper**, so hat das lineare Polynom  $P_1(z) := a_0 + a_1 z = a_1 \cdot (z + \frac{a_0}{a_1}) \in \mathbf{K}[z]$  offensichtlich **genau eine** Nullstelle  $z_0 = -\frac{a_0}{a_1} \in \mathbf{K}$ .

(c) Das quadratische Polynom  $P_2(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = a_2 \cdot (z^2 + \frac{a_1}{a_2} z + \frac{a_0}{a_2}) \in \mathbf{K}[z]$  braucht in

$\mathbf{K}$  keine Nullstellen zu besitzen. So hat etwa  $z^2 - 2 \in \mathbf{Q}[z]$  keine Nullstelle in  $\mathbf{Q}$ , und  $z^2 + 1 \in \mathbf{R}[z]$  keine Nullstelle in  $\mathbf{R}$ . Hingegen hat  $P_2 \in \mathbf{C}[z]$  im allgemeinen **zwei** verschiedene Nullstellen

$$z_0^\pm = \frac{1}{2a_2} \left( -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} \right),$$

wie wir bereits in Abschnitt 2.1 gezeigt haben. Der komplexe Ausdruck  $\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}$  ist 2-wertig. Wir legen uns auf einen der beiden Werte fest; der andere unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen. Ein quadratisches Polynom  $P_2 \in \mathbf{C}[z]$  hat also mindestens eine Nullstelle (falls  $a_1^2 = 4a_0a_2$ ) und höchstens zwei Nullstellen (falls  $a_1^2 \neq 4a_0a_2$ ).

(d) Polynome 3. und 4. Grades: Für  $P_n \in \mathbf{C}[z]$ ,  $n = 3$  oder  $n = 4$ , findet man in den gängigen Formelsammlungen algebraische Ausdrücke zur Beschreibung aller Nullstellen; diese sind zum Teil sehr unhandlich und kaum noch gebräuchlich. (**CARDANISCHE FORMELN** für kubische Polynome; GERONIMO CARDANO (1501–1576), Arzt und Mathematiker (!). Die nach ihm benannten Formeln sind schon früher von S. DEL FERRO (1465–1526) und N. TARTAGLIA (1500–1557) verwendet worden.)

(e) Polynome vom Grade  $\geq 5$ : Für  $P_n \in \mathbf{C}[z]$ ,  $n \geq 5$ , zeigte NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) im Jahre 1826, dass es im allgemeinen unmöglich ist, Nullstellen dieser Polynome formelmäßig zu erfassen.

**Das Existenzproblem von Nullstellen.** Wie die obigen Beispiele zeigen, ist die Frage, ob ein Polynom  $P_n \in R[z]$  überhaupt Nullstellen in  $R$  hat, nichttrivial. Im wichtigsten Fall  $P_n \in \mathbf{C}[z]$  ist das Existenzproblem für  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  trivial lösbar durch Angabe expliziter Formeln. Der nichttriviale Fall  $n \geq 5$  wurde 1797 von CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) positiv beantwortet. Die GAUSSSCHE DISSERTATION (1799) enthält folgende Aussage:

**Satz 2.10 (Fundamentalsatz der Algebra)**

*Jedes Polynom  $P_n \in \mathbf{C}[z]$  vom Grade  $n \geq 1$  besitzt in  $\mathbf{C}$  mindestens eine Nullstelle.*

Der Beweis dieses Satzes wird am einfachsten mit Hilfsmitteln aus der Funktionentheorie geführt, die hier noch nicht bereitgestellt sind. Wir verzichten an dieser Stelle auf den – ohnehin nur theoretisch interessierenden – Beweis.

In allgemeinen Körpern  $\mathbf{K}$  kann man lediglich eine obere Schranke für die Anzahl der möglichen Nullstellen von  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  angeben. Ist nämlich  $z_1 \in \mathbf{K}$  eine Nullstelle des Polynoms  $P_n(z)$ , so gilt wegen Satz 2.9 die Darstellung

$$P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z) = (z - z_1) \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k. \quad (5.1)$$

Wir sagen, das Polynom  $P_n(z)$  ist **teilbar** durch  $(z - z_1)$ . Ist  $z_1$  auch Nullstelle von  $P_{n-1}(z)$ , so liefert nochmalige Anwendung des Satzes 2.9 die Darstellung  $P_n(z) = (z - z_1)^2 P_{n-2}(z)$ ; d.h.  $(z - z_1)^2$  ist Teiler von  $P_n(z)$ , usw. Da  $n = \text{Grad } P_n$  endlich ist, gibt es unter den Potenzen  $(z - z_1)^j$ , welche Teiler von  $P_n(z)$  sind, eine mit größtem Exponenten  $k \leq n$ :

**Definition 2.13** *Ein Element  $z_1 \in \mathbf{K}$  heie Nullstelle der **Ordnung** oder **Vielfachheit**  $k \in \mathbf{N}$  von  $P_n \in \mathbf{K}[z]$ , wenn ein Polynom  $Q \in \mathbf{K}[z]$  existiert mit:*

$$P_n(z) = (z - z_1)^k Q(z) \quad \forall z \in \mathbf{K} \quad \text{und} \quad Q(z_1) \neq 0.$$

Mit diesen Begriffsbildungen zeigen wir:

### Satz 2.11 (Linearfaktorzerlegung)

Es sei  $\mathbf{K}$  ein Körper, und es sei  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  mit  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ , ein Polynom aus  $\mathbf{K}[z]$ .

Dann gilt:

(a) Sind  $z_1, z_2, \dots, z_m$  paarweise verschiedene Nullstellen von  $P_n(z)$  mit Vielfachheiten  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , so ist  $P_n(z)$  teilbar durch

$$(z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m}.$$

(b)  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  hat in  $\mathbf{K}$  höchstens  $n$  Nullstellen, wobei jede Nullstelle so oft gezählt wird, wie ihre Vielfachheit angibt.

(c)  $P_n \in \mathbf{C}[z]$  hat in  $\mathbf{C}$  genau  $n$  Nullstellen.

(d)  $P_n \in \mathbf{C}[z]$  gestattet die **Linearfaktorzerlegung**

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m} = a_n \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{k_j} \quad \forall z \in \mathbf{C}, \quad (5.2)$$

wobei  $z_1, z_2, \dots, z_m$ ,  $m \leq n$ , die paarweise verschiedenen Nullstellen mit Vielfachheiten  $k_1, k_2, \dots, k_m$  sind. Es gilt nach (c)  $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ .

*Begründungen:* (a) Diese Behauptung folgt nach derselben Argumentation wie im Vorspann, indem wir nun mehrere Nullstellen berücksichtigen.

(b) Gemäß (a) gilt

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m} Q(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}, \quad (5.3)$$

mit  $0 \neq Q \in \mathbf{K}[z]$  und  $Q(z_j) \neq 0$  für  $j = 1, 2, \dots, m$ . Somit haben wir

$$n = \text{Grad } P_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m + \text{Grad } Q \geq k_1 + k_2 + \cdots + k_m. \quad (5.4)$$

(c) Gemäß Satz 2.10 hat  $P_n \in \mathbf{C}[z]$  mindestens eine Nullstelle  $z_1 \in \mathbf{C}$ . Es seien nun  $z_1, z_2, \dots, z_m$  bereits alle Nullstellen von  $P_n[z]$  mit Vielfachheiten  $k_1, k_2, \dots, k_m$ . Dann gilt (5.3). Wäre  $k_1 + \cdots + k_m < n$ , so wäre nach (5.4)  $\text{Grad } Q \geq 1$ . Gemäß Satz 2.10 hätte  $Q(z)$  eine Nullstelle  $z_{m+1} \neq z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , und wir hätten somit widersprüchlich eine weitere Nullstelle von  $P_n(z)$  konstruiert. Also gilt  $k_1 + \cdots + k_m = n$ .

(d) Diese Behauptung folgt unmittelbar aus der Beweisführung von (c).  $\square$

**BSP. (2.5.2)** Das Polynom  $P_6(z) := 3z^6 - (15 - 6i)z^5 + (15 - 30i)z^4 + (27 + 36i)z^3 - (42 - 24i)z^2 - (12 + 48i)z + 24 \in \mathbf{C}[z]$  hat die Linearfaktorzerlegung  $P_6(z) = 3(z - 2)^3(z + 1)(z + i)^2$ , und hiermit:

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = 2 \quad \text{ist Nullstelle der Ordnung } k_1 = 3, \\ z_2 = -1 \quad \text{ist Nullstelle der Ordnung } k_2 = 1, \\ z_3 = -i \quad \text{ist Nullstelle der Ordnung } k_3 = 2, \end{array} \right\} k_1 + k_2 + k_3 = 6 = \text{Grad } P_6(z).$$

Als wichtige Folgerung aus Satz 2.11 ergibt sich der

### Satz 2.12 (Identitätssatz für Polynome)

Sei  $\mathbf{K}$  ein Körper und seien zwei Polynome  $P_n, Q_n \in \mathbf{K}[z]$  gegeben:

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad Q_n(z) := \sum_{k=0}^n b_k z^k.$$

Falls  $P_n(z_j) = Q_n(z_j)$  für  $n + 1$  verschiedene  $z_j \in \mathbf{K}$  gilt,  $j = 1, 2, \dots, n + 1$ , so muss  $P_n(z) = Q_n(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}$  gelten, also auch  $a_k = b_k \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$ .

*Begründung:* Nehmen wir im Gegenteil an, es gebe ein größtes  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , mit  $a_m \neq b_m$  und  $a_k = b_k \quad \forall k = m+1, m+2, \dots, n$ , so hat das Differenzpolynom  $P_n(z) - Q_n(z) = \sum_{k=0}^m (a_k - b_k)z^k$  vom Grade höchstens  $m$  die  $n+1$  verschiedenen Nullstellen  $z_j$ . Dies steht im Widerspruch zu Satz 2.11(b).  $\square$

**Die VIÉTASCHEN WURZELSÄTZE** für  $P_n \in \mathbf{C}[z]$  (FRANÇOIS VIÈTE, 1540–1603): Ist  $a_n = 1$ , und sind  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbf{C}$  die (nicht notwendig voneinander verschiedenen) Nullstellen des Polynoms  $P_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \in \mathbf{C}[z]$ , so erhält man gemäß (5.2) die Darstellung

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \stackrel{\text{Ausmultipl.}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} V_k(z_1, z_2, \dots, z_n) z^k + z^n.$$

Wegen Satz 2.12 hat man  $a_k = V_k(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , das heißt, man erhält **formelmäßige** Beziehungen zwischen den **Koeffizienten**  $a_k$  und den **Wurzeln**  $z_1, z_2, \dots, z_n$  des Polynoms  $P_n(z)$ . Diese Beziehungen heißen die **VIÉTASCHEN WURZELSÄTZE**.

**BSP. (2.5.3)** (a) Für quadratische Polynome gilt  $z^2 + a_1 z + a_0 = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2$ , und somit

$$a_1 = -(z_1 + z_2), \quad a_0 = z_1 z_2.$$

(b) Für kubische Polynome gilt  $z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)z - z_1 z_2 z_3$ , und somit

$$a_2 = -(z_1 + z_2 + z_3), \quad a_1 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3, \quad a_0 = -z_1 z_2 z_3.$$

Im allgemeinen Fall  $n \geq 2$  erhält man die folgenden

**VIÉTASCHEN WURZELSÄTZE** für  $P_n \in \mathbf{C}[z]$ :

$$\begin{aligned}
 a_{n-1} &= - \sum_{k=1}^n z_k, \\
 a_{n-2} &= + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^n z_j z_k, \\
 a_{n-3} &= - \sum_{\substack{j,k,l=1 \\ j < k < l}} z_j z_k z_l, \\
 &\vdots \\
 a_0 &= (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n.
 \end{aligned}$$

Das **Hauptproblem der Polynomlehre**, nämlich das Auffinden sämtlicher Nullstellen von  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  für  $n \geq 2$  ist mit den bisherigen Erörterungen noch nicht gelöst. In gleicher Weise ist die Frage nach der genauen Anzahl der Nullstellen in  $\mathbf{K}$  unbeantwortet, wenn wir vom Sonderfall  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$  absehen. Man nimmt dieses wichtige Beispiel aber zum Anlass für folgende

**Definition 2.14** Ein Körper  $\mathbf{K}$  heiße **algebraisch abgeschlossen**, wenn für jedes Polynom  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  gilt: Die Anzahl seiner Nullstellen in  $\mathbf{K}$  ist gleich dem Grad von  $P_n(z)$ . Dabei wird jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt.

Satz 2.11(c) besagt also, dass der Körper  $\mathbf{C}$  algebraisch abgeschlossen ist; die Körper  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{R}$  sind es nicht. Die Bestimmung der  $n$  Nullstellen von  $P_n \in \mathbf{C}[z]$  kann im allgemeinen Fall nur approximativ mit den Hilfsmitteln der numerischen Mathematik und unter Einsatz von Computern erfolgen. Die folgenden Ergebnisse können aber häufig eine nützliche Hilfestellung leisten beim Erraten einzelner Nullstellen.

**Satz 2.13** Gegeben sei das Polynom  $n$ -ten Grades  $P_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbf{C}[z]$ , mit  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 1$ .

1. Dann gilt für jede Nullstelle  $z_1, z_2, \dots, z_n$  von  $P_n(z)$ :

$$\boxed{|z_k| \leq \max \left\{ \left| \frac{a_0}{a_n} \right|, 1 + \left| \frac{a_1}{a_n} \right|, \dots, 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right\}. \quad (5.5)}$$

*Begründung:* Wir setzen

$$M := \max \left\{ \left| \frac{a_0}{a_n} \right|, 1 + \left| \frac{a_1}{a_n} \right|, \dots, 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right\}.$$

Dann folgt für  $|z| > M$ :

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &\geq |a_n| \left\{ |z|^n - \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| |z|^k - \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right\} \\ &\geq |a_n| \left\{ |z|^n - (M-1) \sum_{k=1}^{n-1} |z|^k - M \right\} \\ &\geq |a_n| \left\{ |z|^n - (M-1) \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} - 1 \right\} \\ &> |a_n| \left\{ |z|^n - (M-1) \frac{|z|^n - 1}{M-1} - 1 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Also kann für  $|z| > M$  keine Nullstelle von  $P_n(z)$  existieren.  $\square$

**BSP. (2.5.4)** Die Abschätzung (5.5) kann sehr grob sein, wie am Beispiel  $P_3(z) := z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3)$  erkennbar wird. Wir haben hier  $|z_k| \leq 3$ , während aus (5.5)  $|z_k| \leq 12$  folgt.

Eine Sonderstellung nehmen Polynome  $P_n \in \mathbf{R}[x]$  mit **reellen** Koeffizienten ein, wenn man Nullstellen im Erweiterungskörper  $\mathbf{C}$  zulässt.

**Satz 2.14** Gegeben sei ein Polynom  $n$ -ten Grades  $P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbf{R}[x]$  mit **reellen** Koeffizienten  $a_k \in \mathbf{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$ . Ist  $z_0 \in \mathbf{C}$  eine Nullstelle von  $P_n(x)$ , so auch die konjugiert komplexe Zahl  $\bar{z}_0$ .

*Begründung:* Wegen  $a_k = \bar{a}_k$  folgern wir aus  $P_n(z_0) = 0$ :

$$P_n(\bar{z}_0) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}_0^k = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z_0^k} = \overline{P_n(z_0)} = \bar{0} = 0.$$

**Folgerungen bei reellen Koeffizienten.** (a) Nichtreelle Nullstellen von  $P_n \in \mathbf{R}[x]$  treten stets paarweise auf:  $z_0, \bar{z}_0 \in \mathbf{C}$  sind entweder beide Nullstellen oder beide keine Nullstellen.

(b) Ist  $\text{Grad } P_n = 2m + 1$  eine **ungerade** Zahl, so hat  $P_n \in \mathbf{R}[x]$  mindestens eine **reelle** Nullstelle.

(c) Ist  $z_0 = x_0 + iy_0$  eine nichtreelle Nullstelle von  $P_n \in \mathbf{R}[x]$ , so gilt gemäß (5.2) die Beziehung

$$P_n(x) = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)P_{n-2}(x) = \underbrace{[x^2 - 2x_0x + (x_0^2 + y_0^2)]}_{\text{hat keine reellen NS}} P_{n-2}(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Das heißt, ein Polynom  $P_n \in \mathbf{R}[x]$  läßt sich stets in **reelle** Linearfaktoren und **reelle** quadratische Polynome zerlegen; die letzteren sind in  $\mathbf{R}$  selbst nicht mehr in **reelle** Linearfaktoren zerlegbar:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x^2 - \alpha_1 x + \beta_1) \cdots (x^2 - \alpha_m x + \beta_m) \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad (5.6)$$

mit  $x_j, \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{R}$  und  $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0$ .

Neben den *reellen* Nullstellen  $x_j$  hat man die *komplexen* Nullstellenpaare  $z_j^\pm := \frac{1}{2}(\alpha_j \pm i\sqrt{4\beta_j - \alpha_j^2})$ . Zum Beispiel gilt

$$P_6(x) := x^6 - 3x^5 + 5x^4 - 9x^3 + 8x^2 - 6x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

mit  $x_1 := 1$ ,  $x_2 := 2$ ,  $z_1^\pm := \pm i$ ,  $z_2^\pm := \pm i\sqrt{2}$ . Wir fassen diese Eigenschaft von Polynomen über einem Körper  $\mathbf{K}$  in der folgenden Definition zusammen.

**Definition 2.15** Ein Polynom  $P_n \in \mathbf{K}[z]$  vom Grade  $n \geq 1$  heie **irreduzibel über  $\mathbf{K}$**  oder ein **Primpolynom**, wenn es keine Polynome  $Q, R \in \mathbf{K}[z]$  gibt mit  $\text{Grad } Q < n$ ,  $\text{Grad } R < n$  und  $P_n(z) = Q(z) \cdot R(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}$ .

Im obigen Beispiel sind  $x^2 + 1$  und  $x^2 + 2$  irreduzibel über  $\mathbf{R}$ , aber **reduzibel** ber  $\mathbf{C}$ , denn es gilt ja  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$  und  $x^2 + 2 = (x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$ . Ganz analog ist  $x^2 - 2$  irreduzibel über  $\mathbf{Q}$ , aber **reduzibel** ber  $\mathbf{R}$ .

Eine weitere Hilfestellung für das **Raten** von Nullstellen leistet folgender

**Satz 2.15** Hat das Polynom  $P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbf{Z}[x]$  mit **ganzzahlige** Koeffizienten  $a_k \in \mathbf{Z}$  **ganzzahlige** Nullstellen  $x_k \in \mathbf{Z}$ , so sind diese **Teiler** des Koeffizienten  $a_0$ , (wobei auch die *trivialen* Teiler  $\pm 1, \pm a_0$  zulässig sind).

**BSP. (2.5.5)** Die ganzzahligen Nullstellen des Polynoms  $P_4(x) := 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 24x - 16$  brauchen nur unter den Teilern von  $a_0 = -16$  gesucht zu werden. Als mögliche Kandidaten müssen die Zahlen  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$  betrachtet werden. Man probiert mit den betragskleinsten Teilern mit dem Resultat, dass  $x_1 = 1$  als Nullstelle erkannt wird. Das Abspalten des Linearfaktors  $x - x_1$  mit dem HORNER-Schema (siehe unten) liefert ein Restpolynom  $P_3(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 16$ . Ganzzahlige Nullstellen von  $P_3(x)$  teilen wie vorher den Koeffizienten 16. Die Probe mit den obigen Teilern führt auf eine Nullstelle  $x_2 = 2$ , und nach Abspalten des Linearfaktors  $x - x_2$  mit dem HORNER-Schema verbleibt das quadratische Restpolynom  $P_2(x) = 2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$ .

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -6 & -4 & 24 & -16 \\ 1 & * & 2 & -4 & -8 & 16 \\ \hline & 2 & -4 & -8 & 16 & \boxed{0} \\ 2 & * & 4 & 0 & -16 & \\ \hline & 2 & 0 & -8 & \boxed{0} & \end{array} = P_4(1)$$

An der Linearfaktorzerlegung  $P_4(x) = 2(x - 1)(x - 2)^2(x + 2)$  sind jetzt alle Nullstellen mit ihren Vielfachheiten ablesbar.



# Kapitel 3

## Folgen und Reihen

### 3.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Als einführendes Beispiel wollen wir das **babylonische Wurzelziehen** studieren (HERON-Verfahren; [HERON aus Alexandria, griechischer Mathematiker, ca.75 n.Chr.].

**BSP. (3.1.1)** Von HERON stammt der Vorschlag, die Wurzel  $\sqrt{a}$  der positiven Zahl  $a > 0$  **algorithmisch** durch die folgende Rekursion zu berechnen:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 > 0 \text{ beliebig,} \\ x_{n+1} := \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \forall n = 0, 1, \dots \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

Dieser Algorithmus kann sehr einfach auf einem Rechner implementiert werden, und zwar programmiert man folgende Iterationsvorschrift:

|    |   |
|----|---|
| 1: | Einlesen: $a, x_0, \epsilon; \quad x := x_0;$ |
| 2: | $y := 0.5 * (x + a/x);$                       |
| 3: | <b>wiederhole</b>                             |
| 4: | $x := 0.5 * (x + a/x);$                       |
| 5: | $y := 0.5 * y;$                               |
| 6: | <b>bis</b> $(y < \epsilon).$                  |

Hier wird mit  $y$  der **Fehler** des Verfahrens berechnet (eine Begründung findet man weiter unten), und mit  $\epsilon$  wird eine vorgegebene **Fehlergrenze** bezeichnet. In der Tabelle auf der nächsten Seite sind numerische Ergebnisse aufgelistet, die man für die zwei Zahlen  $a_1 := 36$ ,  $a_2 := 99$  mit  $x_0 := 1$  und  $\epsilon := 10^{-6}$  erhält.

**Warum hat das HERON-Verfahren Erfolg?** Durch Quadrieren der Iterationsvorschrift (1.1) und anschließender Subtraktion von  $a$  erhält man:  $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4} (x_n - a/x_n)^2 \geq 0$ , also

(i)  $x_n \geq \sqrt{a} > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$

Hieraus resultiert  $a/x_n \leq a/\sqrt{a} = \sqrt{a}$ , was auf die folgenden Ungleichungen führt:

(ii)  $x_{n+1} \leq \frac{1}{2} (x_n + \sqrt{a}) \leq x_n$ , und somit  $x_n \geq x_{n+1} \geq \sqrt{a} > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$

Es folgen

(iii)  $0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{a}),$

und durch wiederholtes Anwenden ergibt sich:

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 (x_{n-1} - \sqrt{a}) \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (x_1 - \sqrt{a}).$$

Wird im letzten Term noch  $\sqrt{a}$  gestrichen, so haben wir schließlich gezeigt:

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

| $a_1 := 36$ |                   |     |                   | $a_2 := 99$ |                   |     |                   |
|-------------|-------------------|-----|-------------------|-------------|-------------------|-----|-------------------|
| $n$         | $x_n$             | $n$ | $x_n$             | $n$         | $x_n$             | $n$ | $x_n$             |
| 0           | 1.000 000 000E+00 | 14  | 6.000 000 000E+00 | 0           | 1.000 000 000E+00 | 14  | 9.949 874 371E+00 |
| 1           | 1.850 000 000E+01 | 15  | 6.000 000 000E+00 | 1           | 5.000 000 000E+01 | 15  | 9.949 874 371E+00 |
| 2           | 1.022 297 297E+01 | 16  | 6.000 000 000E+00 | 2           | 2.599 000 000E+01 | 16  | 9.949 874 371E+00 |
| 3           | 6.872 226 737E+00 | 17  | 6.000 000 000E+00 | 3           | 1.489 957 868E+01 | 17  | 9.949 874 371E+00 |
| 4           | 6.055 351 744E+00 | 18  | 6.000 000 000E+00 | 4           | 1.077 203 093E+01 | 18  | 9.949 874 371E+00 |
| 5           | 6.000 252 984E+00 | 19  | 6.000 000 000E+00 | 5           | 9.981 249 207E+00 | 19  | 9.949 874 371E+00 |
| 6           | 6.000 000 005E+00 | 20  | 6.000 000 000E+00 | 6           | 9.949 923 682E+00 | 20  | 9.949 874 371E+00 |
| 7           | 6.000 000 000E+00 | 21  | 6.000 000 000E+00 | 7           | 9.949 874 371E+00 | 21  | 9.949 874 371E+00 |
| 8           | 6.000 000 000E+00 | 22  | 6.000 000 000E+00 | 8           | 9.949 874 371E+00 | 22  | 9.949 874 371E+00 |
| 9           | 6.000 000 000E+00 | 23  | 6.000 000 000E+00 | 9           | 9.949 874 371E+00 | 23  | 9.949 874 371E+00 |
| 10          | 6.000 000 000E+00 | 24  | 6.000 000 000E+00 | 10          | 9.949 874 371E+00 | 24  | 9.949 874 371E+00 |
| 11          | 6.000 000 000E+00 | 25  | 6.000 000 000E+00 | 11          | 9.949 874 371E+00 | 25  | 9.949 874 371E+00 |
| 12          | 6.000 000 000E+00 |     |                   | 12          | 9.949 874 371E+00 | 26  | 9.949 874 371E+00 |
| 13          | 6.000 000 000E+00 |     |                   | 13          | 9.949 874 371E+00 |     |                   |

Wir ziehen folgende Schlüsse.

- Durch die Rekursionsvorschrift (1.1) wird eine **Folge** von Zahlen  $x_n \in \mathbf{R}_+$  definiert:

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots \geq \sqrt{a} > 0.$$

- Will man  $\sqrt{a}$  durch die Rekursion (1.1) mit einer vorgegebenen Genauigkeit  $\epsilon > 0$  berechnen (zum Beispiel:  $\epsilon := 10^{-6}$ , das heißt, will man  $|x_{n+1} - \sqrt{a}| < 10^{-6}$  erreichen), so ist dazu eine gewisse Anzahl  $N = N(\epsilon)$  von Iterationen erforderlich. Ein ausreichendes  $N(\epsilon)$  kann aus (1.2) berechnet werden durch die Forderung

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0^2 + a}{2\epsilon x_0} < 2^N.$$

Für  $a := 36$ ,  $x_0 := 1$  und  $\epsilon := 10^{-6}$  haben wir somit  $1.85 \cdot 10^7 < 2^N$  zu erfüllen, was sicher für  $N = 25$  erreicht wird:  $2^{25} = 3.355\,443\,2 \cdot 10^7$ . Dieser Wert für  $N$  stimmt mit der Anzahl der in der obigen Tabelle durchgeführten Iterationen überein. Man erkennt aber auch, dass die geforderte Genauigkeit bereits viel früher erreicht wird, nämlich nach sechs Iterationsschritten. Die Abschätzung (1.2) ist recht grob; sie liefert aber immer eine **sichere** Schranke für die **Maximalzahl** der durchzuführenden Iterationen.

**Bemerkung 3.1** (a) Wegen (ii) gilt  $x_N \geq x_{N+1} \geq x_{N+p} \geq \sqrt{a} \forall p \in \mathbf{N}$ , und somit auch

$$|x_{N+p} - \sqrt{a}| < \epsilon \quad \forall p \in \mathbf{N}.$$

Das heißt äquivalent: Bei beliebig vorgegebener Genauigkeit  $\epsilon > 0$  existiert eine Nummer  $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$  mit  $|x_n - \sqrt{a}| < \epsilon \forall n > N(\epsilon)$ . Nach dem Archimedischen Axiom (vgl. Satz 1.9) ist es auch möglich,  $N(\epsilon) \in \mathbf{R}$  zu wählen. Denn es gibt immer eine natürliche Zahl  $n \in \mathbf{N}$  mit  $n \geq N(\epsilon)$ . Es ist klar, dass es bei der Genauigkeit  $\epsilon > 0$  nicht auf **große** Werte ankommt, sondern auf Werte, die **beliebig nahe bei 0** gewählt werden können. Deshalb darf auch  $\epsilon := 10^{-k}$  mit beliebigem Exponenten  $k \in \mathbf{N}$

gesetzt werden. In mathematischer Kurzform kann der hier beschriebene Näherungsprozess in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : |x_n - \sqrt{a}| < 10^{-k} \forall n > N.} \quad (1.3)$$

(b) Mit (1.3) wird ausgedrückt, dass die **Folglieder**  $x_n$  für alle hinreichend großen Indizes  $n$  beliebig nahe bei  $\sqrt{a}$  liegen. Wir sagen, die Folge der  $x_n$  **konvergiert gegen**  $\sqrt{a}$  oder die Folge der  $x_n$  hat den **Grenzwert**  $\sqrt{a}$ .  $\square$

Es ist nicht erforderlich, die Folgenglieder  $x_n$  auf die Menge  $\mathbf{R}_+$  einzuschränken. Wir können beliebige Elemente  $a_n$  aus noch näher zu spezifizierenden Mengen  $M$  betrachten.

**Definition 3.1** *Es sei eine nichtleere Menge  $M$  gegeben. Eine beliebige Abbildungsvorschrift  $a : \mathbf{N} \rightarrow M$ ,  $\mathbf{N} \ni n \mapsto a(n) =: a_n \in M$  heiÙe eine  **$M$ -Folge**. Die folgenden Bezeichnungen sind auch üblich:*

$$\boxed{(i) (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M, \quad (ii) a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in M; \quad (iii) \text{ Folge } a_n \in M.}$$

Beginnt die Indizierung nicht bei  $n = 1$ , sondern bei  $n_0 \in \mathbf{Z}$ , so schreiben wir  $(a_n)_{n \geq n_0} \subset M$ , usw.

**BSP. (3.1.2)** Für die hier aufgezählten Folgen gelten  $M := \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  oder  $M := \mathbf{C}$ .

- (a)  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbf{N}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \quad (\rightarrow 0)$ ;
- (b)  $(2^n)_{n \in \mathbf{N}_0} = 1, 2, 4, \dots \quad (\rightarrow +\infty)$ ;
- (c)  $(-n)_{n \in \mathbf{N}_0} = 0, -1, -2, \dots \quad (\rightarrow -\infty)$ ;
- (d)  $(i^n)_{n \in \mathbf{N}_0} = 1, i, -1, -i, 1, \dots$ ;
- (e)  $(r^n e^{in\varphi})_{n \in \mathbf{N}_0} = 1, r e^{i\varphi}, r^2 e^{2i\varphi}, \dots$ ;
- (f)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}} = 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \dots \quad (\rightarrow e)$ ;
- (g)  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$  mit  $a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right)$  für  $\alpha > 0$ ,  $a_0 := 1$ , vgl. (1.1);
- (h)  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$  mit  $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$  für  $a_0 := 0$ ,  $a_1 := 1$ , FIBONACCI-Zahlen.

| FIBONACCI-Zahlen |       |     |       |     |        |     |          |
|------------------|-------|-----|-------|-----|--------|-----|----------|
| $n$              | $a_n$ | $n$ | $a_n$ | $n$ | $a_n$  | $n$ | $a_n$    |
| 0                | 0     | 10  | 55    | 20  | 6765   | 30  | 832040   |
| 1                | 1     | 11  | 89    | 21  | 10946  | 31  | 1346269  |
| 2                | 1     | 12  | 144   | 22  | 17711  | 32  | 2178309  |
| 3                | 2     | 13  | 233   | 23  | 28657  | 33  | 3524578  |
| 4                | 3     | 14  | 377   | 24  | 46368  | 34  | 5702887  |
| 5                | 5     | 15  | 610   | 25  | 75025  | 35  | 9227465  |
| 6                | 8     | 16  | 987   | 26  | 121393 | 36  | 14930352 |
| 7                | 13    | 17  | 1597  | 27  | 196418 | 37  | 24157817 |
| 8                | 21    | 18  | 2584  | 28  | 317811 | 38  | 39088169 |
| 9                | 34    | 19  | 4181  | 29  | 514229 | 39  | 63245986 |

In den Beispielen (g) und (h) wird die Folge durch eine **rekursive Definition** festgelegt. In den Fällen (a), (b), (c) und (f) wurde bereits angedeutet, dass die dort definierten Folgen jeweils einem Grenzwert zustreben. Um ein solches Verhalten für eine beliebige Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$  präzisieren zu können, muss auf der Menge  $M$  eine **Messfunktion**  $d(a, b)$  erklärt sein, mit welcher die **Distanz** zwischen zwei beliebigen Elementen  $a, b \in M$  gemessen werden kann. Erst dann kann man sagen, dass die Folgenglieder  $a_n$  für hinreichend großes  $n$  **beliebig nahe** bei einem Element  $a \in M$  liegen. Eine solche Messfunktion oder **Metrik** ist uns bisher lediglich auf  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  und  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$  bekannt, nämlich die durch die Betragsfunktion induzierte Metrik

$$d(a, b) := \|a - b\| := |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbf{K}.$$

Somit ist  $d(\cdot, \cdot)$  auch auf jeder Teilmenge  $M \subset \mathbf{K}$  erklärt.

**Definition 3.2** Eine  $\mathbf{K}$ -Folge heie **Zahlenfolge** oder kurz **Folge**, falls keine Mißverständnisse auftreten können.

Auf jeder Menge  $M$ , auf der eine **Metrik**  $d(\cdot, \cdot) : M \times M \rightarrow [0, +\infty)$  mit den Eigenschaften (M1)–(M3), nämlich

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0 \text{ und } (d(x, y) = 0 \text{ genau, wenn } x = y);$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(Dreiecksungleichung)

erklärt ist, macht die folgende Definition einen Sinn:

**Definition 3.3** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$  heie **konvergent gegen ein Element**  $a \in M$ , wenn gilt

$$\begin{aligned} & \forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : d(a_n, a) < 10^{-k} \quad \forall n > N. \\ & (M \subseteq \mathbf{K} : \forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : |a_n - a| < 10^{-k} \quad \forall n > N.) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  konvergent gegen  $a$ , so heie  $a$  **Grenzwert** der Folge. Man schreibt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ oder } a_n \rightarrow a \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) oder kurz } a_n \rightarrow a.$$

Nicht konvergente Folgen heißen **divergent**.

**BSP. (3.1.3)** Für  $\alpha > 0$  betrachten wir

$$\mathbf{R} \supset \left( \frac{1}{n^\alpha} \right)_{n \in \mathbf{N}} = 1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \dots \stackrel{?}{\rightarrow} 0.$$

Wir zeigen die Konvergenzeigenschaft (1.4) mit  $a = 0$ . Dazu wählen wir zu beliebig vorgegebenem  $k \in \mathbf{N}$  die Zahl  $N$  gemäß  $N := 10^{k/\alpha}$ . Wir folgern

$$\forall n > N : |a_n - 0| = \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{N^\alpha} = (10^{-k/\alpha})^\alpha = 10^{-k}.$$

Also gilt (1.4) mit dem Resultat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0.$$

Wir sollten hier daran erinnern, dass Potenzen zunächst nur für *rationale* Exponenten  $\alpha$  erklärt worden sind. Das obige Resultat bleibt aber auch für die noch zu definierenden *reellen* Exponenten richtig.

**BSP. (3.1.4)** Für festes  $a \in \mathbf{C}$  betrachten wir die Folge  $(a^n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$  und treffen dazu folgende **Fallunterscheidungen**:

$$\bullet \quad a = \begin{cases} 0 & \Rightarrow a^n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \\ 1 & \Rightarrow a^n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1. \end{cases}$$

**Definition 3.4** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$  mit  $a_n = a \quad \forall n \in \mathbf{N}$  heie **konstante Folge**. Die konstante Folge  $(a)_{n \in \mathbf{N}}$  konvergiert immer, und zwar gegen den Grenzwert  $a$ .

- Es sei  $|a| < 1$ . Dann existiert eine Zahl  $b > 0$  mit  $\frac{1}{|a|} = 1 + b > 1$ . Zu  $k \in \mathbf{N}$  wählen wir jetzt  $N := \frac{1}{b} 10^k$ . Unter Verwendung der BERNOULLI-Ungleichung erschließen wir

$$\forall n > N : |a_n - 0| = |a|^n = \frac{1}{(1+b)^n} \leq \frac{1}{1+nb} < \frac{1}{nb} < \frac{1}{Nb} = 10^{-k}.$$

Also gilt (1.4) mit dem Ergebnis  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad \forall |a| < 1$ .

- Es sei  $|a| \geq 1$ , aber  $a \neq 1$ . Dann existiert eine Zahl  $b > 0$  mit  $|a - 1| = b$ . Wäre die Folge  $a_n$  konvergent gegen den Grenzwert  $c$ , so gäbe es gemäß (1.4) zu  $k \in \mathbf{N}$  mit  $10^{-k} < b/3$  ein  $N \in \mathbf{R}$  mit der Eigenschaft  $|a_n - c| < 10^{-k} \quad \forall n > N$ . Wir hätten nun

$$|a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - c + c - a_n| \leq |a_{n+1} - c| + |a_n - c| < 2 \cdot 10^{-k} < \frac{2b}{3} \quad \forall n > N,$$

was im Widerspruch steht zu  $|a_{n+1} - a_n| = |a|^{n+1} |a - 1| = |a|^{n+1} b \geq b$ . Also haben wir **Divergenz** für  $|a| \geq 1, a \neq 1$ .

Zusammenfassend haben wir gezeigt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & : |a| < 1, \\ 1 & : a = 1, \\ \text{divergent} & : |a| \geq 1, a \neq 1. \end{cases} \quad (1.5)$$

**Bemerkung 3.2** (a) Die Zahl  $N \in \mathbf{R}$  in (1.4) ist durch das vorgegebene  $k$  **nicht eindeutig** festgelegt. Gilt (1.4) für ein  $N$ , so leistet jede weitere Zahl  $N_1 \geq N$  das in (1.4) Verlangte.

(b) In (1.4) sind auch  $\leq$ -Zeichen hinter dem Doppelpunkt zulässig:

$$d(a_n, a) \leq 10^{-k} \quad \forall n \geq N \quad (\text{bzw. } |a_n - a| \leq 10^{-k} \quad \forall n \geq N.)$$

(c) Gilt  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ), so auch  $a_{n+p} \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) für jedes **fest**e  $p \in \mathbf{N}$ . Ebenso hat man  $a_{n-1} \rightarrow a, a_{n-2} \rightarrow a$ , usw.

(d) Aus (1.5) erhalten wir insbesondere die Divergenz der Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}_0} = 1, -1, 1, -1, \dots$ . Ebenso divergiert die Folge (d) in BSP. (3.1.2). Die Folge (e) hingegen ist konvergent für  $0 \leq r < 1$  sowie divergent für  $r > 1$ . Für  $r = 1$  liegt Konvergenz genau dann vor, wenn  $\varphi_H = 0$  gilt.

(e) Existiert für **rekursiv definierte** Folgen  $a_{n+1} := f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-p}), n \geq p$ , ein Grenzwert  $a$ , so muss für diesen **notwendigerweise** gelten:

$$a = f(a, a, \dots, a). \quad (1.6)$$

Für die Folge (g) in BSP. (3.1.2) heißt dies  $a = \frac{1}{2} (a + \frac{a}{a})$  oder quivalent  $a^2 = a$ . Für das Beispiel (h) der FIBONACCI-Zahlen hingegen heißt dies  $a = a + a = 2a$ , also  $a = 0$ . Diese Zahl ist aber offensichtlich nicht Grenzwert der Folge (h), da ein solcher in  $\mathbf{R}$  gar nicht existiert. Aus der rekursiven Definition (h) können die FIBONACCI-Zahlen sehr leicht numerisch berechnet werden. Gibt man einen festen Index  $N \in \mathbf{N}$  vor, so ermittelt man die Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_N$  mit Hilfe der folgenden Iterationsvorschrift, die wir oben auch zur Berechnung der ersten 40 FIBONACCI-Zahlen verwendet haben.

|    |  |
|----|--|
| 1: | Einlesen: $N \in \mathbf{N}$ ; $a_0 := 0$ ; $a_1 := 1$ ; |
| 2: | für $n := 2, 3, \dots, N$ :                              |
| 3: | $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ . (Ende $n$ )                 |

Eine **explizite** Darstellung der FIBONACCI-Zahlen  $a_n$  gewinnt man aus der rekursiven Definition (h) mit einem Ansatz  $a_n = \alpha q^n$ . Es folgt:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$0 < \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \doteq 0.4472 < 0.5.$$

Somit ist der zweite Summand nur eine dezimale Korrektur des ersten Summanden mit maximaler Größenordnung  $\pm 0.45$ . Wegen  $a_n \in \mathbf{N}_0$  erhält man die FIBONACCI-Zahlen offensichtlich durch **Runden** des ersten Summanden auf einen ganzzahligen Wert. In den meisten Programmiersprachen hat man die Standardprozedur **round** zur Verfügung, so dass gilt:

$$a_n = \text{round} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Es wird hier schon ganz offensichtlich, dass  $a_n \rightarrow +\infty$  gilt. Man beachte also:

**Aus der Bedingung (1.6) folgt keineswegs, dass ein Grenzwert  $a$  existiert!**

Wie das Beispiel der FIBONACCI-Zahlen zeigt, ist es durchaus sinnvoll, für **R**-Folgen auch Grenzwerte  $\pm\infty$  zuzulassen.

**Definition 3.5** Eine **R**-Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  heiÙe **uneigentlich konvergent** gegen  $+\infty$  (bzw.  $-\infty$ ), wenn gilt:

$$\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : a_n > 10^k \quad (\text{bzw. } a_n < -10^k) \quad \forall n > N. \quad (1.7)$$

**BSP. (3.1.5)** Wir zeigen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ . In der Tat, es gilt wegen  $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n < 3$  und wegen  $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$  die Bedingung (1.7):

$$a_n := \frac{n^n}{n!} > \frac{n^n}{(\frac{n+1}{2})^n} = \frac{2^n}{(1 + \frac{1}{n})^n} > \frac{2^n}{3} = \frac{1}{3} \cdot 16^{n/4} > \frac{1}{3} \cdot 10^k \quad \forall n > N := 4k.$$

Eine konvergente Folge kann **nicht mehrere Grenzwerte** haben:

**Satz 3.1** Jede konvergente **M**-Folge besitzt genau einen Grenzwert.

*Begründung:* Wären  $a, b \in M$  verschiedene Grenzwerte der konvergenten Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , so hätten wir auf Grund des Metrikaxioms (M1):  $0 < d := d(a, b)$ . Wir wählen dann  $k \in \mathbf{N}$  so, dass  $2 \cdot 10^{-k} < d$  gilt. Aus (1.4) folgt:

$$\exists N_1, N_2 \in \mathbf{R} : d(a_n, a) < 10^{-k} \quad \forall n > N_1 \quad \text{und} \quad d(a_n, b) < 10^{-k} \quad \forall n > N_2.$$

Für  $N := \max\{N_1, N_2\}$  ergibt sich nun aus der Dreieckungleichung der Widerspruch

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b) < 2 \cdot 10^{-k} < d = d(a, b) \quad \forall n > N.$$

Also gilt  $a = b$ . □

---

In der oben getroffenen Konvergenzdefinition setzt man die Kenntnis des Grenzwertes  $a$  einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  voraus. Da die Bestimmung des Grenzwertes in sehr vielen Fällen äußerst schwierig (oder gar unmöglich) ist, möchte man über Kriterien verfügen, die vorab **ohne Kenntnis** des Grenzwertes eine Aussage über Konvergenz oder Divergenz zulassen. Solche Kriterien heißen **Konvergenzkriterien**. Es werden einige vorbereitende Begriffe erklärt.

**Definition 3.6** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$  heie **beschränkt**, wenn Elemente  $a \in M$  und  $K > 0$  existieren mit

$$d(a_n, a) \leq K \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Insbesondere ist eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  beschränkt, wenn gilt:

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

**Ausschließlich für  $\mathbf{R}$ -Folgen** gelten die folgenden Begriffe: Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  heie **nach oben** (nach unten) **beschränkt**, wenn eine **obere** (untere) **Schranke**  $K$  existiert mit:

$$a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (a_n \geq K \quad \forall n \in \mathbf{N}).$$

Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  heie **(streng) monoton wachsend** ((streng) monoton fallend), wenn gilt:

$$a_n \stackrel{<}{(=)} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (a_n \stackrel{>}{(=)} a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N}).$$

**BSP. (3.1.6)** (a) Die Folge  $a_n := e^{in\varphi} \in \mathbf{C}$ ,  $\varphi \in \mathbf{R}$ , erfüllt  $|a_n| = 1 =: K \quad \forall n \in \mathbf{N}$ , und ist somit beschränkt.

(b) Für die Folge  $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$  haben wir in (9.6), [Abschnitt 1.9] gezeigt:

$$\text{unter Schranke} := 2 \leq a_n < 3 =: \text{obere Schranke}.$$

Ferner gilt ebenfalls nach (9.6), [Abschnitt 1.9] die Ungleichung  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1}$ , so dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  streng monoton wachsend ist (streng monoton  $\uparrow$ ).

**Bemerkung 3.3** (a) Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  ist genau dann beschränkt, wenn obere und untere Schranken existieren.

(b) Hat eine monoton wachsende (fallende) Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  einen Grenzwert  $a$ , so ist  $a$  obere (untere) Schranke. □

Man kann Aussage (b) verallgemeinern: (Eigentlich) konvergente Folgen sind stets beschränkt!

**Satz 3.2** Konvergiert eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$  gegen einen Grenzwert  $a \in M$ , so ist die Folge beschränkt.

*Begründung:* Setzen wir in (1.4)  $k = 1$ , so finden wir ein  $N \in \mathbf{N}$  mit  $d(a_n, a) < 10^{-1} \forall n > N$ . Setzen wir nun

$$K := \max\{d(a_1, a), d(a_2, a), \dots, d(a_N, a), 10^{-1}\},$$

so gilt schon  $d(a_n, a) \leq K \forall n \in \mathbf{N}$ . (Für  $\mathbf{K}$ -Folgen hat man  $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 10^{-1} + |a|$ , und somit  $|a_n| \leq K \forall n \in \mathbf{N}$  mit

$$K := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a| + 10^{-1}\}.$$

**Beachte:** Die Umkehrung des obigen Satzes gilt i.a. **nicht:** Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent, wie das Beispiel der Folge  $a_n := (-1)^n$  lehrt. **Jedoch:**

**Satz 3.3 (Hauptsatz über monotone Konvergenz)**

Die reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  sei **monoton** und **beschränkt**. Dann hat die Folge einen Grenzwert in  $\mathbf{R}$ , das heißt, sie ist konvergent.

*Begründung:* Wir verwenden das Supremumsprinzip (vgl. Satz 1.16), welches letztlich eine andere Formulierung des Vollständigkeitsaxioms von  $\mathbf{R}$  ist. Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sei etwa monoton wachsend. Dann ist die Menge  $M := \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbf{R}$  nichtleer und nach oben beschränkt. Mithin existiert  $\sup M =: a \in \mathbf{R}$ , und dies ist gemäß (8.1), [Satz 1.16], äquivalent mit

$$\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{N} : 0 \leq a - a_N < 10^{-k}.$$

Da die Folge monoton wächst, muss dann  $0 \leq a - a_n = |a - a_n| \leq |a - a_N| < 10^{-k} \forall n > N$  gelten. Also konvergiert die Folge.  $\square$

**Bemerkung 3.4** (a) Aus Satz 3.3 geht **nicht** hervor, nach welcher Rechenvorschrift der Grenzwert  $a$  bestimmt werden kann.

(b) Satz 3.3 liefert in den folgenden Sonderfällen **Konvergenz:**

- |   |
|---|
| <p>(i) Die Folge <math>(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}</math> ist <b>monoton</b> <math>\downarrow</math> und nach <b>unten</b> beschränkt<br/> <math>\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \inf a_n</math> existiert.</p> <p>(ii) Die Folge <math>(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}</math> ist <b>monoton</b> <math>\uparrow</math> und nach <b>oben</b> beschränkt<br/> <math>\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \sup a_n</math> existiert.</p> |
|---|

(c) Das Konvergenzverhalten von Folgen wird **nicht** beeinflusst, wenn man **endlich viele** Elemente am **Anfang** der Folge abändert, hinzufügt oder weglässt. *Zum Beispiel* haben die Folgen  $a_n := \frac{1}{n}$  und

$$\tilde{a}_n := \begin{cases} n & : n = 1, 2, \dots, 111, \\ \frac{1}{n} & : n \geq 112 \end{cases}$$

denselben Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n$ . Demgemäß braucht z.B. eine reelle Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  erst ab einem Index  $n_0$  monoton zu sein. In diesem Falle ist die Bemerkung (b) zu modifizieren:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \inf\{a_n : n \geq n_0\} \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \sup\{a_n : n \geq n_0\}.$$

**BSP. (3.1.7)** Wir zeigen: Für festes  $a > 0$  und für jedes  $n \geq n_0 \geq a$  ist die Folge  $a_n := \frac{a^n}{n!}$ ,  $n \in \mathbf{N}_0$ , monoton  $\downarrow$  und nach unten beschränkt. Also muss sie gemäß Satz 3.3 konvergieren.



- *Monotonie*: Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} a_n \leq \frac{a}{n_0+1} a_n < a_n \quad \forall n \geq n_0.$$

- Die *Beschränktheit* nach unten ist klar wegen  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}_0$ .

Um den gesicherten Grenzwert  $b$  zu berechnen, betrachten wir:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{n+1} a_n \right) \stackrel{?}{=} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \stackrel{?}{=} ba \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Sofern die Schritte bei "?" zulässig sind, erhalten wir also:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 0.}$$

Die Korrektheit der Übergänge bei "?" wird gerechtfertigt durch folgenden

### Satz 3.4 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Gegeben seien **konvergente** Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  mit Grenzwerten  $a$  bzw.  $b$ . Dann gilt:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm \lambda b_n) = a \pm \lambda b \quad \forall \lambda \in \mathbf{K},} \quad (1.8)$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,} \quad (1.9)$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} \text{ falls } b \neq 0 \neq b_n \quad \forall n \in \mathbf{N}.} \quad (1.10)$$

*Begründung*: Wir zeigen hier nur die Produktregel (1.9). Die anderen Regeln beweist man nach denselben Prinzipien. Satz 3.2 sichert zunächst die Beschränktheit  $|a_n| \leq K$ ,  $|b_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbf{N}$ . Damit gilt auch  $|a| \leq K$ ,  $|b| \leq K$ . Gemäß (1.4) existieren zu jedem  $k \in \mathbf{N}$  Zahlen  $N_a, N_b$  mit

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq K[|b_n - b| + |a_n - a|] < 2K \cdot 10^{-k} \quad \forall n > \max\{N_a, N_b\}.$$

Dies bedeutet gerade  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ . □

**BSP. (3.1.8)** Die Folge  $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , ist monoton  $\uparrow$  und nach oben durch 3 beschränkt, wie wir bereits in BSP. (3.1.6(b)) gezeigt haben. Gemäß Satz 3.3 konvergiert sie.

**Definition 3.7** Der gesicherte Limes der Folge  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbf{N}}$  heißt **EULERSCHE ZAH**  $e$ ,

$$\boxed{e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.}$$

**Bemerkung 3.5** (a) Die Eulersche Zahl  $e$  ist **irrational**; ein Näherungsdezimalbruch ist gegeben durch

|       |       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $e =$ | 2.718 | 281 | 828 | 459 | 045 | 235 | 360 | 287 | 471 | 352 | 662 | 497 | 757 | 247 | 093 |
|       | 699   | 959 | 574 | 966 | 967 | 627 | 724 | 076 | 630 | 353 | 547 | 594 | 571 | 382 | 178 |
|       | 525   | 166 | 427 | 427 | 466 | 391 | 932 | 003 | 059 | 921 | 817 | 413 | 596 | 629 | 043 |
|       | 572   | 900 | 334 | 295 | 260 | 595 | 630 | 7   |     |     |     |     |     |     |     |

Ein Berechnungsverfahren der (exakten) 157 Dezimalstellen erhält man z.B. durch Summation reziproker Fakultäten. Dazu werden wir in Abschnitt 3.2 eine andere Darstellung der Zahl  $e$  herleiten.

(b) Die folgenden Grenzwerte sollte man sich merken:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} = e \quad \forall p \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.}$$

In der Tat, es gilt wegen (1.9):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \right] = e \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \right] = e.$$

Ebenso folgt aus (1.10):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}\right]^n = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}} = \frac{1}{e}.$$

**BSP. (3.1.9)** Die Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Wir zeigen, dass die Folge monoton  $\uparrow$  und nach oben beschränkt ist:  $a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ . Die *Monotonie* folgt aus  $a_{n+1} - a_n = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 - a_n + 1 = \left(\frac{a_n}{2} - 1\right)^2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ . Die *Beschränktheit* zeigen wir durch **vollständige Induktion**.

- Die *Verankerung* gilt für  $n = 2$ , denn  $a_2 = \frac{5}{4} \leq 2$  ist wahr.
- *Vererbung*: Nehmen wir  $a_n \leq 2$  als wahr an, so folgt  $a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \leq 1 + 1 = 2$ , was zu zeigen war.

Aus Satz 3.3 erschließen wir jetzt die Konvergenz der Folge  $a_n$ , deren Grenzwert  $a$  wegen (1.6) der Gleichung  $a = \frac{a^2}{4} + 1$  genügen muss. Es gibt genau eine Lösung, nämlich  $a = 2$ .

**Bemerkung 3.6** Die Aussagen des obigen Satzes 3.4 lassen sich **nicht** auf allgemeine  $M$ -Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$  übertragen. Die Regel (1.8) gilt jedoch in solchen Mengen  $M$ , in denen eine Addition  $+$  und eine Multiplikation mit **Skalaren**  $\lambda \in \mathbf{K}$  erklärt ist. Solche Mengen sind gerade die (linearen) **Vektorräume über  $\mathbf{K}$** . Die Regeln (1.9) und (1.10) gelten allgemein in Körpern  $\mathbf{K}$ , die eine Metrik tragen.  $\square$

Auch die folgenden Begriffe gelten nicht für beliebige Mengen.

**Definition 3.8** Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  mit Grenzwert 0 heie eine **Nullfolge**.

**Satz 3.5** (a) Ist  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  eine **Nullfolge** und ist die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  **beschränkt**, so gilt

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.}$$

(b) **Einschlusskriterium**. Es seien **reelle** Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$  gegeben mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Dann gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

*Begründungen:* (a) Es gelte  $|b_n| \leq K$ . Wegen (1.4) können wir zu  $k \in \mathbf{N}$  ein  $N \in \mathbf{R}$  bestimmen mit  $|a_n| < 10^{-k} \forall n > N$ . Hieraus erhalten wir  $|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \leq K |a_n| < K \cdot 10^{-k} \forall n > N$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .

(b) Die Aussage ist heuristisch klar wegen  $a = \lim a_n \leq \lim b_n \leq \lim c_n = a$ . Wir zeigen dies in korrekter Weise. Gemäß (1.4) gibt es zu  $k \in \mathbf{N}$  Zahlen  $N_1, N_2$  mit  $|a_n - a| < 10^{-k} \forall n > N_1$  und  $|c_n - a| < 10^{-k} \forall n > N_2$ . Es folgt

$$-10^{-k} < a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a < 10^{-k} \quad \forall n > \max\{N_1, N_2\} =: N_3,$$

oder äquivalent  $|b_n - a| < 10^{-k} \forall n > N_3$ . □

**BSP. (3.1.10)** Wir betrachten nochmals die Folge  $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbf{N}_0}$  aus BSP. (3.1.7), nun mit beliebigem  $a \in \mathbf{K}$ . Ist  $a = 0$ , so liegt die konstante Folge  $a_n = 0$  mit Grenzwert  $a = 0$  vor. Für  $a \neq 0$  setzen wir  $a = |a| e^{i\varphi}$ ,  $|a| > 0$ . Wir definieren  $a_n := \frac{|a|^n}{n!}$  und  $b_n := e^{in\varphi}$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , wie wir schon in BSP. (3.1.7) gezeigt haben. Wegen  $|b_n| = 1$  ist Satz 3.5(a) anwendbar:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbf{K}.}$$

**Bemerkung 3.7** Die folgenden Grenzwerte sind einfach zu verifizieren:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^q} = \begin{cases} 0 & : p < q, \\ 1 & : p = q, \\ +\infty & : p > q. \end{cases}}$$

Wir werden erst mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung den folgenden Grenzwert berechnen können:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^q} = +\infty \quad \forall a > 1 \quad \forall q > 0.$$

(Für  $q \leq 0$  ist dies trivial.) Man erhält nun die folgende **Stärketabelle** über das Wachstum von Potenzen und Fakultäten:

$$\boxed{n^p \overset{p < q}{\prec} n^q \overset{a > 1}{\prec} a^n \overset{a \in \mathbf{K}}{\prec} n! \prec n^n.}$$

**BSP. (3.1.11)** Zum Nachweis der Konvergenz der Folge  $b_n := \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k!}$  verwenden wir das Einschließungskriterium. Wir setzen

$$a_n := \frac{1}{n!} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k!} \leq \frac{n+1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} =: c_n.$$

Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ , wie wir in BSP. (3.1.10) gezeigt haben. Somit folgt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

Für **komplexe** Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$  sind Monotoniekriterien unbrauchbar, da  $\mathbf{C}$  kein geordneter Körper ist. Mit dem folgenden Satz stellen wir ein Konvergenzkriterium vor, welches auch in  $\mathbf{C}$  gilt und welches von der Kenntnis des Grenzwertes ebenfalls keinen Gebrauch macht. Es wurde von dem französischen Mathematiker A. CAUCHY (1789–1857) gefunden.

**Satz 3.6 (Konvergenzkriterium von CAUCHY)**

Eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  ist genau dann konvergent, wenn gilt:

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : |a_n - a_m| < 10^{-k} \quad \forall n, m > N.} \tag{1.11}$$

*Begründung:* (a) Wir nehmen zuerst an, die Folge sei konvergent mit Grenzwert  $a \in \mathbf{K}$ . Dann folgt aus (1.4):

$$\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : |a_n - a| < 0.5 \cdot 10^{-k} \quad \forall n > N.$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung erhält man daraus für  $n, m > N$  die Ungleichung  $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < 10^{-k}$ , also (1.11).

(b) Gelte nun (1.11). Um die Konvergenz der Folge  $a_n \in \mathbf{K}$  zu zeigen, nehmen wir ohne Einschränkung  $a_n \in \mathbf{R}$  an. Andernfalls wird  $a_n := \alpha_n + i\beta_n$  in Real- und Imaginärteil zerlegt. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten dann für jede der beiden reellen Folgen  $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$  und  $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

- Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ist beschränkt. Denn setzt man zum Beispiel  $k = 1$  in (1.11) ein, so gilt  $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a_{N+1}| + 10^{-1}\} =: K$ .
- Nun sind auch die Mengen  $M_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \quad \forall n \in \mathbf{N}$  beschränkt, so dass das Supremumsprinzip anwendbar ist. Es existieren die reellen Zahlen

$$u_n := \inf M_n \leq \inf M_{n+1} =: u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

- Da die Folge  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  monoton  $\uparrow$  und nach oben durch  $K$  beschränkt ist, existiert der Grenzwert  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , oder äquivalent

$$\forall k \in \mathbf{N} \exists L \in \mathbf{R} : |u_n - a| < 0.3 \cdot 10^{-k} \quad \forall n > L.$$

- Fixieren wir nun ein beliebiges  $n > L$ , so folgt aus der Definition des Infimums:

$$\exists a_{n_1} \in M_n, n_1 \geq n, : 0 \leq a_{n_1} - u_n < 0.3 \cdot 10^{-k}.$$

Zusammenfassend haben wir für alle  $n > \max\{L, N\}$ :

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - u_n| + |u_n - a| < 1.6 \cdot 10^{-k},$$

also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . □

Satz 3.6 gibt Anlass zu folgender Definition:

### Definition 3.9 (CAUCHY-Folgen)

Eine  $M$ -Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$  heie **CAUCHY-Folge**, wenn gilt

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : d(a_n, a_m) < 10^{-k} \quad \forall n, m > N.} \quad (1.12)$$

CAUCHY-Folgen werden auch **Fundamentalfolgen** genannt. Sie spielen eine bedeutende Rolle bei der Formulierung eines allgemeinen **Vollstndigkeitsbegriffs**. Dem Beweis von Satz 3.6 liegt das Supremumsprinzip zugrunde, also letztlich das Vollständigkeitsaxiom (V) von  $\mathbf{R}$ . Betrachten wir nochmals die durch (1.1) rekursiv definierte Zahlenfolge  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ . Setzt man dort  $a := 2$  und  $x_0 := 1$ , so ist durch vollständige Induktion leicht zu zeigen, dass

$$\boxed{x_n \in \mathbf{Q} \quad \forall n \in \mathbf{N}_0}$$

gilt. Da die Folge rationaler Zahlen  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}_0} \subset \mathbf{Q}$  konvergiert (nämlich zum Grenzwert  $\sqrt{2}$ ), ist sie gemäß Satz 3.6 eine CAUCHY-Folge in  $\mathbf{Q}$ . Ihr Grenzwert  $\sqrt{2}$  liegt jedoch **nicht** in  $\mathbf{Q}$ , sondern in  $\mathbf{R}$ ! Wir nehmen diese Beobachtung zum Anlass zu folgender Definition.

**Definition 3.10** Eine Menge  $M$  mit einer Metrik  $d(\cdot, \cdot) : M \times M \rightarrow [0, +\infty)$  heie **vollständig**, wenn jede CAUCHY-Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset M$  ihren Grenzwert in  $M$  hat.

**BSP. (3.1.12)** (a) Wie wir gerade gesehen haben, ist  $\mathbf{Q}$  **nicht** vollständig; hingegen sind  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{C}$  vollständig.

(b) Es sei  $M$  eines der Intervalle  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  mit  $a, b \in \mathbf{R}$  und  $a < b$ .  $M$  trägt die durch  $\mathbf{R}$  induzierte Metrik  $d(x, y) := |x - y| \forall x, y \in M$ .  $M$  ist **nicht** vollständig. Zum Beispiel hat in  $M := ]a, b[$  die CAUCHY-Folge

$$a_n := b + \frac{a - b}{n} \in M, n \in \mathbf{N},$$

den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \notin M$ . Das **abgeschlossene** Intervall  $[a, b]$  hingegen ist **vollständig**.

**BSP. (3.1.13)** Wir untersuchen die reelle Folge  $a_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , auf Konvergenz. Dazu werden spezielle Folgenglieder betrachtet:

$$\begin{aligned} a_{2^m} &= \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &\geq 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} \\ &= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \rightarrow +\infty \quad (m \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Da die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  nicht beschränkt ist, kann sie wegen Satz 3.2 **nicht** (eigentlich) konvergieren. Wir haben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = +\infty.$$

**BSP. (3.1.14)** Als Variante von BSP. (3.1.13) untersuchen wir jetzt die reelle Folge  $a_n := \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , auf Konvergenz. Dazu zeigen wir, dass  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  eine CAUCHY-Folge ist, also gemäß Satz 3.6 konvergieren muss. Wir wählen ein beliebiges  $k \in \mathbf{N}$  und setzen dazu  $N := 2 \cdot 10^{-k}$ . Mit  $n > m > N$  folgt nun:

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| \sum_{j=m+1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{j} \right| = \left| \underbrace{\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4}}_{>0} + \cdots \mp \frac{1}{n} \right| > 0 \\ &= \frac{1}{m+1} - \underbrace{\frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+4} + \frac{1}{m+5}}_{<0} + \cdots \mp \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = 10^{-k}. \end{aligned}$$

Es gilt die CAUCHY-Bedingung (1.11); also existiert der Grenzwert  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbf{R}$ . Wir schreiben dafür

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \quad (= \ln 2).$$

Eine Begründung für den angegebenen Summenwert können wir erst mit den Mitteln der Differentialrechnung geben.

**BSP. (3.1.15)** Wir untersuchen die reelle Folge  $a_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , auf Konvergenz. Wegen

$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$  liegt eine **Teleskopsumme** vor:

$$a_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Natürlich ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  eine CAUCHY-Folge. Wählt man nämlich  $k \in \mathbf{N}$  beliebig und dazu  $N := 2 \cdot 10^k$ , so folgt für  $n, m > N$ :

$$|a_n - a_m| = \left| 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{m+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} < \frac{2}{N} = 10^{-k}.$$

**Merke:** Das Konvergenzkriterium von CAUCHY wird meistens bei **theoretischen** Konvergenzuntersuchungen verwendet. Bei konkret vorliegenden Zahlenfolgen werden überwiegend Einschließungs- und Monotoniekriterien verwendet, soweit man sich im Körper  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen bewegt.

### Häufungspunkte

Nachfolgend bezeichne  $\mathbf{N}' \subseteq \mathbf{N}$  stets die Bildmenge  $j(\mathbf{N})$  einer injektiven Abbildung  $j : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  mit der Eigenschaft

$$j(n+1) > j(n) \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{1.13}$$

Mit anderen Worten, die Folge  $(j(n))_{n \in \mathbf{N}}$ , ist streng monoton  $\uparrow$ .

**BSP. (3.1.16)** (a) Setzen wir  $j(n) := 2n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , so gilt also  $j(\mathbf{N}) = \mathbf{N}' = \{\text{alle geraden Zahlen in } \mathbf{N}\}$ .

(b) Setzen wir  $j(n) := 2n - 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , so gilt nun  $j(\mathbf{N}) = \mathbf{N}' = \{\text{alle ungeraden Zahlen in } \mathbf{N}\}$ .

(c) Setzen wir  $j(n) := N + n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $N \in \mathbf{N}$  fest, so gilt  $j(\mathbf{N}) = \mathbf{N}' = \{\text{alle } n \in \mathbf{N} \text{ mit } n > N\}$ .

**Satz 3.7** *Es gilt stets*  $j(n) \geq n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ .

*Begründung:* Wir führen vollständige Induktion nach  $n$  durch.

- Wegen  $j(1) \in \mathbf{N}$  muss  $j(1) \geq 1$  gelten. Also ist die *Verankerung* verifiziert.

- *Vererbung:* Aus (1.13) erschließen wir  $j(n+1) \geq j(n) + 1 \stackrel{\text{Beh.}}{\geq} n + 1$ . □

**Definition 3.11** Gegeben seien eine  $M$ -Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  und eine Teilmenge  $\mathbf{N}' \subseteq \mathbf{N}$  wie oben erklärt. Dann heiÙe  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}'} \subset M$  eine **Teilfolge** der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Ein Element  $a \in M$  heiÙe **Häufungspunkt (HP)** der  $M$ -Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , wenn es eine Teilfolge  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}'} \subset M$  gibt mit  $\lim_{j \in \mathbf{N}'} a_j = a$ . (Wir schreiben vereinfachend  $\lim_{j \in \mathbf{N}'} a_j$  anstelle von  $\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ j \in \mathbf{N}'}} a_j$ .)

**BSP. (3.1.17)** (a) Die Folge  $a_n := (-1)^n \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , ist divergent. Sie hat aber zwei Häufungspunkte:

(a1)  $\mathbf{N}' := \{2n : n \in \mathbf{N}\} \Rightarrow ((-1)^j)_{j \in \mathbf{N}'} = 1, 1, \dots \rightarrow 1,$

$$(a2) \quad \mathbf{N}' := \{2n - 1 : n \in \mathbf{N}\} \Rightarrow ((-1)^j)_{j \in \mathbf{N}'} = -1, -1, \dots \rightarrow -1.$$

(b) Die Folge  $a_n := e^{2\pi i n/k}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $k \in \mathbf{N}$  fest, enthält für  $k = 2$  die Folge (a) als Sonderfall. Auch hier divergiert die Folge  $a_n \in \mathbf{C}$ . Es existieren jedoch genau  $k$  verschiedene Häufungspunkte. Setzt man nämlich  $\mathbf{N}'_r := \{kn + r : n \in \mathbf{N}\}$ ,  $r = 0, 1, \dots, k - 1$ , so erhält man

$$(a_j)_{j \in \mathbf{N}'_r} = (e^{2\pi i(kn+r)/k})_{n \in \mathbf{N}} = (e^{2\pi i r/k})_{n \in \mathbf{N}} \rightarrow e^{2\pi i r/k}, \quad r = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Die Häufungspunkte sind also gerade die  $k$ -ten Einheitswurzeln.

**Merke:** Divergente Folgen können konvergente Teilfolgen haben!

Stets gilt jedoch:

**Satz 3.8** *Hat eine konvergente  $M$ -Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  den Grenzwert  $a \in M$ , so konvergiert jede Teilfolge  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}'}$  gegen denselben Grenzwert  $a$ . Das heißt, eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt, nämlich  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .*

*Begründung:* Konvergiert die Folge  $a_n \in M$  gegen  $a$ , so gilt die Bedingung (1.4):  $\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : d(a_n, a) < 10^{-k} \forall n > N$ . Sei nun  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}'} = (a_{j(n)})_{n \in \mathbf{N}}$  eine gegebene Teilfolge, so gilt  $j(n) \geq n$ , wie in Satz 3.7 gezeigt. Nun erhält man für obiges  $k, N$ :

$$d(a_j, a) < 10^{-k} \quad \forall j(n) \in \mathbf{N}' : n > N.$$

Dies ist die Konvergenzbedingung  $\lim_{j \in \mathbf{N}'} a_j = a$ . □

**BSP. (3.1.18)** Wir betrachten für festes  $k \in \mathbf{N}$  die Teilfolge  $\mathbf{N}' := \{k^n : n \in \mathbf{N}\}$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^n} = 0 = \lim_{j \in \mathbf{N}'} \frac{1}{j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^n}.$$

Jede **beschränkte** unendliche **Zahlenfolge**  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  enthält immer konvergente Teilfolgen. Dieses für die Analysis fundamentale Resultat wurde von den beiden Mathematikern KARL WEIERSTRASS (1815–1897, wirkte in Königsberg und Berlin) und BERNHARD BOLZANO (1781–1848, Prager Mathematiker) gefunden.

**Satz 3.9 (Auswahlsatz von BOLZANO-WEIERSTRASS)**

*Eine beschränkte unendliche Zahlenfolge hat mindestens einen Häufungspunkt.*

*Skizze für eine Begründung:* Komplexe Zahlenfolgen können durch Trennung von Real- und Imaginärteil auf zwei reelle Zahlenfolgen zurückgeführt werden. Deshalb ist es ausreichend, nachfolgend reelle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  zu betrachten. Nach Voraussetzung gibt es ein  $K > 0$  mit  $|a_n| \leq K \forall n \in \mathbf{N}$ .

$\Rightarrow$  Eines der beiden Intervalle  $[0, K]$ ,  $[-K, 0]$  enthält  $\infty$ -viele der  $a_n$ . Sei  $[\alpha_1, \beta_1] =: I_1$  mit der Intervall-Länge  $|I_1| = K$  dieses Intervall.

$\Rightarrow$  Eines der beiden Intervalle  $[\alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}]$ ,  $[\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1]$  enthält  $\infty$ -viele der  $a_n$ . Sei  $[\alpha_2, \beta_2] =: I_2$  mit der Intervall-Länge  $|I_2| = K/2$  dieses Intervall.

⋮

$\Rightarrow$  Eines der beiden Intervalle  $[\alpha_j, \frac{\alpha_j + \beta_j}{2}]$ ,  $[\frac{\alpha_j + \beta_j}{2}, \beta_j]$  enthält  $\infty$ -viele der  $a_n$ . Sei  $[\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}] =: I_{j+1}$  mit der Intervall-Länge  $|I_{j+1}| = K/2^j$  dieses Intervall.

⋮

Wir greifen aus jedem Intervall  $I_j$  ein Element  $a_j$  heraus. Für dieses gilt nach Konstruktion:

$$\alpha_j \leq a_j \leq \beta_j, \quad \text{ferner} \quad \alpha_j \leq \alpha_{j+1}, \quad \beta_{j+1} \leq \beta_j \quad \forall j \in \mathbf{N}.$$

Da die monotonen Folgen  $(\alpha_j)_{j \in \mathbf{N}}$  und  $(\beta_j)_{j \in \mathbf{N}}$  durch  $K$  beschränkt sind, müssen sie wegen Satz 3.3 konvergieren. Weiterhin gilt  $|\beta_j - \alpha_j| = K/2^{j-1} \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow +\infty$ ). Somit existiert ein gemeinsamer Grenzwert  $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = a = \lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j$ . Mit dem Einschließungskriterium (Satz 3.5) erhalten wir schließlich  $a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j$ , das heißt,  $a$  ist ein HP der Folge  $(a_n)$ .  $\square$

**BSP. (3.1.19)** Die reelle Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$  sei durch folgende Vorschrift definiert:

$$a_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & : n = 3l, \\ 2 + \frac{n+1}{n} & : n = 3l + 1, \\ 2 & : n = 3l + 2, \end{cases} \quad l \in \mathbf{N}_0.$$

Man erkennt unschwer die Beschränktheit  $|a_n| \leq 4 \forall n \in \mathbf{N}$ , so dass HP der Folge existieren müssen. In der Tat, setzt man  $\mathbf{N}'_r := \{3l + r : l \in \mathbf{N}_0\}$ ,  $r := 0, 1, 2$ , so erhält man die drei konvergenten Teilfolgen

$$\begin{aligned} (a_j)_{j \in \mathbf{N}'_0} &= \left(1 + \frac{1}{2^{3l}}\right)_{l \in \mathbf{N}_0} = \left(1 + \frac{1}{8^l}\right)_{l \in \mathbf{N}_0} \rightarrow 1, \\ (a_j)_{j \in \mathbf{N}'_1} &= \left(3 + \frac{1}{3l+1}\right)_{l \in \mathbf{N}_0} \rightarrow 3, \\ (a_j)_{j \in \mathbf{N}'_2} &= (2)_{l \in \mathbf{N}_0} \rightarrow 2. \end{aligned}$$

Die Menge der Häufungspunkte ist somit  $\{\text{HP}\} = \{1, 2, 3\}$ .

### Limes inferior und Limes superior

Eine beschränkte **reelle** Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  sei in dem abgeschlossenen Intervall  $[-K, K]$  enthalten. Dann ist die nichtleere Menge der Häufungspunkte  $H := \{\text{HP von } (a_n)_{n \in \mathbf{N}}\}$  ebenfalls in  $[-K, K]$  enthalten (dies folgt aus BSP. (3.1.12(b)) von der Vollständigkeit abgeschlossener Intervalle). Mit dem Supremumsprinzip erschließen wir die Existenz der zwei Zahlen

$$\alpha := \inf H, \quad \beta := \sup H, \quad \alpha, \beta \in [-K, K].$$

Wir zeigen, dass  $\alpha$  und  $\beta$  wieder Häufungspunkte, also Elemente der Menge  $H$  sind. Zum Beispiel folgt ja aus  $\beta = \sup H$  äquivalent:

$$\forall j \in \mathbf{N} \exists b_j \in H : 0 \leq \beta - b_j < 0.5 \cdot 10^{-j}.$$

Da  $b_j \in H$  ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ist, gilt entsprechend:

$$\exists a_j \in (a_n)_{n \in \mathbf{N}} : |a_j - b_j| < 0.5 \cdot 10^{-j}.$$

Dies führt auf die Konvergenzbedingung  $|a_j - \beta| = |a_j - b_j + b_j - \beta| \leq |a_j - b_j| + |b_j - \beta| < 10^{-j}$ . Die so konstruierte Teilfolge  $(a_j)$  hat also den Grenzwert  $\beta$ , und dies bedeutet  $\beta \in H$ . Wir fassen zusammen:



**Satz 3.10** Jede beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  hat einen **größten** und einen **kleinsten** Häufungspunkt, genannt **Limes superior** bzw. **Limes inferior** von  $(a_n)$ :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \beta, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \alpha.$$

**Bemerkung 3.8** (a)  $M$ -Folgen mit **mehr** als einem HP sind **divergent**. Jede konvergente  $M$ -Folge hat nur einen HP, nämlich den Grenzwert.

(b) Für reelle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sind **wohlzuunterscheiden**:

$$\inf\{a_n\} \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \sup\{a_n\} \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

**Ausnahme:** Uneigentlich konvergente Teilfolgen von  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$ : Falls die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  nach unten (nach oben) **unbeschränkt** ist, so existiert ein **uneigentliches** Infimum (Supremum):

$$\inf\{a_n\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \quad (\text{bzw. } \sup\{a_n\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty).$$

Im allgemeinen gilt jedoch

$$\inf\{a_n\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup\{a_n\}.$$

**BSP. (3.1.20)** (a) Die reelle Zahlenfolge  $a_n := (-1)^n n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , hat zwei uneigentlich konvergente Teilfolgen, nämlich  $(a_{2n})_{n \in \mathbf{N}}$  und  $(a_{2n-1})_{n \in \mathbf{N}}$  mit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} &= - \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = -\infty = \inf\{a_n\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n) = +\infty = \sup\{a_n\} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

(b) Für die reelle Zahlenfolge  $a_n := (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , hingegen gilt:

$$\inf\{a_n\} = -2 < -1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 < \frac{3}{2} = \sup\{a_n\}.$$

**Satz 3.11** (a) Eine beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R}$  ist genau dann konvergent, wenn gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(b) Für jede Zahlenfolge  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  folgt aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  stets auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ . Die Umkehrung gilt im allgemeinen **nicht**. Jedoch:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0.$$

**BSP. (3.1.21)** (a) Die komplexe Folge  $a_n := e^{in\varphi}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , mit reellem  $\varphi \notin 2\pi\mathbf{Z}$  erfüllt  $|a_n| = 1 \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow +\infty$ ), während der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  nicht existiert.

(b) Die komplexe Folge  $a_n := r^n e^{in\varphi}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , mit  $\varphi \in \mathbf{R}$  und  $0 \leq r < 1$  konvergiert gemäß Satz 3.5(a) gegen 0, und dies gilt auch für die Folge der Beträge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0.$$

## Numerische Bestimmung von Polynom–Nullstellen

Das in BSP. (3.1.1) vorgestellte HERON–Verfahren ist ein **numerischer Algorithmus** zur approximativen Bestimmung der **positiven** Nullstelle  $x_0 = \sqrt{a}$  des Polynoms  $P_2(x) := x^2 - a$ ,  $a > 0$ . Die Iterationsvorschrift (1.1) kann sehr einfach in die folgende Form gebracht werden:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - a}{2x^{(k)}} = x^{(k)} - \frac{P_n(x^{(k)})}{P_{n-1}(x^{(k)})}, \quad k \in \mathbf{N}_0, \quad x^{(0)} > 0 \text{ beliebig.} \quad (1.14)$$

Hier müssen wir  $n = 2$  setzen, und die Iterierten  $x^{(k)}$  haben wir früher mit  $x_k$  bezeichnet. Mit  $d_1 := P_{n-1}(x^{(k)})$  meinen wir den Koeffizienten (4.10), [Abschnitt 2.4] aus der TAYLOR–Entwicklung des Polynoms  $P_n(x)$  an der Stelle  $x^{(k)}$ . Es erhebt sich jetzt berechtigterweise die Frage, ob das Verfahren (1.14) auch zur approximativen Bestimmung der Nullstellen eines allgemeinen Polynoms vom Grad  $n \geq 1$ ,  $P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ,  $a_n \neq 0$ , geeignet ist.

Wir geben zunächst eine Begründung für das Verfahren (1.14). Dazu sei angenommen, die Zahl  $x_0$  sei  $p$ –fache Nullstelle von  $P_n(x)$ ,  $1 \leq p \leq n$ . Es sei  $y$  ein Näherungswert von  $x_0$ , so dass gilt:  $y = x_0 + \epsilon$  oder äquivalent  $\epsilon = y - x_0$ . Durch TAYLOR–Entwicklung bei  $x_0$  ergibt sich dann

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^n P_{n-k}(x_0) \epsilon^k, \quad (1.15)$$

wobei die Koeffizienten  $P_{n-k}(x_0)$  mit dem vollständigen HORNER–Schema ermittelt werden können. Da eine  $p$ –fache Nullstelle bei  $x_0$  vorliegen soll, ist  $P_{n-p}(x_0) \neq 0$  der erste nichtverschwindende Koeffizient in der Entwicklung (1.15). Wir werden später mit Mitteln der Differentialrechnung zeigen, dass es **Zwischenwerte**  $\xi, \eta$  im offenen Intervall zwischen den Endpunkten  $y$  und  $x_0$  gibt, mit

$$P_n(y) = P_{n-p}(\xi) \epsilon^p, \quad P_n(y) = P_{n-p+1}(\eta) \epsilon^{p-1},$$

( $\rightarrow$  Satz von TAYLOR). Wird die zweite Gleichung durch die erste dividiert, so ergibt sich für  $\epsilon$  die Beziehung

$$\epsilon = \frac{P_{n-p+1}(\eta)}{P_{n-p}(\xi)}. \quad (1.16)$$

Wir nehmen jetzt an, es gelte  $\epsilon := p \left( x^{(k)} - x^{(k+1)} \right)$ . Das heißt, die Zahl  $\epsilon$  ist (bis auf den Normierungsfaktor  $p$ ) die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder einer konvergenten Folge  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x_0$ . Wegen des CAUCHY–Kriteriums muss  $\epsilon \rightarrow 0$  oder äquivalent  $y \rightarrow x_0$  gelten. Für hinreichend kleines  $\epsilon \ll 1$  darf also  $\eta \approx \xi \approx x^{(k)} \approx x_0$  angenommen werden. Wird  $x^{(k)}$  als schon bekannter Näherungswert für  $x_0$  angesehen, so erhält man nun aus (1.16) das Iterationsverfahren, mit dessen Hilfe der verbesserte Wert  $x^{(k+1)}$  zu berechnen ist:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{P_{n-p+1}(x^{(k)})}{p P_{n-p}(x^{(k)})}, \quad k \in \mathbf{N}_0, \quad x^{(0)} \text{ Näherung für } x_0. \quad (1.17)$$

**Definition 3.12** Das Verfahren (1.17) heißt **NEWTON–Verfahren** zur näherungsweise Berechnung einer  $p$ –fachen Nullstelle  $x_0$  des Polynoms  $P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

Es ist nicht ganz einfach, eine Konvergenzaussage über die durch (1.17) definierte Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}_0}$  zu treffen. Wir werden dies erst in Abschnitt 7.8 tun. Vorab nehmen wir es als unbewiesene Tatsache hin, dass die Folge (1.17) wirklich gegen  $x_0$  konvergiert, sofern der **Startwert**  $x^{(0)}$  in der **Nähe** von  $x_0$  liegt. Was dies wirklich heißt und woher ein solches  $x^{(0)}$  zu nehmen ist, werden wir ebenfalls in Abschnitt 7.8 erörtern.

**Einfache Nullstellen.**

Ist  $x_0$  eine *einfache* Nullstelle des Polynoms  $P_n(x)$ , so hat das NEWTON-Verfahren (1.17) die spezielle Form

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{P_n(x^{(k)})}{P_{n-1}(x^{(k)})}, \quad k \in \mathbf{N}_0, \quad x^{(0)} \text{ Näherung für } x_0. \quad (1.18)$$

Die Berechnung der Funktionswerte  $P_n(x^{(k)})$  und  $P_{n-1}(x^{(k)})$  kann jetzt wieder durch das HORNER-Schema vorgenommen werden. Aus den Ansätzen

$$P_n(x) = (x - x^{(k)}) P_{n-1}(x) + P_n(x^{(k)}), \quad P_{n-1}(x) = (x - x^{(k)}) P_{n-2}(x) + P_{n-1}(x^{(k)}) \quad (1.19)$$

ergeben sich mit  $P_{n-1}(x) := \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$  und  $P_{n-2}(x) := \sum_{j=0}^{n-2} c_j x^j$  die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} b_{n-1} &:= a_n, & b_{j-1} &:= a_j + x^{(k)} b_j, & j &= n-1, n-2, \dots, 0, & P_n(x^{(k)}) &:= b_{-1}, \\ c_{n-2} &:= b_{n-1}, & c_{j-1} &:= b_j + x^{(k)} c_j, & j &= n-2, n-3, \dots, 0, & P_{n-1}(x^{(k)}) &:= c_{-1}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dies haben wir in [Abschnitt 2.4] gezeigt.

**Definition 3.13** *Der durch die Berechnung von  $P_{n-1}(x^{(k)})$  gemäß (1.20) erweiterte Algorithmus (4.4) aus Abschnitt 2.4 heißt das erweiterte HORNER-Schema.*

Die Berechnung von  $P_n(x^{(k)})$  und  $P_{n-1}(x^{(k)})$  für gegebenes  $x^{(k)} =: x$  durch das erweiterte HORNER-Schema bedarf nur der Vorgabe der indizierten Koeffizienten  $a_j$  des Polynoms  $P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Die numerische Auswertung auf einem Rechner kann ohne Indizierung der Variablen  $b$  und  $c$  realisiert werden. Der folgende Algorithmus ermittelt aus den Vorgaben  $a_0, a_1, \dots, a_n$  und  $x$  die Funktionswerte  $b_{-1} := P_n(x)$  und  $c_{-1} := P_{n-1}(x)$ .

**Algorithmus des erweiterten HORNER-Schemas.**

|    |   |
|----|---|
| 1: | $c := 0; b := a_n;$                     |
| 2: | <b>für</b> $j := n-1, n-2, \dots, 0$ :  |
| 3: | $c := b + c * x;$                       |
| 4: | $b := a_j + b * x.$ ( <b>Ende</b> $j$ ) |

Die Variablen  $b$  und  $c$  sind nun mit den gesuchten Werten  $P_n(x)$  und  $P_{n-1}(x)$  belegt. Ist für die einfache Nullstelle  $x_0$  eine Näherung  $x^{(0)}$  bekannt, so berechnen wir jetzt mit Hilfe des NEWTON-Verfahrens (1.18) sukzessive Verbesserungen  $x^{(k+1)}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , wobei  $P_n(x^{(k)})$  und  $P_{n-1}(x^{(k)})$  wie oben erläutert mit dem erweiterten HORNER-Schema bestimmt werden. Wir haben die Rechenvorschrift in dem folgenden Algorithmus zusammengefasst. Darin sind die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , ferner  $x^{(0)}$  sowie eine Toleranz  $eps$  und eine Maximalzahl  $N$  zulässiger NEWTON-Schritte vorzugeben.

**NEWTON-Algorithmus für eine einfache Nullstelle.**

|    |   |
|----|---|
| 1: | $x := x^{(0)}; k := 0;$   |
| 2: | <b>wiederhole</b>   |
| 3: | berechne $b := P_n(x); c := P_{n-1}(x)$ mit <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">HORNER, erweitert</span> |
| 4: | $x := x - b/c;$   |
| 5: | $k := k + 1;$   |
| 6: | <b>bis</b> $( b/c  < eps)$ <b>oder</b> $(k > N)$ .  |

**BSP. (3.1.22)**

Wir betrachten das Polynom  $P_6(x) := x^6 + 3x^4 - 4x^3 - 15x - 40$ . Wir wollen diejenige Nullstelle bestimmen, für die die Näherung  $x^{(0)} := 2$  bekannt sei. Das erweiterte HORNER-Schema rechnet man leicht per Hand durch; man erhält  $P_6(2) = 10$  und  $P_5(2) = 225$ . Eine erste Korrektur lautet somit  $x^{(1)} := 2 - \frac{10}{225} \doteq 1.955\,556$ . Die Daten für den nächsten NEWTON-Schritt resultieren aus folgender Tabelle:

|           |   |           |            |            |            |             |             |
|-----------|---|-----------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
|           | 1 | 0.000 000 | 3.000 000  | -4.000 000 | 0.000 000  | -15.000 000 | -40.000 000 |
| 1.955 556 | * | 1.955 556 | 3.824 198  | 13.345 097 | 18.274 857 | 35.737 498  | 40.553 330  |
|           | 1 | 1.955 556 | 6.824 198  | 9.345 097  | 18.274 857 | 20.737 498  | 0.553 330   |
| 1.955 556 | * | 1.955 556 | 7.648 395  | 28.301 960 | 73.620 911 | 179.707 280 |             |
|           | 1 | 3.911 111 | 14.472 593 | 37.647 057 | 91.895 768 | 200.444 778 |             |

Aus den eingerahmten Zahlen berechnet man die Korrektur  $x^{(2)} \doteq 1.955\,556 - 0.002\,760 \doteq 1.952\,795$ . Ein weiterer NEWTON-Schritt ergäbe  $x^{(3)} \doteq 1.952\,785$ , wobei die ersten fünf Nachkommastellen bereits sicher sind.

**Sukzessive Deflation**

Hat man eine erste Nullstelle  $x = x_1$  des Polynoms  $P_n(x)$  gefunden, so kann der Linearfaktor  $x - x_1$  nach der Vorschrift (4.8), [Abschnitt 2.4] mit dem HORNER-Schema abgespalten werden. Die Nullstellen des Quotientenpolynoms  $P_{n-1}(x)$  sind dann die restlichen Nullstellen von  $P_n(x)$ . Man verfährt mit  $P_{n-1}(x)$  analog. Man spaltet also einen zweiten Linearfaktor  $x - x_2$  ab, um das Quotientenpolynom  $P_{n-2}(x)$  zu erhalten, usw. Dieser Prozess heißt **sukzessive Deflation**.

**Kritik:**

Bei der sukzessiven Deflation kann es zu einer dramatischen Kumulation von Rundungsfehlern kommen, da im allgemeinen bereits die erste Nullstelle  $x_1$  nur näherungsweise berechnet werden kann und somit auch die Koeffizienten von  $P_{n-1}(x)$  nach numerischer Auswertung mit dem HORNER-Schema nur verfälscht vorliegen. Für das so verfälschte Polynom  $P_{n-1}^*(x)$  kann wieder nur eine Näherung  $x_2^*$  der nächsten Nullstelle berechnet werden, usf. Diese Schwierigkeiten können weitestgehend vermieden werden durch Verwendung eines **modifizierten** NEWTON-Verfahrens, bei dem die bereits bekannten Nullstellen von  $P_n(x)$  nur **implizit** abgespalten werden. Das Verfahren heißt

**Implizite Deflation**

Sind  $x_1, \dots, x_n$  die Nullstellen von  $P_n(x)$ , so erhält man aus der Linearfaktorzerlegung (5.2), [Abschnitt 2.5] die Darstellungen

$$P_n(x) = a_n \cdot \prod_{j=1}^n (x - x_j), \quad P_{n-1}(x) = a_n \cdot \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j), \quad a_n \neq 0.$$

(Wir erinnern hier daran, dass  $P_{n-1}(x)$  identisch ist mit der **Ableitung**  $P_n'(x)$  des Polynoms  $P_n(x)$ .) Es folgt

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}. \tag{1.21}$$

Der Kehrwert dieses Ausdrucks an der Stelle  $x = x^{(k)}$  ist gerade der Korrekturterm des NEWTON-Verfahrens (1.18). Angenommen, es seien bereits die Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  mit  $1 \leq m < n$  berechnet worden. Nach ihrer Deflation verbleibt ein Restpolynom  $Q_p(x)$  vom Grade  $p = n - m$ , nämlich

$$Q_p(x) := P_{n-m}(x) = P_n(x) \Big/ \prod_{j=1}^m (x - x_j) = a_n \cdot \prod_{j=m+1}^n (x - x_j).$$

Analog zu (1.21) erhält man

$$\frac{Q_{p-1}(x)}{Q_p(x)} = \sum_{j=m+1}^n \frac{1}{x - x_j} = \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{x - x_i}.$$

Hieraus ergibt sich die folgende modifizierte Rechenvorschrift des NEWTON-Verfahrens, die auch **Verfahren von MAEHLY** genannt wird:

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \left( \frac{P_{n-1}(x^{(k)})}{P_n(x^{(k)})} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{x^{(k)} - x_i} \right)^{-1}, \quad k \in \mathbf{N}_0. \quad (1.22)$$

Diese Methode hat den Vorteil, dass stets mit den **unveränderten** Koeffizienten von  $P_n(x)$  gearbeitet werden kann.

**BSP. (3.1.23)** Wir nehmen das Polynom  $P_6(x) := x^6 + 3x^4 - 4x^3 - 15x - 40$  aus dem vorangegangenen BSP. (3.1.22) und die schon bekannte Nullstelle  $x_1 \doteq 1.952\,785$ . Eine weitere Nullstelle wird nach dem Verfahren (1.22) der impliziten Deflation berechnet. Dabei wählen wir wiederum den Startwert  $x^{(0)} := 2$ . Die numerischen Werte sind in folgender Tabelle aufgelistet.

| $k$ | $x^{(k)}$      | $P_6[x^{(k)}]$  | $P_5[x^{(k)}]$   | $(x^{(k)} - x_1)^{-1}$ | $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ |
|-----|----------------|-----------------|------------------|------------------------|-----------------------|
| 0   | 2.000 000 000  | 10.000 000 000  | 225.000 000 000  | 21.179 709 837         | -0.757 409 263        |
| 1   | 1.242 590 737  | -55.480 132 984 | 7.269 085 014    | -1.408 065 443         | -0.783 058 353        |
| 2   | 0.459 532 384  | -47.137 948 613 | -16.246 615 692  | -0.669 679 054         | -0.985 862 610        |
| 3   | -0.526 330 226 | -31.270 337 812 | -20.316 302 105  | -0.403 369 714         | -0.949 605 796        |
| 4   | -1.475 936 023 | 19.573 046 373  | -121.745 746 340 | -0.291 653 941         | 0.168 679 079         |
| 5   | -1.307 256 944 | 2.296 827 271   | -85.221 387 904  | -0.306 744 520         | 0.027 175 969         |
| 6   | -1.280 080 975 | 0.046 232 539   | -80.456 252 763  | -0.309 323 061         | 0.000 574 732         |
| 7   | -1.279 506 243 | 0.000 019 890   | -80.358 458 061  | -0.309 378 062         | 0.000 000 248         |
| 8   | -1.279 505 995 | 0.000 000 000   | -80.358 415 971  | -0.309 378 086         | 0.000 000 000         |
| 9   | -1.279 505 995 |                 |                  |                        |                       |

Setzen wir andererseits die hier berechnete zweite Nullstelle als erste bekannte Nullstelle  $x_1 \doteq -1.279\,505\,995$  in das Iterationsschema (1.22) ein, so resultieren mit dem alten Startwert  $x^{(0)} := 2$  die folgenden numerischen Werte:

| $k$ | $x^{(k)}$     | $P_6[x^{(k)}]$ | $P_5[x^{(k)}]$  | $(x^{(k)} - x_1)^{-1}$ | $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ |
|-----|---------------|----------------|-----------------|------------------------|-----------------------|
| 0   | 2.000 000 000 | 10.000 000 000 | 225.000 000 000 | 0.304 923 974          | -0.045 055 038        |
| 1   | 1.954 944 962 | 0.431 038 480  | 200.121 672 720 | 0.309 171 483          | -0.002 155 317        |
| 2   | 1.952 789 644 | 0.000 939 448  | 198.984 177 100 | 0.309 377 641          | -0.000 004 721        |
| 3   | 1.952 784 923 | 0.000 000 005  | 198.981 690 570 | 0.309 378 093          | -0.000 000 000        |
| 4   | 1.952 784 923 |                |                 |                        |                       |

Diese Werte bestätigen das bereits bekannte Resultat, jedoch mit höherer Genauigkeit. Wir vermerken, dass das Polynom  $P_6(x)$  keine weiteren reellen Nullstellen hat. Prinzipiell können mit dem NEWTON-Verfahren bei komplexer Rechnung auch die komplexen Nullstellen numerisch bestimmt werden. Hat das Polynom  $P_n(x)$  ausschließlich reelle Koeffizienten, so sollte man beachten, dass das NEWTON-Verfahren zu **reellen** Startwerten  $x^{(0)}$  stets nur reelle Iterierte  $x^{(k)}$  liefert.

**BSP. (3.1.24)** Wir demonstrieren hier den Vorteil des Verfahrens der impliziten Deflation gegenüber dem expliziten Abdividieren bereits bekannter Nullstellen an folgendem Beispiel. Das Polynom

$$P_{14}(x) := \prod_{i=0}^{13} (x - 2^{-i}) \equiv \sum_{k=0}^{14} a_k x^k$$

hat offensichtlich die Nullstellen  $x_j := 2^{-j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, 13$ . Diese sollen numerisch mit dem NEWTON-Verfahren berechnet werden, und zwar einmal mit dem Verfahren der sukzessiven Deflation sowie zum anderen mit dem Verfahren der impliziten Deflation. Da beide Verfahren die Standardform

$P_{14}(x) = \sum_{k=0}^{14} a_k x^k$  des Polynoms  $P_{14}(x)$  verwenden, müssen zunächst die Koeffizienten  $a_k$  ermittelt werden. Dies wird am geschicktesten durch Lösen des folgenden **linearen Gleichungssystems** mit dem GAUSS-Algorithmus bewerkstelligt:

$$P_{14}(x_j) = \sum_{k=0}^{14} x_j^k a_k =: \sum_{k=0}^{14} b_{jk} a_k \stackrel{!}{=} c_j, \quad j = 0, 1, \dots, 14.$$

Wenn wir  $x_0 := 0$ ,  $x_j := 2^{1-j}$   $j = 1, \dots, 14$  wählen, so sind die Koeffizienten  $b_{jk}$  und  $c_j$  in der folgenden Weise festgelegt:

$$b_{0k} = \begin{cases} 0, & k = 1, \dots, 14, \\ 1, & k = 0; \end{cases} \quad b_{jk} = 2^{(1-j)k} \quad j = 1, \dots, 14; \quad k = 0, \dots, 14,$$

$$c_0 = \prod_{i=0}^{13} (-2^{-i}); \quad c_j = 0, \quad j = 1, \dots, 14.$$

Die numerische Rechnung liefert dazu die folgenden Resultate:

| $k$ | $a_k$                                  | $k$ | $a_k$                                  |
|-----|--|-----|--|
| 14  | 1.000 000 000 000 00 $\cdot 10^{+00}$  | 6   | 1.265 045 576 183 30 $\cdot 10^{-08}$  |
| 13  | -1.999 877 929 687 50 $\cdot 10^{+00}$ | 5   | -4.873 891 346 596 61 $\cdot 10^{-11}$ |
| 12  | 1.333 089 202 642 44 $\cdot 10^{+00}$  | 4   | 9.230 854 823 099 63 $\cdot 10^{-14}$  |
| 11  | -3.807 896 404 032 36 $\cdot 10^{-01}$ | 3   | -8.455 228 526 288 13 $\cdot 10^{-17}$ |
| 10  | 5.074 716 106 155 11 $\cdot 10^{-02}$  | 2   | 3.613 345 524 054 76 $\cdot 10^{-20}$  |
| 9   | -3.270 813 115 295 28 $\cdot 10^{-03}$ | 1   | -6.617 041 003 640 75 $\cdot 10^{-24}$ |
| 8   | 1.036 325 336 009 36 $\cdot 10^{-04}$  | 0   | 4.038 967 834 731 58 $\cdot 10^{-28}$  |
| 7   | -1.625 633 370 339 48 $\cdot 10^{-06}$ |     |  |

Mit diesen Koeffizienten werden Näherungen  $\hat{x}_j$  der exakten Nullstellen  $x_j$  von  $P_{14}(x)$  durch NEWTON-Iteration bei impliziter Deflation berechnet (Abbruchschranke:  $\epsilon := 10^{-14}$ ). Alle Nullstellen werden im Rahmen der Fehlergenauigkeit korrekt bestimmt:

| $j$ | $x_j := 2^{-j}$     | $\hat{x}_j$         | $\ x_j - \hat{x}_j\ $      |
|-----|---------------------|---------------------|----------------------------|
| 0   | 1.000 000 000 000 0 | 1.000 000 000 000 0 | 1.7696348 $\cdot 10^{-15}$ |
| 1   | 0.500 000 000 000 0 | 0.500 000 000 000 0 | 1.1018476 $\cdot 10^{-15}$ |
| 2   | 0.250 000 000 000 0 | 0.250 000 000 000 0 | 4.2160828 $\cdot 10^{-15}$ |
| 3   | 0.125 000 000 000 0 | 0.125 000 000 000 0 | 8.1315841 $\cdot 10^{-15}$ |
| 4   | 0.062 500 000 000 0 | 0.062 500 000 000 0 | 8.7175716 $\cdot 10^{-15}$ |
| 5   | 0.031 250 000 000 0 | 0.031 250 000 000 0 | 6.5159365 $\cdot 10^{-15}$ |
| 6   | 0.015 625 000 000 0 | 0.015 625 000 000 0 | 3.3885011 $\cdot 10^{-15}$ |
| 7   | 0.007 812 500 000 0 | 0.007 812 500 000 0 | 1.3123022 $\cdot 10^{-15}$ |
| 8   | 0.003 906 250 000 0 | 0.003 906 250 000 0 | 3.4294882 $\cdot 10^{-16}$ |
| 9   | 0.001 953 125 000 0 | 0.001 953 125 000 0 | 4.0953831 $\cdot 10^{-17}$ |
| 10  | 0.000 976 562 500 0 | 0.000 976 562 500 0 | 1.0064710 $\cdot 10^{-17}$ |
| 11  | 0.000 488 281 250 0 | 0.000 488 281 250 0 | 8.9712965 $\cdot 10^{-18}$ |
| 12  | 0.000 244 140 625 0 | 0.000 244 140 625 0 | 2.4870873 $\cdot 10^{-18}$ |
| 13  | 0.000 122 070 312 5 | 0.000 122 070 312 5 | 1.1510384 $\cdot 10^{-19}$ |

Bei expliziter Abdivision unter sonst gleichen Iterationsbedingungen ist hingegen bereits die 7. Nullstelle völlig falsch, wie aus dem folgenden Rechenprotokoll hervorgeht:

| $j$ | $x_j := 2^{-j}$     | $\hat{x}_j$          | $\ x_j - \hat{x}_j\ $      |
|-----|---------------------|----------------------|----------------------------|
| 0   | 1.000 000 000 000 0 | 1.000 000 000 000 0  | $1.7696348 \cdot 10^{-15}$ |
| 1   | 0.500 000 000 000 0 | 0.500 000 000 000 0  | $1.6206925 \cdot 10^{-15}$ |
| 2   | 0.250 000 000 000 0 | 0.250 000 000 001 4  | $1.4127235 \cdot 10^{-12}$ |
| 3   | 0.125 000 000 000 0 | 0.124 999 998 342 5  | $1.6574729 \cdot 10^{-09}$ |
| 4   | 0.062 500 000 000 0 | 0.062 500 904 221 0  | $9.0422096 \cdot 10^{-07}$ |
| 5   | 0.031 250 000 000 0 | 0.030 995 238 953 2  | $2.5476105 \cdot 10^{-04}$ |
| 6   | 0.015 625 000 000 0 | 0.020 852 378 691 6  | $5.2273787 \cdot 10^{-03}$ |
| 7   | 0.007 812 500 000 0 | -0.008 644 134 534 3 | $1.6456635 \cdot 10^{-02}$ |

## 3.2 Konvergenzkriterien für Zahlenreihen

Die **geometrische Summenformel** liefert für festes  $q \in \mathbf{K}$  eine Zahlenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  mit

$$s_n := \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & : q \neq 1, \\ (n + 1) & : q = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Während  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0 \ \forall |q| < 1$  gilt, divergiert die Folge  $(q^{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$  für alle  $|q| \geq 1, q \neq 1$ . Das heißt, die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{K}$  konvergiert genau dann, wenn  $|q| < 1$  gilt, und zwar gegen den Grenzwert  $(1 - q)^{-1}$ . Wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k =: \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \ \forall q \in \mathbf{K} : |q| < 1. \quad (2.2)$$

**Definition 3.14** Gegeben sei eine  $\mathbf{K}$ -Folge  $(a_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$ . Die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$  mit

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

heiße (unendliche) **Reihe** mit den **Reihengliedern**  $a_k$ . Dafür schreibt man den **formalen Ausdruck**  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Die Summen  $s_n$  heißen  **$n$ -te Partialsummen** der Reihe. Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

heiße **konvergent** zur Summe  $s \in \mathbf{K}$ , geschrieben  $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , wenn gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . Eine nicht konvergente Reihe heiße **divergent**.

**Bemerkung 3.9** (a) Analoge Definitionen gelten auch für Reihen  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  mit festem  $n_0 \in \mathbf{Z}$ .

(b) Es ist in den seltensten Fällen möglich (und auch nicht erforderlich, wie weiter unten gezeigt wird), **analytische** Ausdrücke für die  $n$ -ten Partialsummen  $s_n$  anzugeben. Zu diesen seltenen Ausnahmen zählen die geometrische Reihe und die Teleskopreihe.  $\square$

**Definition 3.15** (a) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  heiße **geometrische Reihe**. Sie konvergiert zur Summe  $(1 - q)^{-1}$  genau für  $|q| < 1, q \in \mathbf{K}$ , und sie divergiert für alle  $|q| \geq 1$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \ \forall q \in \mathbf{K} : |q| < 1.$$

(b) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$  heie **Teleskopreihe**. Es gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Das heißt, die Teleskopreihe konvergiert genau dann, wenn die Folge  $(b_k)_{k \in \mathbf{N}_0}$  der Reihenglieder  $b_k \in \mathbf{K}$  einen Grenzwert  $b \in \mathbf{K}$  hat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b.$$

**BSP. (3.2.1)** (a) Wegen  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  eine Teleskopreihe mit  $b_k := \frac{1}{k}$ . Wir haben offensichtlich  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ , also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(b) Die **harmonische Reihe**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  ist **divergent**. Die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  ist nämlich divergent, wie wir BSP. (3.1.13), Abschnitt 3.1, gezeigt haben.

**Bemerkung 3.10** Reihen sind **spezielle Folgen**, (nämlich in der Deutung der Reihe als Folge ihre Partialsummen). Umgekehrt sind Folgen **spezielle Reihen**, (nämlich in der Darstellung als Teleskopsumme  $a_n = a_0 - \sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k)$ ). Somit sind zahlreiche Eigenschaften der Folgen direkt auf Reihen übertragbar; *zum Beispiel*:

**Satz 3.12** (a) Sind  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$  **konvergente Reihen**, so gilt (vgl. Satz 3.4, Formel (1.8)):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k \pm \mu b_k) = \lambda a \pm \mu b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}.$$

(b) **Konvergenzkriterium von CAUCHY**. Genau dann konvergiert  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ , wenn gilt (vgl. Satz 3.6):

$$\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{R} : \left| \sum_{j=m}^n a_j \right| < 10^{-k} \quad \forall n \geq m > N. \quad (2.3)$$

(c) Es gelte  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}_0$ . Genau dann konvergiert die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ , wenn gilt (vgl. Satz 3.3):

$$\exists K > 0 : s_n := \sum_{j=0}^n a_j \leq K \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (2.4)$$

(d) Für jedes feste  $n_0 \in \mathbf{N}$  haben  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  und  $\sum_{j=n_0}^{\infty} a_j$  dasselbe Konvergenzverhalten (aber nicht denselben Summenwert). Das heißt, durch Weglassen **endlich** vieler Reihenglieder wird das Konvergenzverhalten einer Reihe **nicht** verändert.



*Begründungen:* Die Aussagen (a) und (b) sind unmittelbar klar, wenn man die den Reihen zugeordneten Folgen von Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$  hinschreibt und auf die angegebenen Sätze zurückgreift.

(c) Wegen  $a_n \geq 0$  ist die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$  der Partialsummen monoton  $\uparrow$ . Ist diese Folge konvergent, so ist sie gemäß Satz 3.2 auch beschränkt. Also gilt (2.4). Gilt umgekehrt (2.4), so ist die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$  nach oben beschränkt, also wegen Satz 3.3 auch konvergent.  $\square$

Konvergiert die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ , so erschließen wir aus dem CAUCHY-Kriterium (2.3) die **notwendige Konvergenzbedingung**  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$  (setze in (2.3)  $n = m$ ). Diese Tatsache formuliert man häufig als **Divergenzkriterium**.

### Satz 3.13 (Divergenzkriterium)

Konvergiert die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ , so folgt **notwendig**

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \lim_{j \rightarrow \infty} |a_j| = 0.$$

Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch, wie am Beispiel der **harmonischen Reihe** ersichtlich wird.

**BSP. (3.2.2)** (a) Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{k})^k$  ist **divergent**, denn es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = \frac{1}{e} \neq 0.$$

(b) Es gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$  genau für  $|q| < 1$ . Dies belegt wiederum die **Divergenz** der geometrischen Reihe für alle  $q \in \mathbf{K}$  mit  $|q| \geq 1$ .

(c) Die Aussage von Satz 3.12(a) wird im allgemeinen **falsch**, wenn die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  **nicht** konvergieren. Für

$$a_k := \frac{1}{k}, \quad b_k := \frac{1}{k+p}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad p \in \mathbf{N} \text{ fest,}$$

sind jede der Reihen für sich divergent, da es ja harmonische Reihen sind. Hingegen haben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+p)} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} \quad (\text{modifizierte Teleskopreihe}).$$

(d) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  ist **konvergent**. Um dies zu zeigen, verwenden wir das Monotoniekriterium (2.4) für  $a_k := \frac{1}{k^2}$ . Ist  $k \geq 2$ , so gilt  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ , und somit

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2 =: K \quad \forall n \geq 2.$$

Es resultiert:

$$\text{Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergiert (zur Summe } \frac{\pi^2}{6}).$$

Den Summenwert werden wir erst mit der Theorie der FOURIER-Reihen in Ingenieurmathematik III berechnen können.

Den allgemeineren Fall  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , diskutieren wir unter Verwendung von **Reihenvergleichskriterien**. Hierzu definieren wir:

**Definition 3.16 (Absolute und bedingte Konvergenz)**

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heie **absolut konvergent**, wenn auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert. Konvergente Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , für die  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  divergent ist, heißen **bedingt konvergent**.

**Satz 3.14 (a) Majorantenkriterium.** Für gegebene  $b_k \geq 0$  sei die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent.

Gilt

$$\boxed{|a_k| \leq b_k \quad \forall k \geq N \geq 0,} \quad (2.5)$$

so sind beide Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent.

(b) **Minorantenkriterium.** Ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergent und gilt  $|a_k| \geq b_k \geq 0 \quad \forall k \geq N \geq 0$ ,

so ist auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  divergent.

(c) **Absolut konvergente Reihen sind stets auch konvergent.**

*Begründungen:* (a) Wegen  $\sum_{k=N}^n |a_k| \leq \sum_{k=N}^n b_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k$  ist die Folge der Partialsummen  $s_n := \sum_{k=N}^n |a_k|$  nach oben beschränkt und darüber hinaus monoton  $\uparrow$ , also konvergent. Somit konvergiert auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ , da die ersten  $N$  Summanden keinen Einfluss nehmen auf das Konvergenzverhalten.

Die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  folgt nach (c).

(b) Wäre  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent, so wäre nach (a) auch  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(c) Die Behauptung folgt direkt mit Hilfe der Dreiecksungleichung  $\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k|$  aus dem Konvergenzkriterium von CAUCHY.  $\square$

**BSP. (3.2.3)** (a) Für die Konvergenzuntersuchung der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ , treffen wir Fallunterscheidungen.

- $\alpha \leq 1$ . Hier gilt  $k^\alpha \leq k^1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ , und somit  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ . Die letzte Reihe ist die divergente harmonische Reihe, so dass nach dem Minorantenkriterium **Divergenz** vorliegt.
- $\alpha > 1$ . Wegen  $a_k := \frac{1}{k^\alpha} > 0$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , ist die Folge der Partialsummen  $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  monoton  $\uparrow$ . Wir zeigen ihre Beschrntheit nach oben. Dazu wählen wir für jedes  $n \in \mathbf{N}$  die Zahl  $N$  jeweils so, dass  $2^{N+1} > n$  gilt. Mit dieser Wahl erhält man

$$\begin{aligned} 0 \leq s_n &\leq \sum_{k=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \left[ \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right] + \left[ \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha} \right] \\ &\quad + \dots + \left[ \left( \frac{1}{2^N} \right)^\alpha + \dots + \left( \frac{1}{2^{N+1}-1} \right)^\alpha \right] \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \dots + \frac{2^N}{(2^N)^\alpha} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^k = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} =: K < +\infty. \end{aligned}$$

Aus Satz 3.12(c) folgern wir die **Konvergenz** der Reihe.

Zusammenfassend haben wir gezeigt:

$$\text{Die Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \begin{cases} \text{divergiert für } \alpha \leq 1, \\ \text{konvergiert für } \alpha > 1. \end{cases}$$

(b) Die beiden Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 1, x \in \mathbf{R},$

sind **absolut konvergent**. Sie besitzen nämlich die konvergente Majorante  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ .

Wir stellen nachfolgend drei Konvergenzkriterien vor, die ohne den Umweg über die Folge der Partialsummen direkt aus den Koeffizienten  $a_k$  eine Konvergenzaussage ermöglichen. Das erste Kriterium verwendet die geometrische Reihe als Vergleichsreihe. Es trägt den Namen der beiden französischen Mathematiker A. CAUCHY und JACQUES HADAMARD (1865–1963).

**Satz 3.15 (Wurzelkriterium von CAUCHY–HADAMARD)**

(a) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist **absolut konvergent**, falls eine Zahl  $q \in (0, 1)$  existiert und ein  $N \geq 0$  mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \forall n \geq N. \tag{2.6}$$

Äquivalent mit der Bedingung (2.6) sind auch:

$$|a_n| \leq q^n < 1 \quad \forall n \geq N \quad \text{bzw.} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

(b) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist **divergent**, falls eine Zahl  $q \in (0, 1]$  existiert und ein  $N \geq 0$  mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{q} \geq 1 \quad \forall n \geq N. \tag{2.7}$$

Die Bedingung (2.7) ist sicher erfüllt, wenn gilt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

(c) Existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: Q$ , so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: Q \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{(absolute) Konvergenz,} \\ > 1 & \Rightarrow \text{Divergenz,} \\ = 1 & \Rightarrow \text{unentscheidbarer Fall.} \end{cases}$$

*Begründungen:* (a) Wegen (2.6) haben wir  $|a_n| \leq q^n < 1 \quad \forall n \geq N$ , und die Konvergenz folgt aus dem Majorantenkriterium.

(b) Wegen (2.7) haben wir  $|a_n| \geq \frac{1}{q^n} \geq 1 \quad \forall n \geq N$ , und die Divergenz folgt aus dem Divergenzkriterium, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  nicht gelten kann.

(c) Gilt  $Q < 1$ , so liegt der Fall (2.6) vor. Gilt  $Q > 1$ , so ist man bei (2.7). □

Für die Anwendungen des Wurzelkriteriums ist folgendes Resultat sehr nützlich, dessen Beweis dem Leser als Übungsaufgabe überlassen sei.

**Satz 3.16** *Es gelten:*

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1 \quad \forall a > 0. \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k/n} = 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

**BSP. (3.2.4)**

(a) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$  ist **konvergent**, denn es folgt aus dem Wurzelkriterium:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

(b) Wir untersuchen die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n$  mit  $x \in \mathbf{K}$  und  $k \in \mathbf{N}$  fest. Es gilt hier  $\sqrt[n]{|a_n|} = |x| n^{k/n}$ . Unter Verwendung von Satz 3.16(b) folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|$ , das heißt, die Reihe ist absolut konvergent für  $|x| < 1$ ; sie divergiert für  $|x| > 1$ . Für  $|x| = 1$  folgt wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$  ebenfalls Divergenz aus dem Divergenzkriterium. Zusammenfassend haben wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \forall |x| < 1, \\ \text{divergent} & \forall |x| \geq 1. \end{cases}$$

(c) Wir untersuchen die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n}$  mit  $x \in \mathbf{K}$ . Es gilt hier  $\sqrt[n]{|a_n|} = |x| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^{1/n}}$ . Unter Verwendung von Satz 3.16(b) folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|$ , das heißt, die Reihe ist absolut konvergent für  $|x| < 1$ ; sie divergiert für  $|x| > 1$ . Der Fall  $|x| = 1$  ist mit unseren bisherigen Hilfsmitteln unentscheidbar.

(d) In den Fällen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  erhalten wir aus dem Wurzelkriterium jeweils

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}} =: \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n},$$

also den unentscheidbaren Fall  $Q = 1$ . Wir wissen aber bereits, dass die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert, während  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergiert.

**Bemerkung 3.11** Die Divergenzbedingung (2.7) kann abgeschwächt werden zu

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1. \tag{2.8}$$

In diesem Falle gibt es nämlich eine konvergente Teilfolge  $(|a_j|)_{j \in \mathbf{N}'}$  mit  $\lim_{j \in \mathbf{N}'} |a_j| = q > 1$ . Deshalb kann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  nicht gelten, und die Reihe divergiert nach dem Divergenzkriterium.  $\square$

Auch im nächsten Kriterium verwendet man die geometrische Reihe als Vergleichsreihe. Es stammt von dem französischen Mathematiker JEAN BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783), der 1746 versuchte, den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen – leider erfolglos.

**Satz 3.17 (Quotientenkriterium von D'ALEMBERT)**

Es gelte  $a_k \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

(a) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist **absolut konvergent**, falls eine Zahl  $q \in (0, 1)$  existiert und ein  $N \geq 0$  mit

$$\boxed{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \forall n \geq N.} \quad (2.9)$$

Äquivalent mit der Bedingung (2.9) ist auch:

$$\boxed{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.}$$

(b) Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist **divergent**, falls eine Zahl  $q \in (0, 1]$  existiert und ein  $N \geq 0$  mit

$$\boxed{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq \frac{1}{q} \geq 1 \quad \forall n \geq N.} \quad (2.10)$$

Die Bedingung (2.10) ist sicher erfüllt, wenn gilt:

$$\boxed{\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.}$$

(c) Existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: Q$ , so gilt:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: Q \quad \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{(absolute) Konvergenz,} \\ > 1 & \Rightarrow \text{Divergenz,} \\ = 1 & \Rightarrow \text{unentscheidbarer Fall.} \end{cases}}$$

Begründungen: (a) Unter Verwendung der Bedingung (2.9) gilt für alle  $n > N$ :

$$\left| \frac{a_n}{a_N} \right| = \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| \leq q^{n-N}.$$

Es folgt  $|a_n| \leq \frac{|a_N|}{q^N} \cdot q^n =: K \cdot q^n \forall n \geq N$ , also Konvergenz nach dem Majorantenkriterium.

(b) Wegen (2.10) gilt  $|a_{n+1}| \geq |a_n| > 0 \forall n \geq N$ , so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  unmöglich ist. Also divergiert die Reihe nach dem Divergenzkriterium.

(c) Gilt  $Q < 1$ , so liegt der Fall (2.9) vor. Gilt  $Q > 1$ , so ist man bei (2.10).  $\square$

**Bemerkung 3.12** Anders als beim Wurzelkriterium darf die Bedingung (2.10) **nicht** ersetzt werden durch die schwächere Bedingung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1, \quad (2.11)$$

wie folgendes *Beispiel* zeigt. Wir setzen

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2} & : n = 2m, \\ \frac{1}{n^3} & : n = 2m + 1. \end{cases}$$

Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , da sie die konvergente Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  hat. Es gilt aber

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{(2m)^2}{(2m+1)^3} & : n = 2m, \\ \frac{(2m+1)^3}{(2m+2)^2} & : n = 2m + 1. \end{cases}$$

Hier haben wir  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ , obwohl Konvergenz vorliegt.  $\square$

**BSP. (3.2.5)** Wir betrachten die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  für festes  $z \in \mathbf{K}$ . Zur Konvergenzuntersuchung verwenden wir das Quotientenkriterium. Für  $z = 0$  ist nichts zu zeigen. Für  $z \neq 0$  sind die Reihenglieder  $a_n := \frac{z^n}{n!}$  nicht Null. Wir erhalten deshalb:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

also absolute Konvergenz für alle  $z \in \mathbf{K}$ . Wir zeigen jetzt für reelle Zahlen  $x \in \mathbf{R}$  in mehreren Schritten die Gleichung

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.} \quad (2.12)$$

*1.Schritt:* Für  $x \in \mathbf{Q}$  folgt formal aus den Rechenregeln mit Grenzwerten:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \stackrel{jx := m}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^{jx} = \left[ \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j \right]^x = e^x$$

für  $x > 0$ , und eine analoge Rechnung gilt auch für  $x < 0$ .

*2.Schritt:* Aus dem binomischen Lehrsatz erhalten wir:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{x^n}{m^n}, \quad \binom{m}{n} \frac{1}{m^n} = \frac{1(1 - \frac{1}{m})(1 - \frac{2}{m}) \cdots (1 - \frac{n-1}{m})}{n!}.$$

Hieraus resultiert für festes  $n \in \mathbf{N}$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \binom{m}{n} \frac{1}{m^n} = \frac{1}{n!}. \quad (2.13)$$

*3.Schritt:* Für festes  $0 \neq x \in \mathbf{R}$  hat man wegen der absoluten Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ :

$$\forall k \in \mathbf{N} \exists N \in \mathbf{N} : \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{|x|^n}{n!} < 0.5 \cdot 10^{-k} \quad \forall p > 1.$$

Wir haben gemäß (9.5), Abschnitt 1.9, die Ungleichung  $\binom{m}{n} \frac{1}{m^n} \leq \frac{1}{n!}$ . Hiermit erhalten wir für  $m > N$ :

$$\left| \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{x^n}{m^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N \binom{m}{n} \frac{x^n}{m^n} - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} < \sum_{n=0}^N \left| \binom{m}{n} \frac{1}{m^n} - \frac{1}{n!} \right| |x|^n + 10^{-k}.$$

Aus der Limes-Relation (2.13) ergibt sich nun:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{x^n}{m^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbf{Q}.$$

Da  $\mathbf{Q}$  in  $\mathbf{R}$  dicht liegt, kann diese Gleichung mit einem Standardverfahren der Analysis auch für beliebige Zahlen  $x \in \mathbf{R}$  erklärt werden. (Wir werden in Abschnitt 6.7 Potenzen mit beliebigem Exponenten behandeln). Vorab halten wir fest:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbf{R}, \text{ wobei die Reihe sogar } \forall x \in \mathbf{K} \text{ absolut konvergiert.}$$

**BSP. (3.2.6)** Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$  für festes  $z \in \mathbf{K}$  und  $\alpha \in \mathbf{R}$ , wobei an die Definition der Binomialkoeffizienten erinnert sei:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \quad (2.14)$$

**Sonderfall:** Für  $\alpha = m \in \mathbf{N}_0$  gilt  $\binom{\alpha}{n} = 0 \quad \forall n > m$ , so dass folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n = (1+z)^m \quad \forall z \in \mathbf{K}. \quad (2.15)$$

Es gelte nun  $\alpha \notin \mathbf{N}_0$ . Wir setzen  $a_n := \binom{\alpha}{n} z^n$  und verwenden das Quotientenkriterium zur Konvergenzuntersuchung:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z| \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)} \right| = \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| |z| = \left| \frac{1-\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right| |z|,$$

und hieraus erschließen wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z|$ .

**Definition 3.17** Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$  heie **binomische Reihe**. Für  $\alpha = m \in \mathbf{N}_0$  ist sie endlich mit dem Summenwert  $\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n = (1+z)^m \quad \forall z \in \mathbf{K}$ . Für  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}_0$  ist die Reihe **absolut konvergent** für alle  $z \in \mathbf{K}$  mit  $|z| < 1$  und **divergent** für  $|z| > 1$ .

Im Hinblick auf die Gleichung (2.15) wird die Vermutung nahegelegt, dass im **Konvergenzfall** die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha \quad (2.16)$$

besteht. Dass dies tatsächlich der Fall ist, werden wir im Zusammenhang mit Potenzreihen in Kapitel 9 zeigen.

Bei der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$  bleibt die Konvergenzfrage im Falle  $|z| = 1$  noch ungeklärt. Speziell für  $z = 1$  erhält man aus (2.14) die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} = \sum_{n=0}^{[\alpha]} \binom{\alpha}{n} - (-\text{sign } \alpha)^{[\alpha]} \cdot \sum_{n=[\alpha]+1}^{\infty} (-1)^n \left| \binom{\alpha}{n} \right|. \quad (2.17)$$

**Definition 3.18** Für  $\alpha \in \mathbf{R}$  bezeichne  $[\alpha]$  diejenige Zahl  $n \in \mathbf{Z}$ , die die Ungleichung

$$n \leq \alpha < n+1$$

erfüllt (das ist die größte ganze Zahl  $n \leq \alpha$ ). Die Abbildung  $\mathbf{R} \ni \alpha \mapsto [\alpha] \in \mathbf{Z}$  heie **entire-Funktion**.

Zum Beispiel:  $[\pi] = 3$ ,  $[-\pi] = -4$ ,  $[-99.999\,999] = -100$ ,  $[99.\bar{9}] = 100$ .

Für Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  mit Koeffizienten  $a_n \geq 0$  gibt es ein spezielles Konvergenzkriterium, welches von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716, Philosoph und Mathematiker; der "Vater" der Differential- und Integralrechnung) gefunden wurde.

**Definition 3.19** Eine reelle Reihe in der Form  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  mit Koeffizienten  $a_n \geq 0$  heie **alternierende Reihe**.

**Satz 3.18 (LEIBNIZ-Kriterium)**

Die alternierende Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  mit Koeffizienten  $a_n \geq 0$  **konvergiert**, wenn gilt:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \exists N_0 \geq 0 : a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \geq N_0.} \quad (2.18)$$

Im Konvergenzfall approximiert die  $N$ -te Partialsumme  $s_N := \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n$  den Summenwert  $s := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  mit einem Fehler  $a_{N+1}$ :

$$\boxed{0 \leq (-1)^N (s_N - s) \leq a_{N+1} \quad \forall N > N_0.} \quad (2.19)$$

*Begründung:* Es gilt für  $N > N_0$  und jedes  $p \in \mathbf{N}$ :

$$\begin{aligned} (-1)^N (s_N - s_{N+p}) &= \left\{ \underbrace{(a_{N+1} - a_{N+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{N+3} - a_{N+4})}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{N+p-1} - a_{N+p})}_{\geq 0} \right\} > 0 \\ &= \left\{ a_{N+1} - \underbrace{(a_{N+2} - a_{N+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{N+4} - a_{N+5})}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{a_{N+p}}_{\geq 0} \right\} \leq a_{N+1}. \end{aligned}$$

Wir erschließen hieraus  $0 \leq (-1)^N (s_N - s_{N+p}) \leq a_{N+1} \xrightarrow{(2.18)} 0$  ( $N \rightarrow +\infty$ ). Das heißt, die Folge der Partialsummen ist nach dem CAUCHY-Kriterium konvergent zum Grenzwert  $s$ , und es gilt

$$0 \leq (-1)^N (s_N - \lim_{p \rightarrow \infty} s_{N+p}) = (-1)^N (s_N - s) \leq a_{N+1}.$$

**Merke:** Der Fehler  $R_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n a_n = s - s_N$  ist betragsmäßig höchstens gleich dem **ersten bei  $s_N$  weggelassenen Reihenglied**, nämlich  $a_{N+1}$ . Durch (2.19) wird sogar das **Vorzeichen** von  $R_N$  mitbestimmt:

$$0 \leq s_{2m} - s = -R_{2m} \leq a_{2m+1} \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq s - s_{2m-1} = R_{2m-1} \leq a_{2m}.$$

Es gilt also stets  $s_{2m-1} \leq s \leq s_{2m} \quad \forall m \in \mathbf{N} : 2m > N_0$ .

**BSP. (3.2.7)** (a) Die **alternierende** harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$  ist **bedingt** konvergent. In der Tat, es gilt  $a_n := \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} =: a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbf{N}$  sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Somit ist das LEIBNIZ-Kriterium anwendbar. Wir werden mit den Methoden der Differential- und Integralrechnung in Abschnitt 9.2 zeigen, dass gilt:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2.}$$



Natürlich ist die Reihe nicht absolut konvergent, denn mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  liegt hier die divergente harmonische Reihe vor.

(b) Die LEIBNIZ-Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  erfüllt wegen  $a_n := \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+3} =: a_{n+1} \forall n \in \mathbf{N}_0$  sowie wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  auch die Voraussetzungen zum LEIBNIZ-Kriterium. Für diese konvergente Reihe wird ebenso noch zu zeigen sein:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

Wir wollen hier die Frage beantworten, wie groß der Index  $N$  gewählt werden muss, damit die Zahl  $\frac{\pi}{4}$  durch die Partialsumme  $s_N$  mit einem Fehler von höchstens  $10^{-5}$  approximiert wird. Zur Lösung verwenden wir (2.19). Es soll gelten

$$0 \leq (-1)^N \left( s_N - \frac{\pi}{4} \right) \leq a_{N+1} \stackrel{!}{\leq} 10^{-5},$$

also  $\frac{1}{2N+3} \leq 10^{-5}$  oder  $N \geq 0.5 \cdot (10^5 - 3)$ , was für  $N = 49\,999$  richtig ist.

Eine Verfeinerung des Quotientenkriteriums wurde von dem Schweizer Mathematiker JOSEPH LUDWIG RAABE (1801–1859) gefunden.

### Satz 3.19 (RAABE-Kriterium)

Es gelte  $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbf{N}_0$ .

(a) Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist **absolut konvergent**, wenn Zahlen  $b > 1$  und  $N \in \mathbf{N}$  existieren mit

$$\boxed{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 - \frac{b}{n} \quad \forall n \geq N.} \quad (2.20)$$

(b) Für reelle Koeffizienten  $a_n \in \mathbf{R}$  divergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , wenn gilt:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq N.} \quad (2.21)$$

*Begründungen:* (a) Aus der Bedingung (2.20) folgt  $0 < (b-1)|a_n| \leq (n-1)|a_n| - n|a_{n+1}| =: b_n \forall n \geq N$ . Die Folge  $(n|a_{n+1}|)_{n \geq N}$  ist also monoton  $\downarrow$  und nach unten beschränkt, mithin konvergent. Sei  $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} n|a_{n+1}|$  ihr Grenzwert. Es konvergiert nun auch die Teleskopreihe

$$\sum_{n=N}^{\infty} b_n = (N-1)|a_N| - \alpha.$$

Nach Konstruktion gilt  $|a_n| \leq \frac{b_n}{b-1}$ , so dass die Reihe  $\frac{1}{b-1} \sum_{n=N}^{\infty} b_n$  nun eine konvergente Majorante für  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$  ist.

(b) Aus der Bedingung (2.21) folgt jetzt  $na_{n+1} \geq (n-1)a_n$  sowie  $\text{sign } a_n = \text{sign } a_{n+1} \forall n \geq N$ . Das heißt, die Folge  $(na_{n+1})_{n \geq N}$  ist monoton  $\uparrow$ , und sie darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv angenommen werden. Mit  $\alpha := (N-1)a_N > 0$  folgt dann  $a_{n+1} \geq \frac{\alpha}{n} \forall n \geq N$ , so dass die divergente harmonische Reihe eine Minorante für  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  liefert.  $\square$

**BSP. (3.2.8)** (a) Wir betrachten die binomische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n$ ,  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}_0$ . Für  $a_n := \binom{\alpha}{n} (-1)^n$  berechnet man aus (2.12):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - \alpha}{n + 1} = 1 - \frac{\alpha + 1}{n + 1} \quad \forall n \geq 0. \quad (2.22)$$

Wir treffen nun zwei Fallunterscheidungen gemäß

- $\alpha > 0$ . Setzt man hier  $b := 1 + \frac{\alpha}{2} > 1$ , so folgt aus (2.22) die Abschätzung  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 - \frac{\alpha+1}{n+1} \leq 1 - \frac{b}{n} \quad \forall n \geq 1 + \frac{2}{\alpha} =: N$ . Es gilt somit (2.20), und wir haben **Konvergenz**.
- $\alpha < 0$ . Nun gilt  $\alpha + 1 < 1 < \frac{n+1}{n}$ . Somit folgt aus (2.22) die Abschätzung  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha+1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$ . Es gilt also (2.21), und wir haben **Divergenz**.

(b) Wir betrachten die binomische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$ ,  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}_0$ . Für  $a_n := \binom{\alpha}{n}$  erhält man jetzt anstelle von (2.22):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - n}{n + 1} \quad \forall n \geq 0. \quad (2.23)$$

Wir treffen wiederum zwei Fallunterscheidungen gemäß

- $\alpha \leq -1$ . In diesem Fall folgt aus (2.23) die Abschätzung  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|\alpha+n|}{n+1} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ . Es gilt also (2.10), und wir haben **Divergenz** nach dem Quotientenkriterium.
- $\alpha > -1$ . Wir folgern aus (2.23) die Abschätzung  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1-\frac{\alpha}{n}}{1+\frac{1}{n}} \leq 1 \quad \forall n \geq [\alpha] + 2 =: N_0$ . Es gilt somit  $|a_n| \geq |a_{n+1}| \quad \forall n \geq N_0$ . Wie wir schon in (2.17) gezeigt haben, kann  $\sum_{n=N_0}^{\infty} \binom{\alpha}{n}$  als **alternierende** Reihe geschrieben werden. Um aus dem LEIBNIZ-Kriterium Konvergenz erschließen zu können, müssen wir noch die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{\alpha}{n} = 0$  verifizieren. Hierzu verwenden wir die aus der Reihendarstellung von  $e^x$  resultierende Ungleichung

$$0 \leq 1 + x \leq e^x \quad \forall x \geq -1$$

zusammen mit der Identität

$$\binom{\alpha}{n} = (-1)^n \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha+1}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha+1}{N_0}\right)}_{=:K} \left(1 - \frac{\alpha+1}{N_0+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right).$$

Es gilt nun:

$$\left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq |K| \prod_{j=N_0+1}^n e^{-(\alpha+1)/j} = |K| \exp \left( -(\alpha+1) \sum_{j=N_0+1}^n \frac{1}{j} \right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Zusammenfassend haben wir gezeigt:

|  |
|--|
| $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n \text{ ist } \mathbf{konvergent} \quad \forall \alpha \geq 0 \quad \text{und } \mathbf{divergent} \quad \forall \alpha < 0,$ $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \text{ ist } \mathbf{konvergent} \quad \forall \alpha > -1 \quad \text{und } \mathbf{divergent} \quad \forall \alpha \leq -1.$ |
|--|

**Bemerkung 3.13** (a) Im Falle  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  versagen sowohl Wurzel- als auch Quotientenkriterium. Man kann jedoch zeigen: Versagt das Quotientenkriterium *nicht*, so auch nicht das Wurzelkriterium. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch, denn das Wurzelkriterium ist stärker. Wir können aus dieser Feststellung eine Aussage über den Grenzwert der Folge  $(\sqrt[n]{n!})_{n \in \mathbb{N}}$  treffen. Wir hatten in BSP. (3.2.3) die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  mit Hilfe des Quotientenkriteriums untersucht und gezeigt, dass wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$  absolute Konvergenz für alle  $z \in \mathbf{K}$  vorliegt. Damit das Wurzelkriterium auf dasselbe Ergebnis führt, muss also gelten:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ . Hieraus erschließt man

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.}$$

(b) Für Reihen der Form  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^\alpha}$  versagen sowohl Wurzel- als auch Quotientenkriterium (vgl. Satz 3.16). Daher sollte man stets versuchen, diese Reihe als Vergleichsreihe heranzuziehen, wenn beide Kriterien bei einer Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  auf den unentscheidbaren Fall führen.

(c) **Fehlerabschätzungen:** Der *Abbruchfehler*  $|s - s_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right|$  kann bei alternierenden Reihen mit Hilfe der Schranke (2.19) abgeschätzt werden. Falls für eine vorgelegte Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine konvergente Majorante  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  existiert, so kann mit deren Hilfe der Abbruchfehler geschätzt werden:

$$|s - s_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n.$$

Die folgenden Fälle sind vor allem von praktischer Bedeutung:

(i) Falls  $0 \leq |a_n| \leq q^n \forall n > N$  mit einer Zahl  $0 \leq q < 1$  gilt, so resultiert:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| \leq \frac{q^{N+1}}{1-q}.$$

(ii) Falls  $0 \leq |a_n| \leq \frac{K}{n^\alpha} \forall n > N$  mit festen Zahlen  $\alpha > 1$  und  $K > 0$  gilt, so resultiert:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| \leq K \frac{N + \alpha}{(\alpha - 1)(N + 1)^\alpha}.$$

Eine Begründung für die letzte Abschätzung werden wir mit Hilfe des **Integralvergleichskriteriums** in Abschnitt 8.4 liefern.

**BSP. (3.2.9)** Wir zeigen hier, wie die EULERSche Zahl  $e$  numerisch auf 157 Stellen genau berechnet werden kann (vgl. Definition 3.7, Abschnitt 3.1). Wir verwenden die Darstellung (2.12) der Funktion  $e^x$  aus BSP. (3.2.5). Offenkundig gilt

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} =: e_N + F_N.$$

Die Zahl  $e$  soll durch die rationale Zahl  $e_N$  approximiert werden. Um die Approximationsgüte festzustellen, schätzen wir den Abbruchfehler  $F_N$  ab. Wir haben

$$F_N = \frac{1}{(N+1)!} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(N+1)!}{k!} = \frac{1}{(N+1)!} \left\{ 1 + \underbrace{\frac{1}{N+2}}_{< \frac{1}{2!}} + \underbrace{\frac{1}{(N+2)(N+3)}}_{< \frac{1}{3!}} + \underbrace{\frac{1}{(N+2)(N+3)(N+4)}}_{< \frac{1}{4!}} \dots \right\}$$

$$< \frac{e-1}{(N+1)!}.$$

Verwenden wir die STIRLINGSche Formel

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n}\right), \quad n \gg 1,$$

so erhalten wir

$$0 < F_N \approx \frac{(e-1) \left(\frac{e}{N+1}\right)^{N+1}}{\sqrt{2\pi(N+1)} \left(1 + \frac{1}{12(N+1)}\right)}.$$

Für  $N := 99$  und der Näherung  $e \doteq 2.718282$  ergibt sich nun

$$F_{99} \doteq 1.841\,157 \cdot 10^{-158},$$

das heißt, die rationale Zahl  $e_{99} := \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{k!}$  stimmt mit der EULERSchen Zahl  $e$  auf  $M = 156$  Nachkommastellen überein. Es bleibt das Problem zu lösen, wie man so große Zahlen mit  $M$  Dezimalstellen exakt berechnet, wenn der Computer nur  $n \ll M$  Dezimalstellen verarbeiten kann. Zur Lösung dieses Problems gibt es bereits gute Standard-Software. Die Kreiszahl  $\pi$  und die EULERSche Zahl  $e$  sind aber seit je das Objekt spezieller Berechnungsverfahren gewesen.

Der derzeit wohl effizienteste Algorithmus ist der sogenannte *Tröpfel-Algorithmus* (*spigot algorithm* auf englisch), der im Jahre 1968 von A.H.J. SALE eigentlich zur Berechnung der EULERSchen Zahl  $e$  entdeckt wurde. Seine Erweiterung auf die Berechnung von  $\pi$  wurde im Jahre 1991 von STANLEY RABINOWITZ aus Westford (Mass. USA) vorgenommen. Die folgenden Quellen seien hier zitiert: A.H.J. SALE, The calculation of  $e$  to many significant digits. *Computing J.* **11** (1968), pp 229–230. S. RABINOWITZ and S. WAGON, A spigot algorithm for the digits of  $\pi$ . *Amer. Math. Monthly* **102**(3) (1995), pp 195–203.

Mit der von RABINOWITZ und WAGON vorgeschlagenen Version des Tröpfel-Algorithmus könnte man heute per Handrechnung die ersten 20 Dezimalstellen von  $\pi$  mit einfachen ganzzahligen Arithmetikoperationen in wenigen Stunden bestimmen. In der Wissenschaftszeitschrift **Spektrum der Wissenschaft** vom Dezember 1995 wird eine übersichtliche Darstellung über die Wirkungsweise des Tröpfel-Algorithmus gebracht. Die Geschichte ist recht länglich, und ihre Umsetzung in einen brauchbaren Computer-Algorithmus nicht ganz durchschaubar. Wir bringen in den beiden folgenden Abschnitten jeweils lauffähige Exzerpte für die Berechnung von  $e$  und  $\pi$ .

### 3.2.1 Der Tröpfel-Algorithmus für die Eulersche Zahl $e$

|     |   |
|-----|---|
| 0:  | Einlesen von $n$ (Anzahl der Dezimalstellen)      |
| 1:  | $d_0 := 2$ ;                                      |
| 2:  | für $j := 1, 2, \dots, n+1$ :                     |
| 3:  | $e_j := 1$ ; (Ende $j$ )                          |
| 4:  | $k := 1$ ;  |
| 5:  | wiederhole:                                       |
| 6:  | $d_k := 0$ ;                                      |
| 7:  | für $j := n+1, n, \dots, 1$ :                     |
| 8:  | $s := 10 * e_j + d_k$ ;                           |
| 9:  | $d_k := s \operatorname{div} (j+1)$ ;             |
| 10: | $e_j := s \operatorname{mod} (j+1)$ ; (Ende $j$ ) |
| 11: | $k := k+1$ ;                                      |
| 12: | bis ( $k > n$ ).                                  |

Dieser ist sehr einfach strukturiert. Seine Idee beruht auf der Darstellung der Zahl  $e$  durch die unendliche Reihe

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = 2 + \frac{1}{2} \left[ e_1 + \frac{1}{3} \left( e_2 + \frac{1}{4} \left( e_3 + \frac{1}{5} (e_4 + \dots) \right) \right) \right]$$

mit  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = \dots = 1$ , siehe oben. Die Dezimalzahl  $e = 2.7182\dots$  erlaubt ja andererseits die algebraische Darstellung

$$e = 2 + \frac{1}{10} \left[ 7 + \frac{1}{10} \left( 1 + \frac{1}{10} \left( 8 + \frac{1}{10} \left( 2 + \dots \right) \right) \right) \right] = 2 + \frac{1}{10} \left[ d_1 + \frac{1}{10} \left( d_2 + \frac{1}{10} \left( d_3 + \frac{1}{10} \left( d_4 + \dots \right) \right) \right) \right].$$

Das heißt, in der sogenannten *arithmetischen Basis*  $D := (\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \dots)$  gilt für  $e$  die Dezimaldarstellung  $e = d_0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$  mit den Spezifikationen  $d_0 = 2, d_1 = 7, d_2 = 1, d_3 = 8, d_4 = 2, \dots$ . Im Hinblick auf diese Darstellungen liegt es nun auf der Hand, anstelle der arithmetischen Basis  $D$  die geeignetere Basis

$$E := \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right)$$

zu betrachten, in welcher die EULERSche Zahl offensichtlich die ganz einfache Darstellung  $e = 2,1111\dots$  besitzt. Die Kunst besteht nun darin, die Darstellung von  $e$  zur Basis  $E$  in die zur Basis  $D$  umzurechnen, d.h. also, die Koeffizienten  $e_j = 1$  in die Koeffizienten  $d_k$  zu überführen. Genau diese Umrechnung leistet der Tröpfel-Algorithmus. In dem obigen *Pseudo-Listing* bedienen wir uns der beiden Standardoperationen *div* und *mod* – der ganzzahligen Division und der Bestimmung des Divisionsrestes, die in den meisten höheren Programmiersprachen implementiert sind. Die Zahl  $n$  muss vom Benutzer eingegeben werden; sie legt die Anzahl der zu berechnenden Dezimalstellen für  $e \doteq 2, d_1 d_2 \dots d_n$  fest. Nach Ablauf des Algorithmus können die berechneten Dezimalstellen in dem Feld  $d_k, 0 \leq k \leq n$  abgerufen werden. Für  $n = 450$  benötigt ein 386er PC mit Arithmetik-Prozessor weniger als 3 Sekunden. Das Ergebnis:

```
e ≐ 2.718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 497 757 247 093 699 959 574 966 967 627 724 076 630 353 547
594 571 382 178 525 166 427 427 466 391 932 003 059 921 817 413 596 629 043 572 900 334 295 260 595 630
738 132 328 627 943 490 763 233 829 880 753 195 251 019 011 573 834 187 930 702 154 089 149 934 884 167
509 244 761 460 668 082 264 800 168 477 411 853 742 345 442 437 107 539 077 744 992 069 551 702 761 838
606 261 331 384 583 000 752 044 933 826 560 297 606 737 113 200 709 328 709 127 443 747 047 230 696 977
209 310 141 692 836 819 025 515 108 657 463 772 111 252 389 784 425 056 953 696
```

### 3.2.2 Der Tröpfel-Algorithmus für die Kreiszahl $\pi$

```
0: Einlesen von n (Anzahl der Dezimalstellen)
1: N := 10 * n div 3;
2: für j := 0, 1, ..., N :
3:   p_j := 2; (Ende j)
4:   k := 0; m := 0;
5:   wiederhole:
6:     a := 0;
7:     für j := N, N - 1, ..., 1 :
8:       s := 10 * p_j + a * (j + 1);
9:       a := s div (2 * j + 1);
10:      p_j := s mod (2 * j + 1); (Ende j)
11:      s := 10 * p_0 + a; d_k := s div 10; p_0 := s mod 10;
12:      falls (d_k < 9) dann m := k sonst
13:        falls (d_k = 10) dann
14:          für j := m, m + 1, ..., k - 1 :
15:            d_j := (1 + d_j) mod 10; (Ende j)
16:            d_k := 0; m := k; (Ende falls, Ende falls)
17:          k := k + 1;
18:        bis (k > N).
```

Dieser ist ähnlich aufgebaut wie der Algorithmus für  $e$ . Er verwendet die folgende Darstellung der Kreiszahl, nämlich

$$\pi = 2 + \frac{1}{3} \left[ 2 + \frac{2}{5} \left( 2 + \frac{3}{7} \left( 2 + \frac{4}{9} (2 + \dots) \right) \right) \right] = 2 + \frac{1}{3} \left[ p_1 + \frac{2}{5} \left( p_2 + \frac{3}{7} (p_3 + \frac{4}{9} (p_4 + \dots)) \right) \right].$$

Das heißt, in der Basis

$$P := \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots \right)$$

hat nun  $\pi$  die sehr einfache Darstellung  $\pi = 2,2222\dots$ . Die Umrechnung dieser Darstellung zur Basis  $P$  in diejenige zur arithmetischen Basis  $D$  erfolgt dem Prinzip nach wie beim Tröpfel-Algorithmus für  $e$ . Anders jedoch als bei jenem Algorithmus können jetzt **Stellenüberläufe** auftreten. Genauer, es kann die (nicht zulässige) Dezimalstelle  $d_k = 10$  auftreten (was tatsächlich das erste Mal bei  $k = 32$  passiert). In diesem Fall muss die vorausgegangene Stelle  $d_{k-1}$  um 1 erhöht werden. Ist aber  $d_{k-1} = 9$ , so ergibt sich nun wiederum ein Stellenüberlauf  $d_{k-1} = 10$ , und die Korrektur muss um eine weitere Stelle nach vorne verschoben werden, usw. Der gesamte Korrekturprozess wird in den Zeilen 12–16 des obigen Pseudo-Listings bewerkstelligt. Darüber hinaus reicht es nicht wie bei der Berechnung von  $e$ , lediglich die  $n$  Stellen der  $E$ -Basisdarstellung  $e \doteq e_0, e_1 e_2 \dots e_n$  für die  $n$  Dezimalstellen  $e \doteq d_0, d_1 d_2 \dots d_n$  heranzuziehen. Die Darstellung der Zahl  $\pi$  gemäß  $\pi \doteq d_0, d_1 d_2 \dots d_n$  bedarf hingegen der Umrechnung aller  $N$  Stellen der  $P$ -Basisdarstellung  $\pi \doteq p_0, p_1 p_2 \dots p_N$  mit  $N := \lceil \frac{10n}{3} \rceil$ . Demgemäß ist der Aufwand gegenüber der Berechnung von  $e$  hier höher. Die Ermittlung der folgenden  $n = 450$  Dezimalstellen dauerte etwa 13 Sekunden.

$\pi \doteq 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ 375\ 105\ 820\ 974\ 944\ 592\ 307\ 816\ 406\ 286\ 208$   
 $998\ 628\ 034\ 825\ 342\ 117\ 067\ 982\ 148\ 086\ 513\ 282\ 306\ 647\ 093\ 844\ 609\ 550\ 582\ 231\ 725\ 359\ 408\ 128\ 481\ 117$   
 $450\ 284\ 102\ 701\ 938\ 521\ 105\ 559\ 644\ 622\ 948\ 954\ 930\ 381\ 964\ 428\ 810\ 975\ 665\ 933\ 446\ 128\ 475\ 648\ 233\ 786$   
 $783\ 165\ 271\ 201\ 909\ 145\ 648\ 566\ 923\ 460\ 348\ 610\ 454\ 326\ 648\ 213\ 393\ 607\ 260\ 249\ 141\ 273\ 724\ 587\ 006\ 606$   
 $315\ 588\ 174\ 881\ 520\ 920\ 962\ 829\ 254\ 091\ 715\ 364\ 367\ 892\ 590\ 360\ 011\ 330\ 530\ 548\ 820\ 466\ 521\ 384\ 146\ 951$   
 $941\ 511\ 609\ 433\ 057\ 270\ 365\ 759\ 591\ 953\ 092\ 186\ 117\ 381\ 932\ 611\ 793\ 105\ 118\ 548$

## Produktreihen

**Definition 3.20** Ist  $j : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine Permutation der nichtnegativen ganzen Zahlen, so heie die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)}$  eine **Umordnung** der gegebenen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Eine konvergente Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit der Summe  $s$  heie **unbedingt konvergent**, wenn jede ihrer Umordnungen wieder gegen  $s$  konvergiert.

**BSP. (3.2.10)** (a) Die alternierende harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  ist konvergent zum Summenwert  $s = \ln 2$ . Wir konstruieren die folgende Umordnung:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{9} & -\frac{1}{10} & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{12} & +\dots & = s, \\ : 2 | & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & & +\frac{1}{10} & & -\frac{1}{12} & +\dots & = \frac{s}{2}, \\ \hline (+) & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{9} & & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{6} & +\dots & = \frac{3s}{2}. \end{array}$$

Offensichtlich steht links eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe, die nun den Summenwert  $\frac{3}{2}s$  hat.

(b) Fasst man in der alternierenden harmonischen Reihe *zuerst* alle negativen Summanden und *danach* alle positiven Summanden zusammen, so ergibt sich nun sogar eine **divergente** Umordnung.

Das hier festgestellte Phänomen tritt bei allen **bedingt konvergenten** Reihen auf.

**Merke: Bedingt konvergente** Reihen können stets so umgeordnet werden, dass sich ihr Grenzwert ändert oder sogar so, dass sie divergieren!

Dagegen gilt:

**Satz 3.20** Eine konvergente Reihe ist genau dann **unbedingt konvergent**, wenn sie **absolut konvergiert**.

*Begründung:* Wir beschränken uns hier lediglich auf den Nachweis der praktisch wichtigen Implikation

$$\text{absolute Konvergenz} \Rightarrow \text{unbedingte Konvergenz.}$$

Es genügt, Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit *reellen* Reihengliedern  $a_n$  zu betrachten, da wir sonst eine Zerlegung  $a_n = \alpha_n + i\beta_n$  in Real- und Imaginärteil vornehmen können.

*1.Schritt:* Es gelte zunächst  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbf{N}_0$ . Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)}$  eine Umordnung. Dann gilt offenbar:

$$\sum_{n=0}^N a_{j(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \forall N \in \mathbf{N}$$

Aus dem Monotoniekriterium erhält man die Konvergenz der Umordnung, ferner hat man  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)} \leq$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Vertauscht man jetzt die Rollen beider Reihen, so erhält man mit denselben Argumenten  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)}$ , und die behauptete Implikation ist in diesem Fall bewiesen.

*2.Schritt:* Es seien nun  $a_n \in \mathbf{R}$  beliebige Koeffizienten. Aus der absoluten Konvergenz folgt, dass auch die beiden Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(|a_n| - a_n)$  konvergieren. Da beide Reihen nichtnegative Reihenglieder haben, sind sie gemäß 1.Schritt unbedingt konvergent. Dies trifft auch auf ihre Differenz  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  zu. □

Mit Hilfe von Satz 3.20 wollen wir das Produkt

$$P := \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) \tag{2.24}$$

zweier **absolut konvergenter** Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  berechnen. Mit ähnlicher Konstruktion wie im Falle *endlicher Summen* müssen dabei die Koeffizienten des folgenden Produktschemas in einer geeigneten Reihenfolge zu einer Folge neuer Koeffizienten  $c_0, c_1, c_2, \dots$  angeordnet werden:

|       |                 |                 |                 |                 |         |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------|
|       | $a_0 \cdot b_0$ | $a_0 \cdot b_1$ | $a_0 \cdot b_2$ | $a_0 \cdot b_3$ | $\dots$ |
| $c_0$ | ↙               | ↙               | ↙               | ↙               |         |
|       | $a_1 \cdot b_0$ | $a_1 \cdot b_1$ | $a_1 \cdot b_2$ | $a_1 \cdot b_3$ | $\dots$ |
| $c_1$ | ↙               | ↙               | ↙               | ↙               |         |
|       | $a_2 \cdot b_0$ | $a_2 \cdot b_1$ | $a_2 \cdot b_2$ | $a_2 \cdot b_3$ | $\dots$ |
| $c_2$ | ↙               | ↙               | ↙               | ↙               |         |
|       | $a_3 \cdot b_0$ | $a_3 \cdot b_1$ | $a_3 \cdot b_2$ | $a_3 \cdot b_3$ | $\dots$ |
| $c_3$ | ↙               | ↙               | ↙               | ↙               |         |
|       | $\vdots$        | $\vdots$        | $\vdots$        | $\vdots$        | $\dots$ |

Durch Summation längs der Diagonalpfeile erhält man zum Beispiel:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \forall n \in \mathbf{N}_0. \tag{2.25}$$

Es ist aber auch die folgende Zählweise längs der angegebenen Pfeile möglich:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0 \cdot b_0 & & a_0 \cdot b_1 & & a_0 \cdot b_2 & & a_0 \cdot b_3 & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 a_1 \cdot b_0 & \rightarrow & a_1 \cdot b_1 & & a_1 \cdot b_2 & & a_1 \cdot b_3 & \cdots \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 a_2 \cdot b_0 & \rightarrow & a_2 \cdot b_1 & \rightarrow & a_2 \cdot b_2 & & a_2 \cdot b_3 & \cdots \\
 & & & & & & \uparrow & \\
 a_3 \cdot b_0 & \rightarrow & a_3 \cdot b_1 & \rightarrow & a_3 \cdot b_2 & \rightarrow & a_3 \cdot b_3 & \cdots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \cdots
 \end{array}$$

Hier haben wir

$$c_0 := a_0 b_0, \quad c_1 := a_1 b_0, \quad c_2 := a_1 b_1, \quad c_3 := a_0 b_1, \quad \dots \quad (2.26)$$

**Definition 3.21** Die aus den beiden Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  gemäß der Vorschrift (2.25) gebildete Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n := \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)$$

heiße das **CAUCHY-Produkt** beider Reihen.

**Satz 3.21** Sind die beiden Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  **absolut konvergent**, so konvergiert auch ihr **CAUCHY-Produkt absolut**, und es gilt

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right). \quad (2.27)$$

*Begründung:* Es seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n =: a$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n =: b$  absolut konvergent, und es sei  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$  eine beliebige Anordnung der Produkte  $a_j \cdot b_k$  zu einer Folge. Bezeichne  $p_N$  den höchsten Index von  $a_j$  bzw.  $b_k$ , der in der Summe  $\sum_{n=0}^N c_n$  auftritt. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \left( \sum_{j=0}^{p_N} |a_j| \right) \left( \sum_{k=0}^{p_N} |b_k| \right) \leq \left( \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right) \quad \forall N \in \mathbf{N},$$

das heißt, die Folge  $\left( \sum_{n=0}^N |c_n| \right)_{N \in \mathbf{N}}$  ist nach oben beschränkt. Da sie außerdem monoton  $\uparrow$ , muss sie konvergieren. Nun ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  gemäß Satz 3.20 unbedingte konvergent. Wählen wir  $c_n$  nach der Vorschrift (2.25), so ist die rechte Seite der Gleichung (2.27) konvergent zum Summenwert  $s$ . Wählen wir hingegen die spezielle Umordnung (2.26), so ersieht man

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N^2-1} c'_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^{N-1} a_j \right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} b_k \right) = a \cdot b.$$



**Merke:** Für **absolut konvergente** Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n =: a$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n =: b$  gilt die Produktformel

$$ab = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) =: \sum_{n,k=0}^{\infty} a_n b_k.$$

Setzt man  $a_{nk} := a_n b_k$  so gilt für absolut konvergente **Doppelreihen**  $\sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk}$ , dass jede Summationsreihenfolge denselben Summenwert liefert, zum Beispiel:

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{k(n-k)}.$$

**BSP. (3.2.11)**

(a) Wir haben in BSP. (3.2.5) gezeigt, dass die beiden Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$  für jeden Wert von  $x, y \in \mathbf{R}$  absolut konvergent sind, und zwar zum Summenwert  $e^x$  bzw.  $e^y$ . Aus Satz 3.21 erhalten wir:

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \stackrel{(2.27)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}. \end{aligned}$$

Insbesondere für  $y := -x$  resultiert:

$$e^x \cdot e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1 \quad \text{mit} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

Wir fassen zusammen:

**Funktionalgleichung** der Exponentialfunktion  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ :

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}, \quad e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1, \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

(b) Da die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  auch für alle  $z \in \mathbf{C}$  absolut konvergent ist, setzen wir

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbf{C}. \tag{2.28}$$

Wie in (a) erhalten wir die Funktionalgleichung

$$\exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}, \quad \exp(0) = 1. \tag{2.29}$$

Ferner gilt  $\exp(x) = e^x \forall x \in \mathbf{R}$ . Durch diese Eigenschaften hatten wir in Definition 2.8, [Abschnitt 2.3] die **komplexe Exponentialfunktion** charakterisiert. Wir erhalten nun die

**Darstellung der komplexen Exponentialfunktion:**

$$e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

**EULERSche Formel:**

$$e^{iy} = \exp(iy) = \cos y + i \sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

(c) Zerlegt man die komplexe Reihe in der EULERSchen Formel in Real- und Imaginärteil (wegen der absoluten Konvergenz sind Umordnungen erlaubt!), so findet man:

$$\cos y + i \sin y = \sum_{\substack{k=0 \\ (n=2k)}}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{\substack{k=0 \\ (n=2k+1)}}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Werden auf beiden Gleichungsseiten Real- und Imaginärteil miteinander verglichen, so ergibt sich die folgende Reihendarstellung der trigonometrischen Funktionen:

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Setzen wir  $z := y \in \mathbf{C}$  in diese beiden Reihen ein, so erhalten wir mit Hilfe des Quotientenkriteriums wiederum absolute Konvergenz beider Reihen für jedes feste  $z \in \mathbf{C}$ . Diese Tatsache gibt Anlass zu folgender

**Definition 3.22** Die gemäß

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

definierten Abbildungen  $\cos, \sin : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  heißen **komplexe Cosinusfunktion** bzw. **komplexe Sinusfunktion**.

**Bemerkung 3.14** (a) Es gelten die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z, \end{aligned} \right\} \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

(b) Durch Addition und Division durch 2 bzw. Subtraktion und Division durch  $2i$  der obigen Gleichungen erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \end{aligned} \right\} \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

(c) Mit Hilfe der Funktionalgleichung (2.29) zeigt man jetzt ohne Schwierigkeiten:

$$\begin{aligned} \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2 &= \cos(z_1 \pm z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}, \\ \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2 &= \sin(z_1 \pm z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}, \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1 \quad \forall z \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

# Kapitel 4

## Vektoren

### 4.1 Lineare Gleichungssysteme. Der GAUSS-Algorithmus

Lineare Gleichungssysteme treten in überaus zahlreichen Problemen der Mathematik, der Physik und der Ingenieurwissenschaften auf. Wir wollen hier ein einführendes Beispiel mit neutralem Charakter voranstellen.

**BSP. (4.1.1)** Ein Nahrungsmittel enthalte verschiedene Schadstoffe  $S_1, S_2, \dots, S_5$ , die als Bestandteile handelsüblicher Pflanzenschutz- und Konservierungsmittel  $A, B, C, D, E$  in das Endprodukt geraten sind. Der Einsatz dieser Chemikalien bei Produktion und Vertrieb ist in der ersten Tabelle aufgelistet. In der zweiten Tabelle ist die Zusammensetzung der verschiedenen Chemikalien nach Anteilen der Schadstoffe  $S_1, S_2, \dots, S_5$  aufgeschlüsselt.

|    |                    |       |
|----|--------------------|-------|
| 1) | Landwirt           | : $A$ |
| 2) | Rohproduktlager    | : $B$ |
| 3) | Veredelungsbetrieb | : $C$ |
| 4) | Grossist           | : $D$ |
| 5) | Einzelhändler      | : $E$ |

|     | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A$ | 0.2   | 0.5   | –     | 0.3   | –     |
| $B$ | 0.1   | 0.6   | 0.3   | –     | –     |
| $C$ | 0.1   | 0.2   | 0.2   | 0.3   | 0.2   |
| $D$ | –     | –     | 0.1   | 0.4   | 0.5   |
| $E$ | –     | 0.1   | 0.3   | 0.3   | 0.3   |

Eine Probe des fertigen Nahrungsmittels beim Endverbraucher ergab die folgende Analyse (in Gewichtseinheiten):

| $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.75  | 2.25  | 0.65  | 1.60  | 0.75  |

**Problemstellung:** Mit welchen Mengen sind die einzelnen Stationen an der Schadstoffbelastung des Fertigproduktes beteiligt? **Mathematisierung:** Sei  $x_1$  (in Gewichtseinheiten) die Menge der Chemikalie  $A$ , die der Landwirt verwendet hat,  $\dots$ ,  $x_5$  die Menge der Chemikalie  $E$ , die der Einzelhändler verwendet hat. Zu lösen ist das folgende System von **fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten**  $x_1, x_2, \dots, x_5$ :

$$\begin{aligned}0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0.75, \\0.5x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 + 0x_4 + 0.1x_5 &= 2.25, \\0x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 0.3x_5 &= 0.65, \\0.3x_1 + 0x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4 + 0.3x_5 &= 1.60, \\0x_1 + 0x_2 + 0.2x_3 + 0.5x_4 + 0.3x_5 &= 0.75.\end{aligned}$$

Es ist zu erwarten, dass zu diesen fünf Gleichungen **Lösungen**  $x_1, x_2, \dots, x_5$  existieren. Tatsächlich prüft man durch einfaches Einsetzen, dass das obige System mit folgenden Zahlen erfüllbar ist:  $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 1, x_5 = 0.5$ .

Wir erweitern das einführende Beispiel zu folgendem allgemeinen Problem: **Gegeben** seien ein Körper  $\mathbf{K}$  und Elemente

$$a_{jk} \in \mathbf{K}, \quad b_j \in \mathbf{K}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (m, n \in \mathbf{N} \text{ fest}).$$

**Gesucht** ist ein  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \dots \times \mathbf{K} =: \mathbf{K}^n$ , für welches die folgenden Gleichungen **simultan** gelten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots + \quad \quad \quad \vdots + \dots + \quad \quad \quad \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

oder in Kurzform

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k = b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.} \quad (\text{LG})$$

**Definition 4.1** Das System (LG) heie ein **lineares Gleichungssystem** mit  $n$  Unbekannten  $x_k$  und  $m$  Gleichungen. Die Elemente  $a_{jk}$  heißen die **Koeffizienten**, und die Elemente  $b_j$  **rechte Seiten**. Das System heie **homogen**, wenn  $b_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$  gilt; sonst heie es **inhomogen**. Die stets existierende Lösung  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  des homogenen Systems heie **triviale Lösung**.

Wir wollen im Zusammenhang mit (LG) die folgenden Fragen diskutieren:

- Wann existieren Lösungstupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ?
- Sind Lösungstupel eindeutig bestimmt?
- Wie können Lösungstupel algorithmisch bestimmt werden?

Die Beantwortung dieser Fragen gestaltet sich in einigen Spezialfällen sehr elementar. Dazu verwenden wir für (LG) eine schematische Darstellung in der selbsterklärenden Form

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$    | $x_2$    | $\dots$  | $x_n$    | $1$      |
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\dots$  | $a_{1n}$ | $b_1$    |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\dots$  | $a_{2n}$ | $b_2$    |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\dots$  | $a_{mn}$ | $b_m$    |

**Kurzform:**

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

}  $m$

TYP (I) **Eindeutiger Typ:**

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| * |   |   |   |   |   |   |
|   | * |   |   |   |   |   |
|   |   | * |   |   |   |   |
|   |   |   | * |   |   |   |
|   |   |   |   | * |   |   |
|   |   |   |   |   | 0 | 0 |
|   |   |   |   |   | 0 | 0 |

}  $m \geq n$

Charakteristisch für diesen Typ ist, dass alle **Diagonalelemente** von Null verschieden sind

$$* = a_{jj} \neq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Das Lösungstupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ist ganz offensichtlich **eindeutig** bestimmt: Beginnend mit  $x_n$ , lassen sich alle  $x_k$  in eindeutiger Weise sukzessive berechnen, und zwar durch **Rückwärts-einsetzen**:

$$x_j = \frac{1}{a_{jj}} \left( b_j - \sum_{k=j+1}^n a_{jk} x_k \right), \quad \forall j = n, n-1, \dots, 1.$$

Das Rückwärtseinsetzen kann algorithmisch sehr einfach formuliert werden. Vorzugeben sind die Koeffizienten  $a_{jk}$  des linearen Gleichungssystems (LG) vom Typ (I) sowie die rechten Seiten  $b_j$ .

**Rückwärtseinsetzen zur Berechnung von  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .**

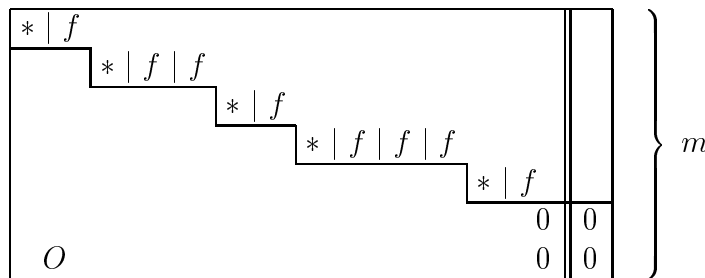
|    |                                    |
|----|------------------------------------|
| 1: | für $j := n, n-1, \dots, 1$ :      |
| 2: | $s := b_j$ ;                       |
| 3: | für $k := j+1, j+2, \dots, n$ :    |
| 4: | $s := s - a_{jk} * x_k$ ;          |
| 5: | $x_j := s/a_{jj}$ . (Ende $k, j$ ) |

**BSP. (4.1.2)**

$$\begin{array}{r|l} 2i x_1 + 3x_2 - (1+i)x_3 + 0x_4 = -1+3i & \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2i} (1+i-1+3i) = \boxed{2}, \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 & \Rightarrow x_2 = 4-4+0 = \boxed{0}, \\ x_3 - 2x_4 = 9 & \Rightarrow x_3 = -8+9 = \boxed{1}, \\ 5x_4 = -20 & \Rightarrow x_4 = \boxed{-4}. \\ 0 = 0 & \end{array}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist  $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -4$ .

**TYP (II) Mehrdeutiger Typ:**



Charakteristisch für diesen Typ ist, dass **nicht alle** Koeffizienten  $* \neq 0$  auf den Stufenpositionen Diagonalelemente sind. Die Diagonalelemente  $a_{jj}$  der Variablen  $x_j$  in den Positionen  $f$  sind Null; genau diese Variablen  $x_j$  sind **frei wählbar**. Werden die Ausdrücke auf den Positionen  $f$  auf die **rechte Seite** gebracht, so entsteht nun wieder ein **eindeutig** lösbares System vom Typ (I).

**BSP. (4.1.3)**

$$\begin{array}{r|l} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_5 = -8 & \Rightarrow x_1 = -2 + \frac{3}{4}x_2 - x_3 + \frac{1}{4}x_5, \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 14 & \Rightarrow x_3 = 7 - x_4 - \frac{1}{2}x_5. \\ 0 = 0 & \end{array}$$

Offenbar können die Variablen  $x_2 = C_1$ ,  $x_4 = C_2$ ,  $x_5 = C_3$  mit beliebigen Werten belegt werden, so dass die folgende **mehrdeutige** Lösung resultiert:

$$x_1 = -9 + \frac{3}{4} C_1 + C_2 + \frac{3}{4} C_3, \quad x_2 = C_1, \quad x_3 = 7 - C_2 - \frac{1}{2} C_3, \quad x_4 = C_2, \quad x_5 = C_3.$$

**TYP (III) Unlösbarer Typ:**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} * & & & & \\ * & & & & \\ & * & & & \\ & & * & & \\ & & & * & \\ & & & & * \\ & & & & 0 \\ O & & & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \Bigg) m$$

Auf den gekennzeichneten Stufenpositionen  $* \neq 0$  stehen wieder nichtverschwindende Koeffizienten, ebenso auf der gekennzeichneten Position von  $b_j$ . Da die Zeile  $0 = *$  durch keine Wahl der  $x_k$  erfüllbar ist, liegt hier ein **unlösbares** Gleichungssystem vor.

**BSP. (4.1.4)**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 & - & x_5 & = & -8 \\ & 2x_3 + 2x_4 + & x_5 & = & 14 \\ & & 0x_4 + 0x_5 & = & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \text{unlösbar!}$$

**Definition 4.2** Jedes der linearen Gleichungssysteme vom Typ (I), (II) oder (III) heie ein **Staffelsystem** oder **System in Stufenform**, kurz *S-System*. Jede der  $m$  Gleichungen in (LG) heie eine **Zeile**. Durch Numerierung der Gleichungen in (LG) von oben nach unten sind die Zeilen geordnet gemäß 1. Zeile, 2. Zeile, ...,  $m$ -te Zeile.

Gelingt es, ein **beliebiges** Gleichungssystem (LG) in die Stufenform zu bringen, so gewinnt man sofort die Lösung gemäß den oben angegebenen Schritten zu den Typen (I), (II) oder (III). Ein Verfahren, welches **ohne Änderung** der Lösungsmenge die Transformation des Systems (LG) in die Stufenform leistet, ist der **GAUSS-Algorithmus**. Zu dessen Verständnis benötigen wir den Begriff einer **elementaren Umformung** (GAUSS-Schritt).

**Definition 4.3** Unter einer **elementaren Umformung** eines linearen Gleichungssystems versteht man eine der folgenden Operationen:

(A) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl  $c \neq 0$ :  $cZ_j \Rightarrow Z_j$

(B) Zu einer Zeile wird das Vielfache einer anderen Zeile addiert:  $Z_j + cZ_k \Rightarrow Z_j$

(C) Zwei Zeilen werden vertauscht:  $Z_j \Leftrightarrow Z_k$

**BSP. (4.1.5)**

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 10, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 0x_4 &= 12. \end{aligned}$$

**Vereinfachung der Schreibweise:** Da die Stellung der Unbekannten  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ohnehin klar ist, können die  $x_k$  fortgelassen werden. Wichtig sind nur die Stellungen der Koeffizienten  $a_{jk}$  und der rechten Seiten  $b_j$ .

|   |   |   |     |    |  |     |
|---|---|---|-----|----|--|-----|
| $\frac{1}{2}Z_2 \Rightarrow Z_2, Z_1 \Leftrightarrow Z_2$ | 0 | 1 | -3  | 2  |  | 4   |
|   | 2 | 4 | 6   | -2 |  | 10  |
|   | 3 | 9 | -3  | 0  |  | 12  |
|   | 1 | 2 | 3   | -1 |  | 5   |
| $Z_3 - 3Z_1 \Rightarrow Z_3$                              | 0 | 1 | -3  | 2  |  | 4   |
|   | 3 | 9 | -3  | 0  |  | 12  |
|   | 1 | 2 | 3   | -1 |  | 5   |
| $Z_3 - 3Z_2 \Rightarrow Z_3$                              | 0 | 1 | -3  | 2  |  | 4   |
|   | 0 | 3 | -12 | 3  |  | -3  |
|   | 1 | 2 | 3   | -1 |  | 5   |
|   | 0 | 1 | -3  | 2  |  | 4   |
|   | 0 | 0 | -3  | -3 |  | -15 |

Durch den Prozess des **Spaltenausräumens** mittels elementarer Umformungen haben wir ein S-System vom Typ (II) erzeugt. Die Lösung kann nun direkt bestimmt werden. Der Wert der Variablen  $x_4 = C$  ist beliebig wählbar. Wir erhalten in dieser Reihenfolge  $x_3 = 5 - C$ ,  $x_2 = 19 - 5C$ ,  $x_1 = -48 + 14C$ . Das Lösungstupel lautet somit

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-48 + 14C, 19 - 5C, 5 - C, C).$$

Durch Einsetzen in das Ausgangssystem überprüft man sofort, dass dieses Tupel nicht nur das S-System löst, sondern auch das Ausgangssystem.

Die hier formulierte Aussage bleibt auch im allgemeinen Fall wahr:

**Satz 4.1** Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems wird durch elementare Umformungen **nicht** verändert.

*Begründung:* Diese ist klar bei Umformungen vom Typ (A) oder (C). Zu zeigen ist die Aussage für GAUSS-Schritte vom Typ (B). Zum Beispiel gelte  $Z_l + cZ_i \Rightarrow Z_l$ . Ist  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  eine Lösung von (LG) vor der Umformung, so gilt insbesondere

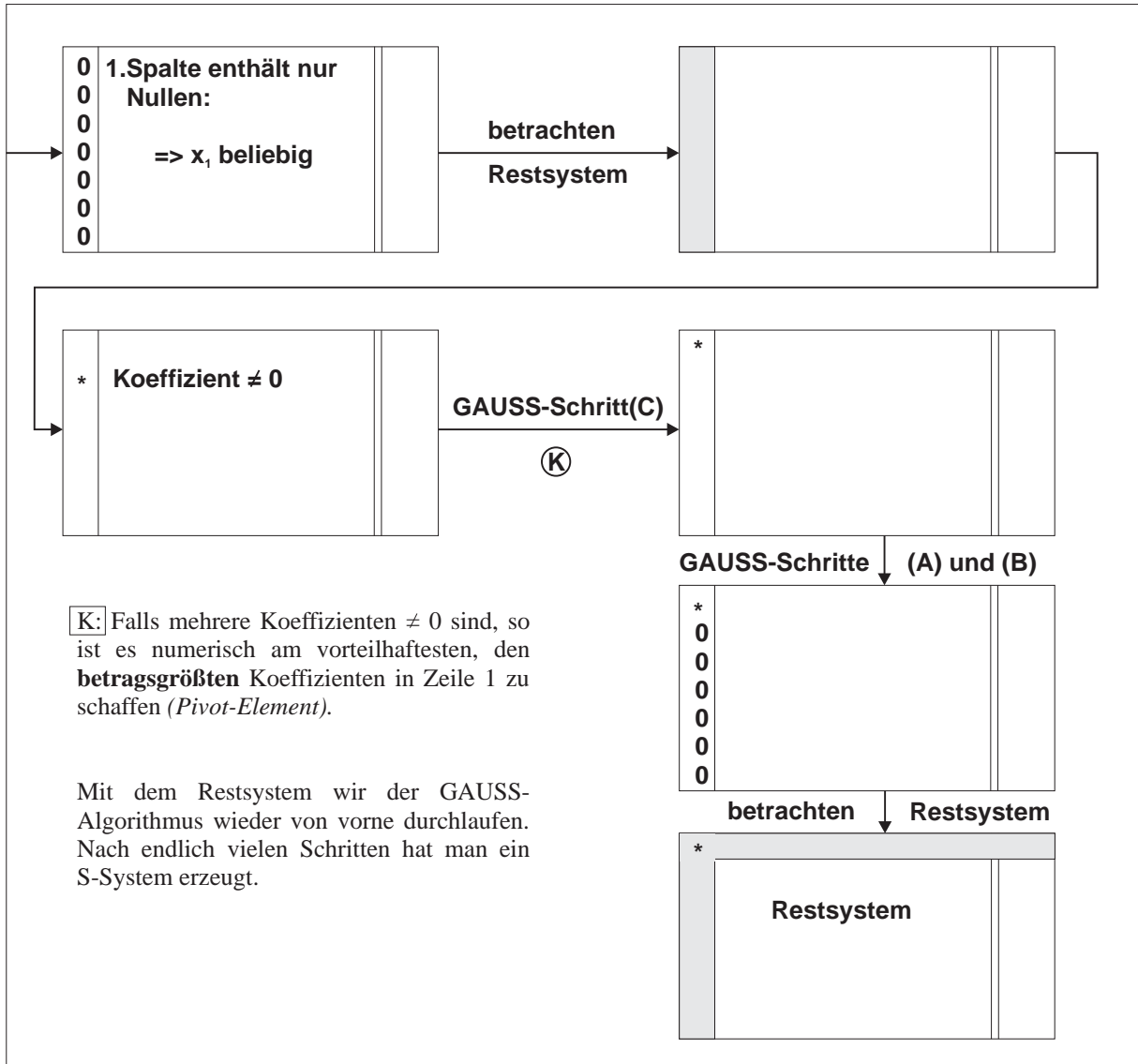
$$\sum_{k=1}^n a_{ik}p_k = b_i, \quad \sum_{k=1}^n a_{lk}p_k = b_l, \tag{1.1}$$

aber **nach** der Umformung

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}p_k = b_i, \quad \sum_{k=1}^n (a_{lk} + ca_{ik})p_k = b_l + cb_i. \tag{1.2}$$

Das heißt,  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  ist auch eine Lösung des transformierten Systems. Sei nun umgekehrt  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  eine Lösung des transformierten Systems, so gelangt man durch den GAUSS-Schritt  $Z_l - cZ_i \Rightarrow Z_l$  mit demselben  $c$  wieder von (1.2) zurück zum Ausgangssystem (1.1). Man erkennt, dass  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  auch eine Lösung des Ausgangssystems ist.  $\square$

Mit dem oben durchgeführten Verfahren des **Spaltenausträumens** durch elementare Umformungen haben wir bereits die Grundform des **GAUSS-Algorithmus** vorliegen, den wir in der folgenden Weise schematisieren können:



**BSP. (4.1.6)** Das folgende Zahlenschema

|   |   |                                      |
|---|---|--------------------------------------|
| $\frac{1}{5} Z_2 \Rightarrow Z_2$<br>$Z_3 - 10Z_2 \Rightarrow Z_3$  | $\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 20 \\ 0 & 10 & 5 & 40 \end{array}$         |                                      |
| $-\frac{1}{3} Z_3 \Rightarrow Z_3$<br>$Z_1 + 2Z_3 \Rightarrow Z_1$<br>$Z_2 - \frac{4}{5} Z_3 \Rightarrow Z_2$ | $\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}$ | (*) S-System, Typ (I)                |
| $Z_1 + 2Z_2 \Rightarrow Z_1$  | $\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$             |                                      |
|   | $\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$             | $x_1 = 10$<br>$x_2 = 4$<br>$x_3 = 0$ |



ist dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 2, \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 26, \\ 5x_1 & & & - & 5x_3 & = & 50 \end{array}$$

zugeordnet, wobei wir beim Aufschreiben des Zahlenschemas die elementaren Umformungen  $Z_2 - 3Z_1 \Rightarrow Z_2$  und  $Z_3 - 5Z_1 \Rightarrow Z_3$  durchgeführt haben. Wir erkennen bereits in der Position (\*), dass das vorgelegte System eindeutig lösbar ist. Durch weitere elementare Umformungen erhält man das zuletzt aufgeschriebene **entkoppelte** System, in welchem das *Lösungstupel* sofort ablesbar ist:

$$(x_1, x_2, x_3) = (10, 4, 0).$$

**BSP. (4.1.7)** Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 5, \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & -9, \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 18. \end{array}$$

Wir führen beim Aufschreiben des zugeordneten Zahlenschemas die elementaren Umformungen  $Z_2 + 2Z_1 \Rightarrow Z_2$  und  $Z_3 - 3Z_1 \Rightarrow Z_3$  durch. Mit diesem Schritt wird die erste Spalte ausgeräumt.

|  |   |   |
|--|---|---|
| $Z_3 - Z_2 \Rightarrow Z_3$<br>$Z_2 - Z_3 \Rightarrow Z_2$ | $\begin{array}{cccc c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$  |   |
| $Z_1 - Z_2 - 2Z_3 \Rightarrow Z_1$                         | $\begin{array}{cccc c} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$ | }   |
|  | $\begin{array}{cccc c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$ | $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & -1 \\ x_4 & = & 2 \end{array}$ |

(\*) S-System, Typ (II)

Aus dem entkoppelten System kann das Lösungstupel wiederum unmittelbar abgelesen werden. Wir wählen  $x_2 = C$  beliebig. Es folgt

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2 + C, C, -1, 2), \quad C \in \mathbf{K}.$$

**Bemerkung 4.1** Wir vereinbaren eine **Addition** + von  $n$ -Tupeln und eine **Multiplikation mit Skalaren**  $\lambda$ -mal in folgender Weise:

$$\begin{array}{lcl} + & : & (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda\text{-mal} & : & \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{array}$$

mit  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{K}^n$  und  $\lambda \in \mathbf{K}$ . □

Setzen wir jetzt im obigen Beispiel

$$(h_1, h_2, h_3, h_4) := (C, C, 0, 0), \quad (p_1, p_2, p_3, p_4) := (2, 0, -1, 2),$$

so hat das Lösungstupel die Form

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (h_1, h_2, h_3, h_4) + (p_1, p_2, p_3, p_4).$$

Wir stellen fest, dass das 4-Tupel  $(h_1, h_2, h_3, h_4) = (C, C, 0, 0)$  für jede Wahl von  $C \in \mathbf{K}$  Lösung des **homogenen Systems** ist:

$$\begin{aligned} C &- C + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0, \\ -2C &+ 2C - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0, \\ 3C &- 3C + 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Der hier beobachtete Zusammenhang ist in allgemeiner Form gültig. Wir formulieren ihn als

**Satz 4.2** *Zwei Lösungen  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  des inhomogenen Systems (LG) unterscheiden sich stets nur um eine Lösung des homogenen Systems. Das heißt, das  $n$ -Tupel*

$$(h_1, h_2, \dots, h_n) := (x_1, x_2, \dots, x_n) - (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$

*löst das homogene System. Daher erhält man die Lösungsgesamtheit des inhomogenen Systems (LG), wenn man nur eine dieser Lösungen kennt – eine sogenannte **partikuläre Lösung**  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  – und dazu eine beliebige Lösung  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$  des **homogenen Systems** addiert:*

$$\mathcal{L}(\text{LG}) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n : (x_1, x_2, \dots, x_n) = (h_1, h_2, \dots, h_n) + (p_1, p_2, \dots, p_n)\}.$$

*Begründung:* Sind  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  Lösungen des inhomogenen Systems (LG), so gilt

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = b_j, \quad \sum_{k=1}^n a_{jk} y_k = b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen erhält man

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} (x_k - y_k) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Also ist  $(h_1, h_2, \dots, h_n) := (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$  eine Lösung des homogenen Systems.  $\square$

**Bemerkung 4.2** (a) Bei S-Systemen vom Typ (I) (eindeutiger Typ) hat das homogene System nur die **triviale** Lösung. Dies gilt auch für alle Systeme, die sich durch elementare Umformungen auf ein S-System vom Typ (I) zurückführen lassen.

(b) Ist  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$  eine Lösung des **homogenen** Systems (LG), so auch  $C(h_1, h_2, \dots, h_n) = (C \cdot h_1, C \cdot h_2, \dots, C \cdot h_n)$  mit jeder Zahl  $C \in \mathbf{K}$ . Das heißt, hat das homogene System (LG) eine **nichttriviale** Lösung, so hat es auch unendlich viele Lösungen. Ist darüber hinaus das **inhomogene** System lösbar, so hat auch dieses unendlich viele Lösungen.  $\square$

**BSP. (4.1.8)** Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Wir führen bereits beim Aufschreiben des zugeordneten Zahlenschemas eine elementare Umformung  $Z_1 \leftrightarrow Z_2$  durch, so dass in Zeile 1 an erster Stelle eine 1 erscheint.

|  |   |                 |    |                 |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
|--|---|-----------------|----|-----------------|----|---|---|---|-----------------|---|-----------------|---|----|----|---|----|---|-------|--------------------|--------|---|---|-------|--------------------|--------|---|-----------------|--|--|---|---|----|
| $Z_2 - 2Z_1 \Rightarrow Z_2$<br>$Z_3 - 4Z_1 \Rightarrow Z_3$     | <table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">-2</td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">-1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">2</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">2</td><td style="padding: 0 10px;">2</td><td style="padding: 0 10px;">-3</td><td style="padding: 0 10px;">4</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">4</td><td style="padding: 0 10px;">-2</td><td style="padding: 0 10px;">-1</td><td style="padding: 0 10px;">2</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">-1</td></tr> </table>  | 1               | -2 | 1               | -1 | 2 | 2 | 2 | -3              | 4 | 1               | 4 | -2 | -1 | 2 | -1 |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 1  | -2  | 1               | -1 | 2               |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 2  | 2   | -3              | 4  | 1               |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 4  | -2  | -1              | 2  | -1              |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| $Z_3 - Z_2 \Rightarrow Z_3$<br>$\frac{1}{6} Z_2 \Rightarrow Z_2$ | <table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">-2</td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">-1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">2</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">6</td><td style="padding: 0 10px;">-5</td><td style="padding: 0 10px;">6</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">-3</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">6</td><td style="padding: 0 10px;">-5</td><td style="padding: 0 10px;">6</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">-9</td></tr> </table>  | 1               | -2 | 1               | -1 | 2 | 0 | 6 | -5              | 6 | -3              | 0 | 6  | -5 | 6 | -9 |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 1  | -2  | 1               | -1 | 2               |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 0  | 6   | -5              | 6  | -3              |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 0  | 6   | -5              | 6  | -9              |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| $Z_1 + 2Z_2 \Rightarrow Z_1$                                     | <table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">-2</td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">-1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">2</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">-<math>\frac{5}{6}</math></td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">-<math>\frac{1}{2}</math></td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">-6</td></tr> </table>                       | 1               | -2 | 1               | -1 | 2 | 0 | 1 | - $\frac{5}{6}$ | 1 | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0  | 0  | 0 | -6 | $(*)$ S-System, Typ (III)   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 1  | -2  | 1               | -1 | 2               |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 0  | 1   | - $\frac{5}{6}$ | 1  | - $\frac{1}{2}$ |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 0  | 0   | 0               | 0  | -6              |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
|  | <table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">-<math>\frac{2}{3}</math></td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="padding: 0 10px;">-<math>\frac{5}{6}</math></td><td style="padding: 0 10px;">1</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">-<math>\frac{1}{2}</math></td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 10px;">-6</td></tr> </table> | 1               | 0  | - $\frac{2}{3}$ | 1  | 1 | 0 | 1 | - $\frac{5}{6}$ | 1 | - $\frac{1}{2}$ | 0 | 0  | 0  | 0 | -6 | <table style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 0 auto;"> <tr><td style="padding: 0 10px;"><math>x_1</math></td><td style="padding: 0 10px;">-<math>\frac{2}{3}x_3</math></td><td style="padding: 0 10px;"><math>+x_4</math></td><td style="padding: 0 10px;">=</td><td style="padding: 0 10px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 0 10px;"><math>x_2</math></td><td style="padding: 0 10px;">-<math>\frac{5}{6}x_3</math></td><td style="padding: 0 10px;"><math>+x_4</math></td><td style="padding: 0 10px;">=</td><td style="padding: 0 10px;">-<math>\frac{1}{2}</math></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="padding: 0 10px;">0</td><td style="padding: 0 10px;">=</td><td style="padding: 0 10px;">-6</td></tr> </table> | $x_1$ | - $\frac{2}{3}x_3$ | $+x_4$ | = | 1 | $x_2$ | - $\frac{5}{6}x_3$ | $+x_4$ | = | - $\frac{1}{2}$ |  |  | 0 | = | -6 |
| 1  | 0   | - $\frac{2}{3}$ | 1  | 1               |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 0  | 1   | - $\frac{5}{6}$ | 1  | - $\frac{1}{2}$ |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| 0  | 0   | 0               | 0  | -6              |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| $x_1$  | - $\frac{2}{3}x_3$  | $+x_4$          | =  | 1               |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
| $x_2$  | - $\frac{5}{6}x_3$  | $+x_4$          | =  | - $\frac{1}{2}$ |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |
|  |   | 0               | =  | -6              |    |   |   |   |                 |   |                 |   |    |    |   |    |   |       |                    |        |   |   |       |                    |        |   |                 |  |  |   |   |    |

Das System in der Position  $(*)$  ist **unlösbar**, da die dritte Zeile der nicht erfüllbaren Gleichung  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -6$  entspricht. Betrachten wir jedoch das **homogene** System mit lauter Nullen auf der rechten Seite, so entnehmen wir dem entkoppelten System, dass  $x_3 = C_1$  und  $x_4 = C_2$  beliebige wählbare Zahlen sind. Wir erhalten die folgende Lösung des homogenen Systems:

|                        |   |  |
|------------------------|---|--|
| $(h_1, h_2, h_3, h_4)$ | = | $(\frac{2}{3} C_1 - C_2, \frac{5}{6} C_1 - C_2, C_1, C_2)$   |
|                        | = | $C_1 (\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, 0) + C_2 (-1, -1, 0, 1).$ |

Wir bringen die Erfahrung aus den obigen Beispielen in den folgenden Satz ein.

**Satz 4.3 (GAUSSSCHER ALGORITHMUS)**

Jedes lineare Gleichungssystem (LG) kann durch elementare Umformungen (GAUSS-Schritte) (eventuell unter Hinzunahme von Spaltenvertauschungen, wodurch sich zwar die Reihenfolge der Variablen, nicht aber die Lösungsmenge ändert), in ein Staffelsystem der folgenden Form gebracht werden:

|           |   |                   |   |          |   |                   |   |         |   |             |   |                |       |
|-----------|---|-------------------|---|----------|---|-------------------|---|---------|---|-------------|---|----------------|-------|
| $x_{r_1}$ | + | $c_{1r_2}x_{r_2}$ | + | $\dots$  | + | $c_{1r_k}x_{r_k}$ | + | $\dots$ | + | $c_{1n}x_n$ | = | $d_1,$         |       |
|           |   | $x_{r_2}$         |   | $\dots$  |   | $c_{2r_k}x_{r_k}$ |   | $\dots$ |   | $c_{2n}x_n$ |   | $= d_2,$       |       |
|           |   |                   |   | $\vdots$ |   |                   |   | $\dots$ |   |             |   | $\vdots$       |       |
|           |   |                   |   |          |   | $x_{r_k}$         |   | $\dots$ |   | $c_{kn}x_n$ |   | $= d_k,$       | (1.3) |
|           |   |                   |   |          |   |                   |   |         |   |             |   | $0 = d_{k+1},$ |       |
|           |   |                   |   |          |   |                   |   |         |   |             |   | $\vdots$       |       |
|           |   |                   |   |          |   |                   |   |         |   |             |   | $0 = d_m.$     |       |

Dabei gilt  $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq n$  und  $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$ . Die Zahl  $k$  heißt der **Rang** des linearen Gleichungssystems (LG).

(a) Das lineare Gleichungssystem (LG) ist genau dann lösbar, wenn im Staffelsystem (1.3) die Bedingungen

$$d_{k+1} = d_{k+2} = \dots = d_m = 0$$

erfüllt sind.

(b) Im Falle der Lösbarkeit können alle  $x_i$  außer den Unbekannten  $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}$  frei gewählt werden; das sind  $n - k$  **Freiheitsgrade**. Die Lösungsgesamtheit des Systems (LG) enthält dann  $n - k$  frei wählbare Parameter.

**BSP. (4.1.9)**

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
& 3x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 &= 2, \\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4, \\
4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 &= 5.
\end{aligned}$$

Wir führen beim Aufschreiben des zugeordneten Zahlenschemas die elementaren Umformungen

 $Z_3 - Z_2 \Rightarrow Z_3$ ,  $Z_4 - 2Z_2 \Rightarrow Z_4$  und  $Z_1 \Leftrightarrow Z_2$  durch, so dass folgendes System erscheint:

|   |  |  |
|---|--|--|
| $Z_4 - Z_2 \Rightarrow Z_4$<br>$Z_3 - 2Z_2 \Rightarrow Z_3$   | $\begin{array}{ccccc c} 2 & -3 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$                                       |  |
| $Z_1 + Z_2 \Rightarrow Z_1$<br>$\frac{1}{2}Z_1 \Rightarrow Z_1$<br>$\frac{1}{3}Z_2 \Rightarrow Z_2$ | $\left. \begin{array}{ccccc c} 2 & -3 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$                       | (*) S-System, Typ (II)   |
|   | $\begin{array}{ccccc c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | $ \begin{array}{cccccc} x_1 & & +x_3 & -x_4 & & = \frac{3}{2} \\ & x_2 & +\frac{1}{3}x_3 & & +\frac{1}{3}x_5 & = \frac{1}{3} \end{array} $ |

Wir haben bei diesem Beispiel  $m = 4$ ,  $n = 5$  sowie  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ . Also ist der Rang  $k = 2$ . Das System hat  $n - k = 3$  Freiheitsgrade, und die drei frei wählbaren Parameter sind  $x_3 = C_1$ ,  $x_4 = C_2$ ,  $x_5 = C_3$ . Die Lösung lautet nun

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right) + C_1 \left(-1, -\frac{1}{3}, 1, 0, 0\right) \\
&+ C_2 (1, 0, 0, 1, 0) + C_3 (0, -\frac{1}{3}, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

## 4.2 Skalarenvektoren und Vektorräume

**BSP. (4.2.1)**

Bei den in Abschnitt 4.1 behandelten linearen Gleichungssystemen

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$    | $x_2$    | $\cdots$ | $x_n$    | $1$      |
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $b_1$    |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $b_2$    |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $b_m$    |

treten **geordnete  $m$ -Tupel** (bzw.  $n$ -Tupel) reeller oder komplexer Zahlen in verschiedener Konstellation auf, *zum Beispiel*:

- (a) Die Koeffizienten der  $j$ -ten **Zeile** bilden das  $n$ -Tupel  $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$ .
- (b) Die Koeffizienten der  $k$ -ten **Spalte** bilden das  $m$ -Tupel  $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})$ .
- (c) Die rechten Seiten bilden das  $m$ -Tupel  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ .
- (d) Jede Lösung bildet ein  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Es liegt nahe, in den Fällen (b) und (c) geordnete  $m$ -Tupel in **Spaltenform** zu schreiben und mit einem **Kurzsymbol** zu bezeichnen:

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad b_k \in \mathbf{K}, \quad (\mathbf{K} := \mathbf{R} \text{ oder } \mathbf{K} := \mathbf{C}).$$

In dieser Schreibweise wird das CARTESISCHE Produkt  $\mathbf{K}^n := \underbrace{\mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \cdots \times \mathbf{K}}_{n\text{-mal}}$  als Menge von Zahlenspalten aufgefasst:

$$\mathbf{K}^n = \left\{ \vec{x} : \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_k \in \mathbf{K} \right\}.$$

Wir sind mit dieser Darlegung keinesfalls an die Körper  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$  gebunden. Es ist üblich, die Elemente eines beliebigen Körpers  $\mathbf{K}$  als **Skalare** zu bezeichnen. In diesem Sinne definieren wir:

**Definition 4.4** *Es sei  $\mathbf{K}$  ein Körper. Das geordnete  $n$ -Tupel*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^n$$

heiße **Skalarenvektor** (auch **Spaltenvektor**) oder kurz **Vektor**. Die Elemente  $x_k \in \mathbf{K}$  heißen **Komponenten** von  $\vec{x}$ .  $\mathbf{K}^1$  wird wiederum mit  $\mathbf{K}$  identifiziert, und statt  $\vec{x} = (x) \in \mathbf{K}^1$  schreiben wir einfach  $x$ . Das geordnete  $n$ -Tupel

$$\vec{x}^T := (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

heiße der zu  $\vec{x}$  **transponierte Vektor** (oder **Zeilenvektor**). Es gilt

$$(\vec{x}^T)^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n,$$

womit eine platzsparende Schreibweise von Spaltenvektoren ermöglicht wird.

$$\text{Zum Beispiel: } \vec{x} := \begin{bmatrix} 2 + 5i \\ 2 - 5i \\ i \end{bmatrix} = (2 + 5i, 2 - 5i, i)^T \in \mathbf{C}^3, \quad \vec{x} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (2, -1, 0)^T \in \mathbf{R}^3.$$

Auf der Menge  $\mathbf{K}^n$  führen wir zwei algebraische Operationen + (**Addition**) und  $\lambda$ -mal (**Multiplikation mit Skalaren**) ein:

**Definition 4.5** (a) Die **Addition**  $+$  :  $\mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n$  ist erklärt durch die Vorschrift

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n.$$

Der Vektor  $\vec{x} + \vec{y}$  heie die **Summe** von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ .

(b) Die **Multiplikation mit Skalaren**  $\lambda$ -mal:  $\mathbf{K} \times \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^n$  ist erklärt gemäß

$$\lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n.$$

Der Vektor  $\lambda \vec{x}$  heie **skalares Vielfaches** von  $\vec{x}$ .

Zum Beispiel:  $2 \begin{bmatrix} 2 + 5i \\ 2 - 5i \\ 3i \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 5 + 2i \\ 5 - 2i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 5i \\ 2 - 15i \\ 6i \end{bmatrix}$ ; das heißt, Addition und  $\lambda$ -Multiplikation wirken **komponentenweise**.

Da die obigen Operationen **Addition** und  $\lambda$ -**Multiplikation** in  $\mathbf{K}^n$  vollständig zurückgeführt sind auf die Addition und die Multiplikation in  $\mathbf{K}$ , übertragen sich auch die Rechengesetze auf  $\mathbf{K}^n$ . Man deduziert ohne Schwierigkeiten die folgenden Rechenregeln:

|   |  |
|---|--|
| Es sei $\mathbf{K}$ ein Körper, und es sei 1 das neutrale Element der Multiplikation. Wir setzen $V := \mathbf{K}^n$ . Dann gelten in $(V, +, \lambda$ -mal) die folgenden Rechengesetze: |  |
| (A) Für die <b>Addition</b> :   |  |
| (A.V1)  | $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ , <span style="float: right;">(<b>Kommutativgesetz</b>)</span>   |
| (A.V2)  | $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ , <span style="float: right;">(<b>Assoziativgesetz</b>)</span>   |
| (A.V3)  | $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ besitzt für jede Vorgabe $\vec{a}, \vec{b} \in V$ genau eine Lösung $\vec{x}$ , nämlich die <b>Differenz</b> von $\vec{b}$ und $\vec{a}$ : $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ . |
| (M) Für die <b>Multiplikation mit Skalaren</b> ( $\lambda$ -Multiplikation):  |  |
| (M.V1)  | $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda \vec{x} + \mu \vec{x}$ , <span style="float: right;">(<b>1. Distributivgesetz</b>)</span>  |
| (M.V2)  | $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \lambda \vec{y}$ , <span style="float: right;">(<b>2. Distributivgesetz</b>)</span>  |
| (M.V3)  | $(\lambda \mu)\vec{x} = \lambda(\mu \vec{x})$ , <span style="float: right;">(<b>Assoziativgesetz</b>)</span>   |
| (M.V4)  | $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ . <span style="float: right;">(<b>neutrales Element</b>)</span>  |

**Bemerkung 4.3** Die Algebra  $(V, +)$  bildet offensichtlich eine abelsche Gruppe. Das **neutrale Element** der Addition ist der **Nullvektor**  $\vec{0} := (0, 0, \dots, 0)^T$ , und das zu  $\vec{x}$  **inverse Element** der Addition ist der Vektor  $-\vec{x} := (-1)\vec{x}$ . Es gilt  $0 \vec{x} = \vec{0}$ , ferner  $\lambda \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$  oder  $\vec{x} = \vec{0}$ .

**Definition 4.6** Es sei  $\mathbf{K}$  ein Körper. Mit den obigen Verknüpfungen  $+$  und  $\lambda$ -mal versehen, heie  $\mathbf{K}^n$   **$n$ -dimensionaler Skalarenvektorraum** ber  $\mathbf{K}$ .

Neben den Skalarenvektorrumen spielen auch noch andere Vektorräume eine erhebliche Rolle in der Analysis, zum Beispiel **Funktionsräume**.

**BSP. (4.2.2)** Es sei  $\mathbf{K}$  ein Körper. Wir setzen

$$\mathbf{K}_n[z] := \{P(z) : P(z) \text{ ist Polynom über } \mathbf{K} \text{ vom Grade höchstens } n \}.$$

Für  $P, Q \in \mathbf{K}_n[z]$  mit  $P(z) := \sum_{k=0}^l a_k z^k$  und  $Q(z) := \sum_{k=0}^m b_k z^k$ , ( $a_k, b_k \in \mathbf{K}$ ,  $0 \leq l, m \leq n$ ), setzen wir:

$$\begin{aligned}
+ & : (P+Q)(z) := P(z) + Q(z) = \sum_{k=0}^{\max\{l,m\}} (a_k + b_k)z^k \quad \forall z \in \mathbf{K}, \\
\lambda\text{-mal} & : (\lambda P)(z) := \lambda P(z) = \sum_{k=0}^l (\lambda a_k)z^k \quad \forall z \in \mathbf{K} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}.
\end{aligned}$$

Mit diesen Verknüpfungen verifiziert man auf  $\mathbf{K}_n[z]$  leicht die Rechengesetze (A.V1)–(A.V3) der Addition und (M.V1)–(M.V4) der  $\lambda$ -Multiplikation.

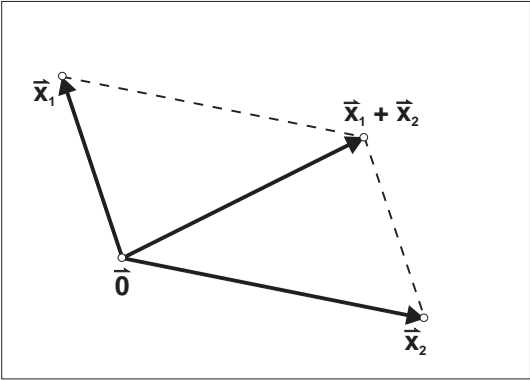
**Definition 4.7** Gegeben seien eine Menge  $V \neq \emptyset$  und ein Körper  $\mathbf{K}$ . Auf  $V$  seien eine Addition  $+$  und eine  $\lambda$ -Multiplikation  $\lambda$ -mal mit Skalaren  $\lambda \in \mathbf{K}$  so erklärt, dass die Rechengesetze (A.V1)–(A.V3) und (M.V1)–(M.V4) gelten. Dann heie  $(V, +, \lambda\text{-mal})$  **Vektorraum (VR)** ber  $\mathbf{K}$  (manchmal auch **linearer Raum**). Ist speziell  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ , so heie  $V$  ein **reeller VR**; ist  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ , so heie  $V$  ein **komplexer VR**.

**BSP. (4.2.3)** (a) Der Raum  $\mathbf{R}^n$  ist ein VR über  $\mathbf{R}$ , der Raum  $\mathbf{C}^n$  ist ein VR über  $\mathbf{C}$  (aber auch über  $\mathbf{R}$ ).

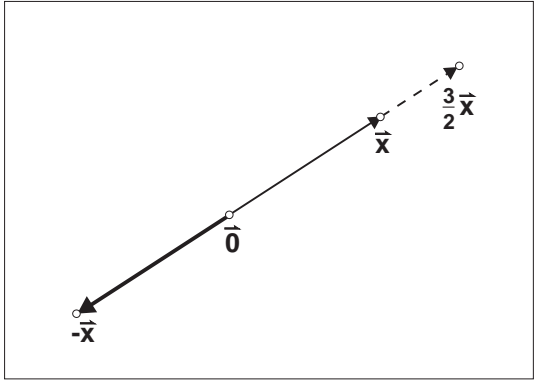
(b) **Ortsvektoren** sind **Pfeile** im (1-, 2- oder 3-dimensionalen) **Anschauungsraum**, die **angebunden sind an den Ursprung** und mit der Pfeilspitze zu einem beliebigen Punkt des Anschauungsraumes führen. Wir setzen *zum Beispiel*

$$A_2 := \{\text{Ortsvektoren im 2D-Anschauungsraum}\}.$$

Dann ist  $A_2$  ein VR über  $\mathbf{R}$ . Die Rechengesetze erhält man elementargeometrisch aus der Anschauung.



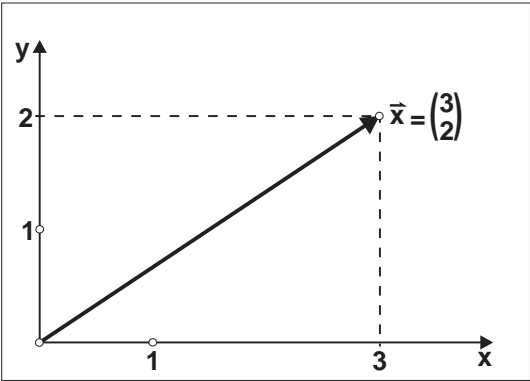
Addition nach dem Parallelogramm der Kräfte



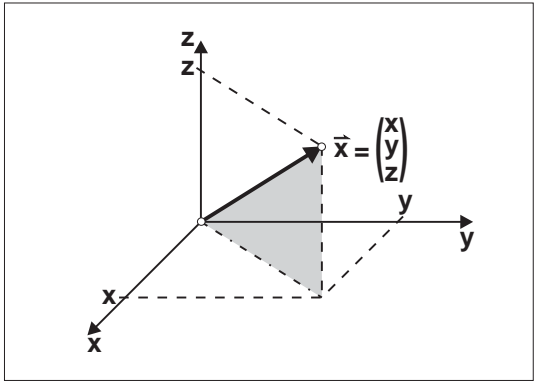
Multiplikation mit Skalaren

In derselben Weise erklärt man auch den VR

$$A_3 := \{\text{Ortsvektoren im 3D-Anschauungsraum}\}.$$



Veranschaulichung von  $\mathbf{R}^2$



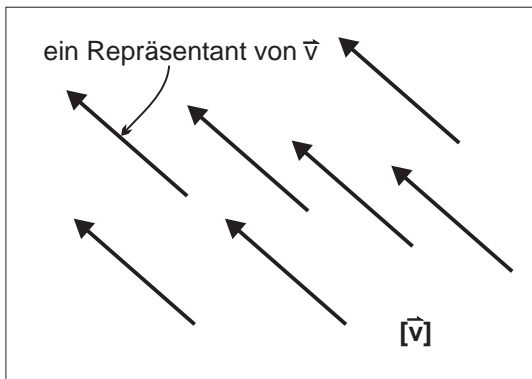
Veranschaulichung von  $\mathbf{R}^3$

Häufig werden  $A_2$  und  $A_3$  zur Veranschaulichung der Vektorräume  $\mathbf{R}^2$  bzw.  $\mathbf{R}^3$  herangezogen, indem man im Ursprung  $\vec{0}$  aufeinander senkrechte **Koordinatenachsen** einführt und dem Punkt  $P$  des Anschauungsraumes denjenigen Zahlenvektor  $\vec{x} = (x, y)^T$  in  $\mathbf{R}^2$  bzw.  $\vec{x} = (x, y, z)^T$  in  $\mathbf{R}^3$  zuordnet, dessen senkrechte Projektion auf die Koordinatenachsen die Zahlen  $x, y$  bzw.  $z$  liefert.

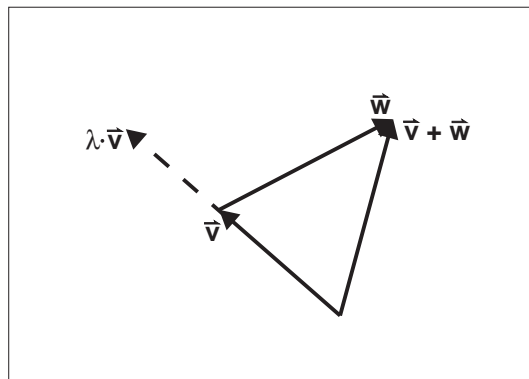
**Beachte:** Die Zuordnung  $A_2 \Leftrightarrow \mathbf{R}^2$  entspricht der Zuordnung  $\mathbf{C} \Leftrightarrow \text{GAUSS-Ebene}$ .

(c) **Freie Vektoren.** Im Gegensatz zu Ortsvektoren nennt man Pfeile im  $n$ -dimensionalen Anschauungsraum ( $n = 1, 2, 3$ ), die in einem **beliebigen** Punkt angeknüpft sind, **freie Vektoren**  $\vec{v}$ . Genauer hat man:

$[\vec{v}] :=$  Äquivalenzklasse aller mit  $\vec{v}$  gleichgerichteten, gleichlangen Strecken.

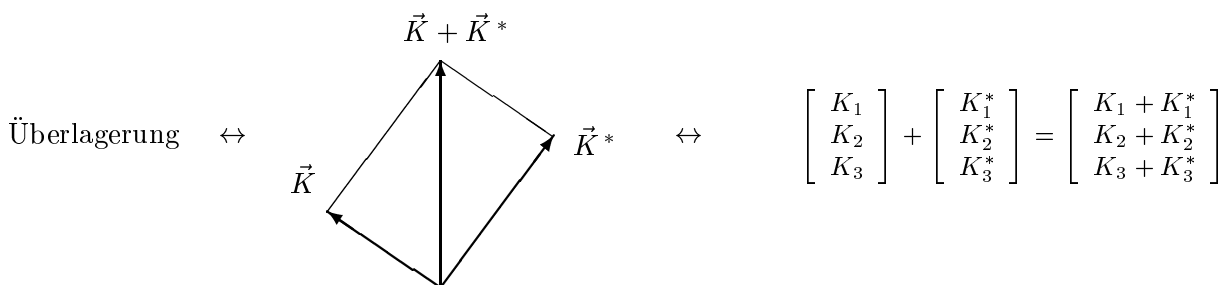
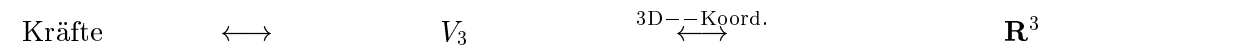


Freie Vektoren



Addition und  $\lambda$ -Multiplikation freier Vektoren

Die Menge  $V_2 := \{[\vec{v}] : \vec{v} \text{ freier Vektor im 2D-Anschauungsraum}\}$  bildet einen VR über  $\mathbf{R}$ . Dabei werden  $+$  und  $\lambda$ -mal erklärt durch Addition zweier **Repräsentanten** bzw. durch Multiplikation des Skalars  $\lambda$  mit einem Repräsentanten. Natürlich kann dabei immer derjenige Repräsentant gewählt werden, dessen Pfeil im Ursprung beginnt. Auf diese Weise sind  $V_2$  und  $\mathbf{R}^2$  zueinander algebraisch isomorph. Analoge Betrachtungen gelten für  $V_3$  und  $\mathbf{R}^3$ . *Ein Beispiel* für den hier vorliegenden Vektorraum ist der **physikalische Raum der Kräfte**:



Zur Beschreibung physikalischer Vektoren sind also  $+$  und  $\lambda$ -mal in genau passender Weise definiert.

**BSP. (4.2.4) Matrizen.**

**Definition 4.8** *Es sei  $\mathbf{K}$  ein Körper, und es seien  $m, n \geq 1$  natürliche Zahlen. Ein rechteckiges Skalarenschema*

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



mit **Koeffizienten**  $a_{jk} \in \mathbf{K}$  heie eine  $m \times n$ -**Matrix** **ber**  $\mathbf{K}$ . Dabei heie  $m$  die **Zeilenzahl** und  $n$  die **Spaltenzahl**. Matrizen  $A, B, C$  schreibt man häufig in Kurzform

$$A = \left( a_{jk} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} = (a_{jk}), \quad B = (b_{jk}), \quad C = (c_{jk}).$$

Dabei heie  $j$  der **Zeilenindex** und  $k$  der **Spaltenindex**,  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Mit  $\mathbf{K}^{(m,n)}$  wird die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen **ber**  $\mathbf{K}$  bezeichnet.

Zum Beispiel:  $A := \begin{bmatrix} 2 + 5i & 5 + 2i & 0 \\ 2 - 5i & 5 - 2i & -3i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{(2,3)}$  ist eine  $2 \times 3$ -Matrix **ber**  $\mathbf{C}$  mit Koeffizienten  $a_{11} = 2 + 5i$ ,  $a_{12} = 5 + 2i$  usw.

**Sonderfall:** Es gilt  $\mathbf{K}^{(n,1)} = \mathbf{K}^n$ . Mit Hilfe der Transposition "T" kann auch  $\mathbf{K}^{(1,n)}$  mit  $\mathbf{K}^n$  identifiziert werden:  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{(1,n)} \Leftrightarrow A^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbf{K}^n$ .

Um auf der Menge  $\mathbf{K}^{(m,n)}$  eine **Vektorraumstruktur** zu erklären, definieren wir die beiden folgenden algebraischen Operationen  $+$  und  $\lambda$ -mal

|                |     |                               |      |   |
|----------------|-----|-------------------------------|------|---|
| $+$            | $:$ | $A + B = (a_{jk}) + (b_{jk})$ | $:=$ | $(a_{jk} + b_{jk}) \quad \forall A, B \in \mathbf{K}^{(m,n)},$                                  |
| $\lambda$ -mal | $:$ | $\lambda A = \lambda(a_{jk})$ | $:=$ | $(\lambda a_{jk}) \quad \forall A \in \mathbf{K}^{(m,n)} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}.$ |

Wie bei den Vektoren werden hier Addition und  $\lambda$ -Multiplikation **elementweise** durchgeführt. Diese Operationen haben wieder die Eigenschaften (A.V1)–(A.V3) und (M.V1)–(M.V4); das heißt

|  |
|--|
| $(\mathbf{K}^{(m,n)}, +, \lambda\text{-mal})$ ist ein <b>Vektorraum</b> <b>ber</b> $\mathbf{K}$ . |
|--|

Zum Beispiel:  $A$  wie oben;  $B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4i \\ 1 & 3 & 2 - i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{(2,3)}$ ;

$$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 2 + 5i & 6 + 2i & -4i \\ 3 - 5i & 8 - 2i & 2 - 4i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{(2,3)}, \quad iA = \begin{bmatrix} -5 + 2i & -2 + 5i & 0 \\ 5 + 2i & 2 + 5i & 3 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{(2,3)}.$$

**BSP. (4.2.5)** **K-wertige Abbildungen.** Es seien eine beliebige Menge  $M \neq \emptyset$  und ein Körper  $\mathbf{K}$  gegeben. Die Menge aller Abbildungen  $f : M \rightarrow \mathbf{K}$  fassen wir zusammen zur Menge

$$\text{Abb}(M) := \{f \mid f : M \rightarrow \mathbf{K}\}.$$

Zum Beispiel: Für  $M := \mathbf{R}$  haben wir  $\sin, \cos, \exp \in \text{Abb}(\mathbf{R})$ .

Eine lineare Struktur auf  $\text{Abb}(M)$ , unter der  $(\text{Abb}(M), +, \lambda\text{-mal})$  zu einem Vektorraum **ber**  $\mathbf{K}$  wird, kann durch folgende Operationen definiert werden:

|                |     |                  |      |  |
|----------------|-----|------------------|------|--|
| $+$            | $:$ | $(f + g)(p)$     | $:=$ | $f(p) + g(p) \quad \forall f, g \in \text{Abb}(M) \quad \forall p \in M,$                                    |
| $\lambda$ -mal | $:$ | $(\lambda f)(p)$ | $:=$ | $\lambda f(p) \quad \forall f \in \text{Abb}(M) \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall p \in M.$ |

Hier werden Addition und  $\lambda$ -Multiplikation **argumentweise** durchgeführt. Vektorräume vom Typ  $\text{Abb}(M)$  heißen **Funktionsräume**.

**BSP. (4.2.6)** **Nullvektorraum.** Eine einelementige Menge  $\{e\}$  kann nur dann ein Vektorraum **ber**  $\mathbf{K}$  sein, wenn  $+$  und  $\lambda$ -mal wie folgt erklärt sind:

$$e + e := e, \quad \lambda e := e \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}.$$

Tatsächlich genügen diese Operationen den Rechenregeln (A.V1)–(A.V3) und (M.V1)–(M.V4). Für  $\lambda = 0$  ergibt sich insbesondere, dass  $e$  selbst der Nullvektor ist. Deshalb ist es sinnvoll, diesen Vektorraum mit  $\{\vec{0}\}$  oder  $O$  zu bezeichnen und ihn den **Nullvektorraum** zu nennen.

**BSP. (4.2.7)** Wir betrachten in  $\mathbf{K}^3$  die Teilmenge

$$U := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{K}^3 : x_1 + x_2 = 0\} \subset \mathbf{K}^3.$$

Auf der Menge  $U$  sind die algebraischen Operationen  $+$  und  $\lambda$ -mal wie auf  $\mathbf{K}^3$  erklärt. Es gilt offensichtlich  $\vec{x} \in U$  genau dann, wenn der Vektor  $\vec{x} \in \mathbf{K}^3$  die Form  $\vec{x} = (x_1, -x_1, x_3)^T$  hat. Wir zeigen nun, dass Addition und  $\lambda$ -Multiplikation nicht aus der Menge  $U$  hinausführen. Für  $\vec{x}, \vec{y} \in U$  und  $\lambda \in \mathbf{K}$  gilt nämlich:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ -x_1 - y_1 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} \in U, \quad \lambda \vec{x} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ -\lambda x_1 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix} \in U.$$

Man überzeugt sich schnell, dass in  $U$  wiederum die Vektorraumeigenschaften (A.V1)–(A.V3) und (M.V1)–(M.V4) gelten, so dass  $U$  selbst ein VR über  $\mathbf{K}$  ist.

## 4.3 Untervektorräume

In diesem Abschnitt wird mit  $\mathbf{K}$  stets ein Körper bezeichnet.

**Definition 4.9** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ . Eine Teilmenge  $\emptyset \neq U \subseteq V$  heie **Untervektorraum** von  $V$  (kurz: UR), wenn gilt:

$$\begin{array}{l} \text{(U1)} \quad \vec{u} + \vec{v} \in U \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U, \\ \text{(U2)} \quad \lambda \vec{u} \in U \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall \vec{u} \in U. \end{array}$$

**Bemerkung 4.4** (a) Der UR  $U$  ist als Unter algebra von  $(V, +, \lambda\text{-mal})$  zu verstehen; er trägt also stets die in  $V$  erklärten algebraischen Operationen  $+$  und  $\lambda$ -mal. Aus (U2) folgt  $\vec{0} \in U$ ; aus (U1) und (U2) ergibt sich, dass  $U$  **abgeschlossen** ist gegenüber  $+$  und  $\lambda$ -mal.

(b) In jedem Vektorraum  $V$  sind stets die **trivialen** Unterräume  $U = \{\vec{0}\}$  (kleinster UR) und  $U = V$  (größter UR) enthalten.  $\square$

**BSP. (4.3.1)** Es seien  $V := \mathbf{K}^n$  und  $U_k := \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T : x_j \in \mathbf{K}\} \subset \mathbf{K}^n$  mit  $1 \leq k \leq n$  gegeben. Dann ist  $U_k$  ein UR. Die Zuordnungsvorschrift

$$\mathbf{K}^k \ni (x_1, x_2, \dots, x_k)^T \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T \in U_k$$

induziert einen Isomorphismus zwischen  $U_k$  und  $\mathbf{K}^k$ , so dass  $U_k$  mit  $\mathbf{K}^k$  identifiziert werden kann. In dieser Weise ist jeder Vektorraum  $\mathbf{K}^k$  mit  $k \leq n$  ein UR des Vektorraums  $\mathbf{K}^n$ .

**BSP. (4.3.2)** Es sei  $\mathbf{K}_n[z] := \{P(z) : P(z) \text{ ist Polynom über } \mathbf{K} \text{ vom Grade höchstens } n\}$ . Dann ist jeder Vektorraum  $\mathbf{K}_m[z]$  mit  $m \leq n$  ein UR von  $\mathbf{K}_n[z]$ .

**BSP. (4.3.3)** Wir betrachten die Teilmenge von  $\mathbf{K}^{(3,3)}$

$$U := \left\{ A \in \mathbf{K}^{(3,3)} : A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, a_{jk} \in \mathbf{K} \right\}.$$

Dann ist  $U$  ein UR von  $\mathbf{K}^{(3,3)}$ .

**BSP. (4.3.4)** Es sei  $V$  ein VR über  $\mathbf{K}$ , und  $\vec{v} \in V$  sei fest gewählt. Die Menge

$$U := \text{span} \{ \vec{v} \} := \{ \lambda \vec{v} : \lambda \in \mathbf{K} \}$$

ist ein UR von  $V$ , und dieser heie **der von  $\vec{v}$  aufgespannte Unterraum** oder der **Spann** von  $\vec{v}$ .

**BSP. (4.3.5)** Es sei  $V$  ein VR über  $\mathbf{K}$ , und  $U_1, U_2$  seien zwei UR von  $V$ . Dann gilt:

$$U_1 \cap U_2 \text{ ist stets ein Unterraum von } V.$$

Es ist klar, wegen  $\vec{0} \in U_1 \cap U_2$  gilt  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Wir zeigen (U1) und (U2), und wählen dazu  $\vec{u}, \vec{v} \in U_1 \cap U_2$  sowie  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ . Dann gilt  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in U_j$ ,  $j = 1, 2$ , also auch  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in U_1 \cap U_2$ .

**BSP. (4.3.6) Gegenbeispiele.** (a) Sind  $U_1$  und  $U_2$  Unterräume von  $V$ , so ist  $U_1 \cup U_2$  i.a. **kein** UR, wie folgendes konkrete Beispiel belegt. Es seien  $V := \mathbf{R}^2$ ,  $U_1 := \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R} \}$  und  $U_2 := \{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbf{R} \}$  gesetzt. Wir haben  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1 \cup U_2$ , aber  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$ .

(b) Es sei  $U := \{ (x, y)^T \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0 \}$  Teilmenge des Vektorraumes  $\mathbf{R}^2$ . Dann ist  $U$  **kein** UR. Denn wegen  $(-1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \notin U \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$  ist (U2) verletzt.

(c) Wie vorher sei  $V := \mathbf{R}^2$ . Dann ist  $U := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2 > 0 \}$  die Kreislinie vom Radius  $r$  um den Mittelpunkt  $\vec{0}$ . Wegen  $\vec{0} \notin U$  ist auch  $U$  **kein** UR von  $\mathbf{R}^2$ .

**Definition 4.10** Gegeben sei ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$ . Fur nichtleere Teilmengen  $U_1, U_2 \subseteq V$  heie

$$U_1 + U_2 := \{ \vec{u} \in V : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ mit } \vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2 \}$$

die **Summe** von  $U_1$  und  $U_2$ .

**Satz 4.4** Sind  $U_1, U_2$  zwei Unterräume des Vektorraums  $V$ , so ist auch die Summe  $U_1 + U_2$  ein UR von  $V$ .

*Begründung:* Es ist klar, wegen  $\vec{0} \in U_1 + U_2$  gilt  $U_1 + U_2 \neq \emptyset$ . Wir zeigen (U1) und (U2), und wählen dazu  $\vec{u}, \vec{v} \in U_1 + U_2$  sowie  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ . Dann gilt  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  und  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . Hieraus folgt

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \underbrace{(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{v}_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(\lambda \vec{u}_2 + \mu \vec{v}_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2.$$

Fur  $\lambda = \mu = 1$  erhalten wir (U1), und fur  $\mu = 0$  resultiert (U2). □

**Bemerkung 4.5** Sind  $U_1, U_2$  Unterräume des Vektorraums  $V$  mit  $U_1 \cap U_2 = \{ \vec{0} \}$ , so ist die **Zerlegung**

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in U_1 + U_2$$

**eindeutig**. In der Tat, wäre  $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in U_1 + U_2$  eine weitere Zerlegung, so wäre nämlich  $\vec{0} = \vec{u} - \vec{u} = (\vec{u}_1 - \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 - \vec{v}_2)$ , also

$$\underbrace{(\vec{u}_1 - \vec{v}_1)}_{\in U_1} = \underbrace{(\vec{v}_2 - \vec{u}_2)}_{\in U_2} \in U_1 \cap U_2 = \{ \vec{0} \}.$$

Das heißt,  $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$  und  $\vec{u}_2 = \vec{v}_2$ . □

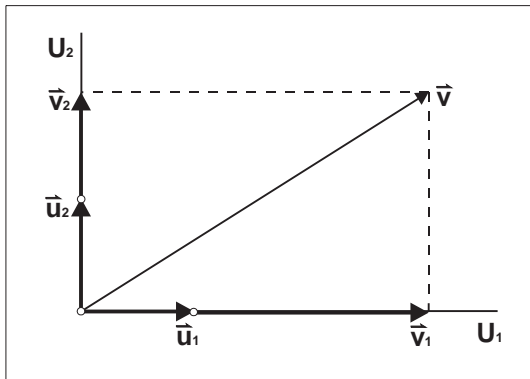
**Definition 4.11** Sind  $U_1, U_2$  zwei Unterräume des Vektorraums  $V$ , so heie die Summe  $U_1 + U_2$  **direkt**, falls gilt:  $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ .

$$U_1 \oplus U_2 := U_1 + U_2 \text{ mit } U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}.$$

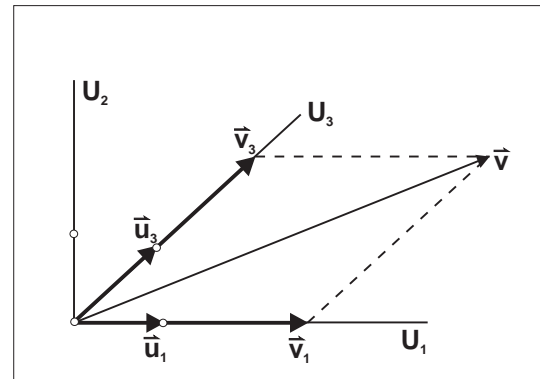
Ist speziell  $V = U_1 \oplus U_2$ , so heie  $U_1 \oplus U_2$  die **direkte Zerlegung** von  $V$  in die **Komponenten**  $U_1$  und  $U_2$ .

**BSP. (4.3.7)** (a) Es gelte  $V := \mathbf{R}^2$ , und es sei  $\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sowie  $\vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  gesetzt. Dann gilt fur  $U_j := \text{span}\{\vec{u}_j\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ :

$$\mathbf{R}^2 = U_1 \oplus U_2, \quad \mathbf{R}^2 = U_1 \oplus U_3, \quad \mathbf{R}^2 = U_2 \oplus U_3.$$



Direkte Zerlegung  $\mathbf{R}^2 = U_1 \oplus U_2$



Direkte Zerlegung  $\mathbf{R}^2 = U_1 \oplus U_3$

(b) Eine analoge Konstruktion gilt auch fur den Vektorraum  $V := \mathbf{R}^n$ : Setzt man

$$\vec{u}_j := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)^T, \quad U_j := \text{span}\{\vec{u}_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

so gilt

$$\mathbf{R}^n = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n.$$

## 4.4 Lineare Abhangigkeit

In diesem Abschnitt ist  $\mathbf{K}$  ein Korper und  $V$  ein Vektorraum uber  $\mathbf{K}$ . Es seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  feste Vektoren. Aus den Rechenregeln der Addition und der  $\lambda$ -Multiplikation in  $V$  folgt dann, dass stets auch

$$\vec{v} := \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{v}_k \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$$

ein Element von  $V$  ist.

**Definition 4.12** Ein Vektor  $\vec{v} \in V$ , der sich in der folgenden Form schreiben lasst:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{v}_k \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K} \text{ und } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V,$$

heie **Linearkombination (LK)** von  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ . Die Skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  heißen **Koeffizienten** der LK. Im Falle  $m = 1$  heie  $\vec{v}$  **skalares Vielfaches** von  $\vec{v}_1$ .

**BSP. (4.4.1)**

(a) Es sei  $V := \mathbf{R}^4$  gesetzt. Aus

$$5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=: \vec{v}_1} - 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=: \vec{v}_2} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=: \vec{v}_3} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=: \vec{v}_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} =: \vec{v}$$

folgt, dass  $\vec{v}$  eine LK der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$  mit Koeffizienten  $5, -2, 3, -1$  ist.

(b) Es sei  $V := \mathbf{K}^n$ . Bezeichnet  $1$  das Einselement der Multiplikation in  $\mathbf{K}$ , so setzen wir:

$$\vec{e}_j := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)^T \in V, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Dann folgt:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in V \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}.$$

Das heißt, jeder Skalarenvektor  $\vec{v} \in \mathbf{K}^n$  kann als LK der **Einheitsvektoren**  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  dargestellt werden.

(c) Es sei  $V := \mathbf{C}^{(2,2)}$  gesetzt, und es seien  $A_1 := \begin{bmatrix} 2 & 4i \\ 3 & 6-i \end{bmatrix}$  sowie  $A_2 := \begin{bmatrix} 5-2i & i \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$  gegeben.

Dann folgt

$$i A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -4+i \\ -10+3i & 3+6i \end{bmatrix} =: B \in \mathbf{C}^{(2,2)}.$$

Das heißt, die Matrix  $B$  ist LK der beiden Matrizen  $A_1, A_2$  mit den Koeffizienten  $i, 1$ .

(d) Es sei  $V := \mathbf{K}_n[z] = \{P(z) : P(z) \text{ ist Polynom über } \mathbf{K} \text{ vom Grade höchstens } n\}$ . Wir folgern:  $P_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$  ist LK der **Monome**  $1, z, z^2, \dots, z^n \in V$ .

Werden mit einem fixierten Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  alle möglichen Linearkombinationen konstruiert, so ergibt sich ein Unterraum  $U$  von  $V$ . Denn mit

$$\vec{v} := \sum_{k=1}^m \alpha_k \vec{v}_k, \quad \vec{w} := \sum_{k=1}^m \beta_k \vec{v}_k, \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{K},$$

sind auch

$$\vec{v} + \vec{w} = \sum_{k=1}^m (\alpha_k + \beta_k) \vec{v}_k, \quad \lambda \vec{v} := \sum_{k=1}^m (\lambda \alpha_k) \vec{v}_k$$

weitere LK des Systems  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$ . Es gelten also in  $U$  die Unterraumaxiome (U1) und (U2).

**Satz 4.5** Gegeben sei ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$  und darin ein Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$ . Dann bildet die Menge aller LK der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  einen Unterraum  $U \subseteq V$ . Dieser heie die **lineare Hülle** der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  oder der von  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  **aufgespannte Unterraum** oder kurz der **Spann** der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ :

$$U = \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \} := \left\{ \vec{v} \in V : \vec{v} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{v}_k, \lambda_j \in \mathbf{K} \right\}.$$

(Manchmal setzt man auch  $U = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \rangle$ .)

**BSP. (4.4.2)** (a) In  $V := \mathbf{K}^n$  seien die **Einheitsvektoren**  $\vec{e}_j \in V$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , wie in BSP. (4.4.1(b)) erklärt. Dann gilt ganz offensichtlich

$$\mathbf{K}^n = \text{span} \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \}.$$

Zum Beispiel hat man für  $n = 2$ :  $\mathbf{R}^2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$ , denn jeder der Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  ist selbst eine LK der beiden Einheitsvektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

(b) In  $V := \mathbf{R}^3$  definieren wir

$$U := \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subsetneq \mathbf{R}^3.$$

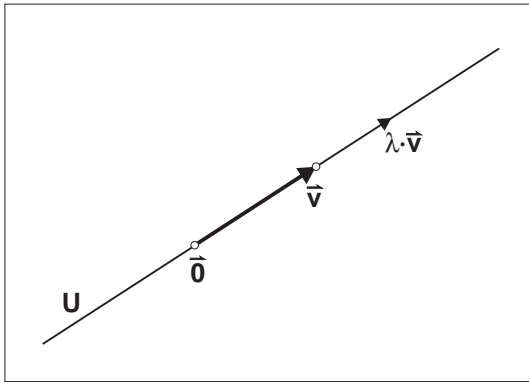
Die Vektoren  $(1, 1, 1)^T$  und  $(1, -1, 1)^T$  sind LK der Vektoren  $(1, 0, 1)^T$  und  $(0, 1, 0)^T$ . Der Vektor  $(0, 0, 1)^T \in \mathbf{R}^3$  gehört nicht zu  $U$ . Die LK

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

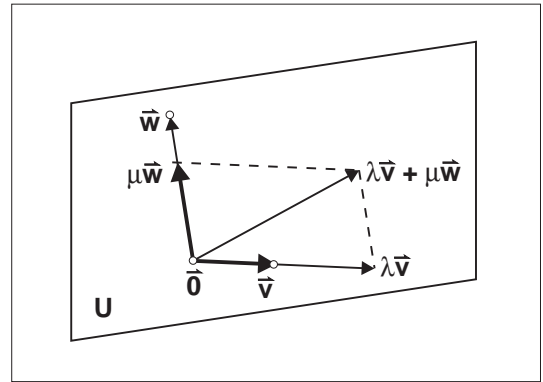
führt auf die widersprüchliche Bedingung  $0 = \lambda = 1$ .

(c) Es sei  $V$  ein beliebiger VR über  $\mathbf{K}$ . Ferner seien Vektoren  $\vec{0} \neq \vec{v} \in V$  und  $V \ni \vec{w} \notin \text{span} \{ \vec{v} \}$  fixiert. Dann heie

$$\begin{array}{ll} U := \text{span} \{ \vec{v} \} & \text{Gerade in } V \text{ durch } \vec{0}, \\ U := \text{span} \{ \vec{v}, \vec{w} \} & \text{Ebene in } V \text{ durch } \vec{0}. \end{array}$$



Gerade durch  $\vec{0}$



Ebene durch  $\vec{0}$

Im Sonderfall  $\vec{v} := \vec{0} \in V$  erhalten wir den Nullvektorraum  $U = \text{span} \{ \vec{0} \} = O$ .

(d)  $\mathbf{K}_n[z] := \{ P(z) : P(z) \text{ ist Polynom über } \mathbf{K} \text{ vom Grade höchstens } n \} = \text{span} \{ 1, z, z^2, \dots, z^n \}$ .

**Problemstellung:** Es seien ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$  und ein Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  gegeben.

(A) Wann gilt für ein  $\vec{v} \in V$  auch  $\vec{v} \in \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \}$  ?

(B) Falls  $\vec{v} \in \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \}$  gilt, gibt es eine oder mehrere LK für  $\vec{v}$ ?

Wir behandeln zunächst das Problem (B) der **Eindeutigkeit**. Dazu sei angenommen, es wären

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{v}_k, \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^m \mu_k \vec{v}_k, \quad \lambda_j \neq \mu_j \quad \text{für mindestens ein } j$$

zwei LK für  $\vec{v} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ . Dann folgt

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \sum_{k=1}^m (\lambda_k - \mu_k) \vec{v}_k,$$

und dies ist eine **nichttriviale Darstellung** des Nullvektors.

**Definition 4.13** Ein Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  heie **linear unabhängig (LU)** genau dann, wenn jeder Vektor  $\vec{v} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  genau eine LK aus den Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  besitzt. Andernfalls heie das System  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  **linear abhängig (LA)**.

**Satz 4.6** Gegeben seien ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$  und ein Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$ . Dann gilt:

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  sind LU  $\Leftrightarrow$  Aus  $\vec{0} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{v}_k$  folgt stets  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ . Das heißt, es existiert nur die **triviale Darstellung** des Nullvektors.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  sind LA  $\Leftrightarrow$  In  $\vec{0} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{v}_k$  sind nicht sämtliche  $\lambda_j$  gleich Null. Das heißt, es existiert eine **nichttriviale Darstellung** des Nullvektors.

**BSP. (4.4.3)** (a) In  $V := \mathbf{R}^2$  sind  $\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  linear abhängig, denn es gilt  $\vec{0} = -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$ .

(b) In  $V := \mathbf{K}^n$  seien die Einheitsvektoren  $\vec{e}_j := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)^T \in V, j = 1, 2, \dots, n$ , wie vorher eingeführt. Offenbar gilt

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{e}_k = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$$

genau für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ . Das heißt, die Vektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  sind LU. Wir hatten bereits  $\mathbf{K}^n = \text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  gezeigt.

(c) Der Körper  $\mathbf{K}$  sei nicht endlich. In  $\mathbf{K}_n[z] := \{P(z) : P(z) \text{ ist Polynom über } \mathbf{K} \text{ vom Grade höchstens } n\}$  setzen wir  $p_j(z) := z^j \in \mathbf{K}_n[z], j = 1, 2, \dots, n$ . Wäre

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbf{K}$$

und wären nicht alle  $\lambda_j$  gleich Null, so wäre  $P_n(z)$  ein Polynom vom Grade höchstens  $n$  mit mehr als  $n$  Nullstellen. Dies widerspricht der Aussage von Satz 2.11(b). Also ist  $P_n(z)$  das Nullpolynom, und das System  $1, z, z^2, \dots, z^n$  ist LU für jede Wahl von  $n \in \mathbf{N}$ .

(d) Jeder Vektor  $\vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}$ , ist LU. Für je zwei Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  ist das System  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  LA, denn es gilt ja  $1\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 - 1(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{0}$ .

In  $V := \mathbf{K}^n$  reduziert sich das Nachprüfen der linearen Unabhängigkeit eines Vektorsystems  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbf{K}^n$  auf das Lösen eines **homogenen linearen Gleichungssystems** mit  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten.

Zum Beispiel prüfen wir in  $V := \mathbf{R}^3$  die lineare Unabhängigkeit des Systems  $\vec{v}_1 := (1, 1, 1)^T, \vec{v}_2 := (1, 1, 2)^T, \vec{v}_3 := (2, 1, 1)^T$ :

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \vec{v}_k \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{LG})$$

Wir führen beim Aufschreiben des zugeordneten Zahlenschemas die elementaren Umformungen  $Z_2 - Z_1 \Rightarrow Z_2$  und  $Z_3 - Z_1 \Rightarrow Z_3$  durch:

$$\left. \begin{array}{ccc|c} & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{Z_2 \Leftrightarrow Z_3} \\ \text{S-System, Typ (I)} \\ \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{array}$$

Also ist das System  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  LU.

Bei der obigen Rechnung ist es unerheblich, ob die Nullen auf der rechten Seite mitgeführt werden oder nicht. Wir sehen ferner, dass in (LG) die Komponenten des Vektors  $\vec{v}_j$  die Koeffizienten der  $j$ -ten Spalte bilden. Mit dieser Erkenntnis ergibt sich in  $\mathbf{K}^n$  das folgende **Prüfverfahren auf lineare Unabhängigkeit**:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \mid \vec{0}) \xrightarrow{\text{Gauss-Schritte}} \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|ccc} * & & & & & 0 \\ & * & & & & 0 \\ & & * & & & 0 \\ & & & * & & 0 \\ & & & & * & 0 \\ & & & & & * \\ O & & & & & \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{S-System, Typ (I)} \\ \Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \text{ LU} \end{array} \\ \hline \left( \begin{array}{ccc|ccc} * & & & & & 0 \\ & * & & & & 0 \\ & & * & & & 0 \\ & & & * & & 0 \\ & & & & * & f \\ & & & & & 0 \\ O & & & & & \end{array} \right) & \begin{array}{l} \text{S-System, Typ (II)} \\ \Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \text{ LA} \end{array} \end{array} \right.$$

**BSP. (4.4.4)** Es seien in  $V := \mathbf{R}^4$  die Vektoren  $\vec{v}_1 := (1, 0, -2, 1)^T$ ,  $\vec{v}_2 := (-1, 1, 0, 1)^T$ ,  $\vec{v}_3 := (0, a, 4, -4)^T$  mit  $a \in \mathbf{R}$  gegeben. Wir führen beim Aufschreiben des zugeordneten Zahlenschemas die elementaren Umformungen  $Z_3 + 2Z_1 \Rightarrow Z_3$  und  $Z_4 - Z_1 \Rightarrow Z_4$  durch:

$$\left. \begin{array}{ccc|c} & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 1 & a \\ & 0 & -2 & 4 \\ & 0 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a & \\ 0 & 0 & 4+2a & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \begin{cases} \text{LU für } a \neq -2, \\ \text{LA für } a = -2. \end{cases}$$

Wir können in  $\mathbf{K}^n$  nun auch mit Hilfe eines ähnlichen Prüfverfahrens das obige **Problem (A)** lösen. Es gilt offenbar  $\vec{v} \in U := \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  genau dann, wenn das **inhomogene**



Gleichungssystem  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \mid \vec{v})$  **lösbar** ist:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \mid \vec{v}) \xrightarrow{\text{Gau\ss}} \left( \begin{array}{ccc|c} * & & & d_1 \\ & * & & d_2 \\ & & * & d_3 \\ & & & \vdots \\ O & & & d_n \end{array} \right) \text{ S-System } \left\{ \begin{array}{l} \text{Typ (I)} : \vec{v} \in U, \\ \text{Typ (II)} : \vec{v} \in U, \\ \text{Typ (III)} : \vec{v} \notin U. \end{array} \right.$$

Darüber hinaus erfährt man gleichzeitig, ob das Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  **linear unabhängig** (Typ (I)) oder **linear abhängig** (Typ (II)) ist.

**BSP. (4.4.5)** Es seien in  $V := \mathbf{K}^4$  die Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  wie in BSP. (4.4.4) erklärt, und es sei  $\vec{v} := (b, 1, 1, 0)^T$  mit  $b \in \mathbf{R}$  gegeben.

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \mid \vec{v}) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1+2b \\ 0 & 2 & -4 & -b \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4+2a & 3+2b \\ 0 & 0 & 0 & 1+b \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Typ (III) für } a = -2 \text{ oder } b \neq -1, \\ \text{Typ (I) für } a \neq -2 \text{ und } b = -1. \end{array} \right.$$

$\left. \begin{array}{l} Z_4 + Z_3 \Rightarrow Z_4 \\ Z_3 + 2Z_2 \Rightarrow Z_3 \end{array} \right\}$

Also folgt  $\vec{v} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  genau für  $a \neq -2$  und  $b = -1$ .

**BSP. (4.4.6)** Auch in dem Vektorraum  $V := \mathbf{K}^{(m,n)}$  führen die Problemstellungen (A) und (B) stets auf lineare Gleichungssysteme. Es ist *zum Beispiel* in  $V := \mathbf{R}^{(2,2)}$  das Problem (B), nämlich

$$\lambda_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A} + \lambda_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{=:B} + \lambda_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:C} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

äquivalent mit der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 = 0, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Wir erhalten hier die **lineare Unabhängigkeit** der Matrizen  $A, B, C$ .

Wir fassen in dem folgenden Satz einige offensichtliche Folgerungen aus der Definition der linearen Unabhängigkeit zusammen:

**Satz 4.7** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ , und es sei  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  ein Vektorsystem.*

- (a) *Das Vektorsystem  $\vec{0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  ist stets LA.*
- (b) *Sind  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  LU, so gilt dies auch für das System  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{m-1}$ . (Erhalt der LU bei **Verkürzung**.)*
- (c) *Sind  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  LA, so gilt dies auch für das System  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{v} \forall \vec{v} \in V$ . (Erhalt der LA bei **Verlängerung**.)*

**Folgerung.** Im Vektorraum  $V := \mathbf{K}^n$  sind  $n + 1$  Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n+1}$  stets LA. Denn in dem homogenen linearen Gleichungssystem  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n+1} \mid \vec{0})$  ist die Anzahl  $n + 1$  der Spalten größer als die Anzahl  $n$  der Zeilen. In diesem Fall kann das Staffelsystem niemals vom Typ (I) sein.

**Bemerkung 4.6** Zwei Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  sind genau dann linear abhängig, wenn Skalare  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$  existieren mit  $\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$  und  $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ . Das heißt, es gibt Zahlen  $\mu_1 \neq 0 \neq \mu_2$  mit

$$\vec{v}_2 = \mu_1 \vec{v}_1, \quad \vec{v}_1 = \mu_2 \vec{v}_2.$$

Allgemeiner gilt das folgende Resultat: □

**Satz 4.8** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ . Ein Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$ ,  $m \geq 2$ , ist genau dann LA, wenn ein Index  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  existiert mit*

$$\vec{v}_j \in \text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \dots, \vec{v}_m \}.$$

Hat man in  $V$  zwei Vektorsysteme  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  und  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{m+1}$ , welche jedes für sich LU sind, so gibt es einen Index  $j \in \{1, 2, \dots, m+1\}$  derart, dass auch das Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{w}_j$  LU ist. Andernfalls hätten wir  $\vec{w}_j \in \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \} \forall j = 1, 2, \dots, m+1$ . Das heißt, es wäre

$$\vec{w}_j = \sum_{k=1}^m \lambda_{kj} \vec{v}_k \quad \forall j = 1, 2, \dots, m+1, \quad \text{und nicht alle } \lambda_{kj} \text{ sind Null.}$$

Es folgte beim Test auf LU wegen der linearen Unabhängigkeit des Systems  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ :

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{m+1} x_j \vec{w}_j = \sum_{k=1}^m \vec{v}_k \left( \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_{kj} x_j \right) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_{kj} x_j = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.1)$$

Setzen wir  $\vec{\lambda}_j := (\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \dots, \lambda_{mj})^T \in \mathbf{K}^m$ , so resultiert äquivalent das homogene lineare Gleichungssystem  $(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \dots, \vec{\lambda}_{m+1} \mid \vec{0})$ , dessen Spaltenanzahl  $m+1$  größer ist als die Anzahl  $m$  der Zeilen. Daher ist das Vektorsystem  $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \dots, \vec{\lambda}_{m+1} \in \mathbf{K}^m$  **linear abhängig**, und nicht alle Skalare  $x_j$  in Gleichung (4.1) sind Null. Dies bedeutet aber die lineare Abhängigkeit des Vektorsystems  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{m+1}$ , was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Als Folgerung finden wir:

**Satz 4.9 (Austauschsatz)**

*Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ , und es seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  sowie  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{m+l} \in V$ ,  $l \geq 1$ , zwei linear unabhängige Vektorsysteme. Dann gibt es paarweise verschiedene Indizes  $j_1, j_2, \dots, j_l \in \{1, 2, \dots, m+l\}$  derart, dass das Vektorsystem*

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{w}_{j_1}, \dots, \vec{w}_{j_l}$$

*linear unabhängig ist.*

**BSP. (4.4.7)** In  $V := \mathbf{R}^4$  seien  $\vec{v}_1 := (1, 1, 1, 0)^T$ ,  $\vec{v}_2 := (0, 1, 1, 0)^T$  sowie  $\vec{w}_1 := (1, 0, 0, 0)^T$ ,  $\vec{w}_2 := (0, 1, 0, 0)^T$ ,  $\vec{w}_3 := (0, 0, 1, 0)^T$ ,  $\vec{w}_4 := (0, 0, 0, 1)^T$  gegeben. Dann sind die beiden Vektorsysteme  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$  jedes für sich linear unabhängig. Man überzeugt sich durch einfache Rechnung, dass auch die Vektorsysteme

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_2, \vec{w}_4 \quad \text{sowie} \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$$

jedes für sich LU sind. Hingegen sind die Vektorsysteme

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1 \quad \text{und} \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_2, \vec{w}_3$$

jedes für sich LA. Dieses Beispiel zeigt, dass die **Ergänzungsvektoren**  $\vec{w}_{j_1}, \dots, \vec{w}_{j_l}$  im Austauschsatz i.a. **nicht eindeutig** festgelegt sind.

## 4.5 Dimension und Basis

Wir betrachten hier wiederum einen beliebigen Körper  $\mathbf{K}$ .

**Definition 4.14** (a) *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ . Ein Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  heie **Basis von  $V$  der Länge  $n$** , wenn gilt:*

$$\boxed{\text{(B1) } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \text{ ist LU, \quad (B2) } V = \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}.}$$

Die zu jedem  $\vec{v} \in V$  eindeutig bestimmten Skalare  $\lambda_j \in \mathbf{K}$  mit  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k$  heißen die **Komponenten von  $\vec{v}$  in der Basis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$** .

(b) *Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$  hat die (**endliche**) **Dimension  $n$** , wenn in  $V$  eine Basis der Länge  $n$  existiert. In diesem Fall schreibt man*

$$\boxed{n = \dim V < \infty.}$$

Insbesondere ordnet man dem Nullvektorraum die Dimension 0 zu.

Die Dimension  $\dim V = n$  eines Vektorraumes  $V$  ist **eindeutig** festgelegt. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 4.10** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ . Ferner seien  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  und  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n+l}$ ,  $l \geq 0$ , zwei Basen von  $V$ . Dann gilt stets  $l = 0$ .*

*Begründung:* Wegen  $V = \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$  gilt  $\vec{w}_j \in \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} \forall j = 1, 2, \dots, n+l$ . Wäre  $l > 0$ , so wäre das Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{w}_{j_1}, \dots, \vec{w}_{j_l}$  wegen Satz 4.9 linear unabhängig, im Widerspruch zu  $\vec{w}_{j_k} \in \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$ .  $\square$

**BSP. (4.5.1)** **Standardbasis.** Es bezeichne 1 das neutrale Element der Multiplikation in  $\mathbf{K}$ . Dann bilden die Einheitsvektoren  $\vec{e}_j$  in  $V := \mathbf{K}^n$  eine Basis:

$$\boxed{\vec{e}_j := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{K}^n, j = 1, 2, \dots, n.}$$

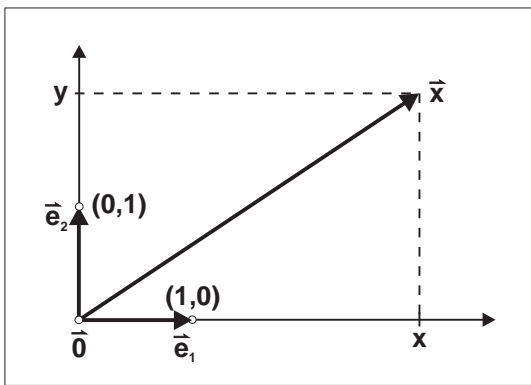
**Satz 4.11** *Es gilt  $\dim \mathbf{K}^n = n$ . Das obige System der Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ist eine **Basis von  $\mathbf{K}^n$** . Diese Basis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  heiße die **Standardbasis von  $\mathbf{K}^n$** . Jeder Vektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{K}^n$  hat in der Standardbasis die Darstellung*

$$\boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k.}$$

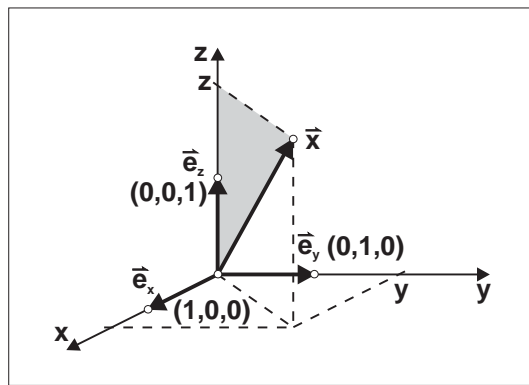
Das heißt, die Komponenten von  $\vec{x}$  in der Standardbasis sind gerade die Skalare  $x_k \in \mathbf{K}$ .

**BSP. (4.5.2)** **CARTESISCHE BASIS.** In der Standardveranschaulichung der Vektorräume  $\mathbf{R}^2$  und  $\mathbf{R}^3$  durch  $A_2$  bzw.  $A_3$  werden im Ursprung  $O$  aufeinander senkrechte **Koordinatenachsen** eingeführt. Für die Standardbasis führt man **neue Notationen** ein, nämlich:

$$\vec{e}_x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_y := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{R}^2 \text{ und } \vec{e}_x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_y := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_z := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{R}^3.$$



CARTESISCHE BASIS DES  $\mathbf{R}^2$



CARTESISCHE BASIS DES  $\mathbf{R}^3$

In  $A_2$  schließen die **Basisvektoren**  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  einen rechten Winkel ein; in  $A_3$  stehen  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  **paarweise senkrecht** aufeinander und bilden ein **Rechtssystem**: Die positiven  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtungen können durch Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der **rechten** Hand wiedergegeben werden, (und zwar in dieser Reihenfolge). Andere übliche Bezeichnungen sind

$$\vec{i} := \vec{e}_x = \vec{e}_1, \quad \vec{j} := \vec{e}_y = \vec{e}_2, \quad \vec{k} := \vec{e}_z = \vec{e}_3.$$

Die Vektoren der CARTESISCHEN BASIS haben stets die (EUKLIDISCHE) Länge 1. Es gilt

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3.$$

**BSP. (4.5.3)**

(a) Im Vektorraum  $V := \mathbf{K}^{(m,n)}$  bilden die  $m \times n$ -Matrizen

$$A_{jk} := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1_{jk} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

eine Basis. Der einzige nichtverschwindende Koeffizient  $1_{jk} := 1$  steht in der  $j$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte. Es gibt genau  $m \cdot n$  verschiedene Matrizen  $A_{jk}$ , so dass  $\dim \mathbf{K}^{(m,n)} = m \cdot n$  folgt.

(b) Der Körper  $\mathbf{K}$  sei nicht endlich. Im Vektorraum  $\mathbf{K}_n[z] := \{P(z) : P(z) \text{ ist Polynom über } \mathbf{K} \text{ vom Grade höchstens } n\}$  bilden die **Monome**  $1, z, z^2, \dots, z^n$  eine Basis. Also folgt  $\dim \mathbf{K}_n[z] = n + 1$ .

(c) Wie vorher sei  $\mathbf{K}$  kein endlicher Körper. Im Vektorraum  $\mathbf{K}[z] := \{\text{alle Polynome über } \mathbf{K}\}$  existieren linear unabhängige Vektorsysteme  $1, z, z^2, \dots$  beliebiger Länge. Eine **endliche** Basis gibt es nicht. Wir setzen  $\dim \mathbf{K}[z] = \infty$ .

**Definition 4.15** Ein Vektorraum  $V$ , der keine endliche Dimension besitzt, heißt **unendlich dimensional**.

**Bemerkung 4.7** (a) Jeder Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$  mit  $\dim V = n < \infty$  hat eine Basis. Das folgt aus der Definition der Dimension.

(b) Eine Basis in  $V$  ist **nicht eindeutig** bestimmt. Zum Beispiel ist mit  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  auch  $\lambda_1 \vec{v}_1, \lambda_2 \vec{v}_2, \dots, \lambda_n \vec{v}_n$  eine Basis von  $V$ , solange  $\lambda_j \neq 0$  gilt. Ist  $\dim V = n < \infty$ , so haben

jedoch alle Basen von  $V$  **genau  $n$  linear unabhängige Vektoren** (Satz 4.10). Jedes Vektorsystem in  $V$  mit mehr als  $n$  Vektoren ist LA.

(c) Ist  $\dim V = n < \infty$  und ist das Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$ ,  $m < n$ , bereits LU, so gibt es Vektoren  $\vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_n \in V$  derart, dass das **ergänzte** System  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  eine Basis von  $V$  ist. Denn wählen wir eine Basis  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n \in V$ , so können gemäß Satz 4.9 Indizes  $j_1, j_2, \dots, j_{n-m} \in \{1, 2, \dots, n\}$  so bestimmt werden, dass das Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{w}_{j_1}, \dots, \vec{w}_{j_{n-m}}$  linear unabhängig ist. Man setzt nun  $\vec{v}_{m+1} := \vec{w}_{j_1}, \dots, \vec{v}_n := \vec{w}_{j_{n-m}}$ .  $\square$

#### Satz 4.12 (Basisergänzungssatz)

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$  mit  $\dim V = n < \infty$ .

(a) Ist das Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  mit  $m < n$  LU, so existieren Vektoren  $\vec{v}_{m+1}, \vec{v}_{m+2}, \dots, \vec{v}_n \in V$  derart, dass das System  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  eine Basis von  $V$  ist.

(b) Ist  $U_1 \subset V$  ein UR mit  $\dim U_1 = m < n$ , so existiert ein weiterer UR  $U_2 \subset V$  mit  $\dim U_2 = n - m$  derart, dass  $V = U_1 \oplus U_2$  gilt.

*Begründung:* Im Falle (a) ist nichts zu beweisen. Im Falle (b) sei  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in U_1 \subset V$  eine Basis von  $U_1$ . Dann wählen wir eine *Basisergänzung*  $\vec{v}_{m+1}, \vec{v}_{m+2}, \dots, \vec{v}_n \in V$  wie in (a). Der UR  $U_2 := \text{span}\{\vec{v}_{m+1}, \vec{v}_{m+2}, \dots, \vec{v}_n\}$  leistet nun das Verlangte.  $\square$

**Bemerkung 4.8** (a) Für endlichdimensionale Unterräume  $U_1, U_2 \subseteq V$  mit **direkter** Summe gilt stets

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

(b) Falls  $\dim V = n < \infty$  vorliegt, so gilt für **jeden** Unterraum  $U \subseteq V$ :

$$\dim U \leq n = \dim V.$$

(c) Es seien  $U_1, U_2$  endlichdimensionale UR eines Vektorraumes  $V$ . Setzen wir  $D := U_1 \cap U_2$ , so ist  $D$  ein UR sowohl von  $U_1$  als auch von  $U_2$ . Wegen Satz 4.12(b) gibt es Unterräume  $D_1 \subseteq U_1$  und  $D_2 \subseteq U_2$  mit  $D \oplus D_1 = U_1$  und  $D \oplus D_2 = U_2$ . Aus dem Ergebnis (a) folgern wir:

$$\dim U_1 + \dim U_2 = 2 \dim D + \dim D_1 + \dim D_2. \quad (5.1)$$

Andererseits zeigt man mit etwas mehr Aufwand  $U_1 + U_2 = D \oplus D_1 \oplus D_2$ , so dass wiederum nach (a) folgt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim D + \dim D_1 + \dim D_2. \quad (5.2)$$

Durch Subtraktion von (5.1) und (5.2) erhalten wir somit:  $\square$

#### Satz 4.13 (Dimensionssatz für Unterräume)

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ . Es seien  $U_1, U_2 \subseteq V$  **endlichdimensionale** Unterräume. Dann gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Wir befassen uns nun mit dem **Problem der Bestimmung einer Basis** für den Unterraum  $U := \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\} \subset \mathbf{K}^n$ . Dieses Problem hat natürlich die triviale Lösung  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ , falls das Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  LU ist. Im Falle der **linearen Abhängigkeit** ist es weder offensichtlich, welche Vektoren eine Basis bilden, noch ist es klar, wie groß  $\dim U$  ist. Zur Behandlung beider Fragen definieren wir:

**Definition 4.16 Elementare Umformungen** eines Vektorsystems  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  in einem Vektorraum  $V$  sind:

(A) Vertauschung zweier Vektoren:  $\vec{v}_j \Leftrightarrow \vec{v}_k$ .

(B) Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$ :  $\lambda \vec{v}_j \Rightarrow \vec{v}_j$ .

(C) Addition von  $\lambda \vec{v}_k$ ,  $\lambda \in \mathbf{K}$ , zu einem Vektor  $\vec{v}_j$ :  $\vec{v}_j + \lambda \vec{v}_k \Rightarrow \vec{v}_j$ .

Die folgende Aussage ist nun offensichtlich, da elementare Umformungen nichts anderes als Linearkombinationen innerhalb des gegebenen Vektorsystems sind:

**Satz 4.14** Unter den elementaren Umformungen (A), (B), (C) eines Vektorsystems  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  verändert sich  $U := \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$  **nicht**.

**Bemerkung 4.9** (a) Im Vektorraum  $V := \mathbf{K}^n$  können die **transponierten** Vektoren  $\vec{v}_1^T, \vec{v}_2^T, \dots, \vec{v}_m^T \in \mathbf{K}^n$  als **Zeilen** einer Matrix

$$A^T := \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vdots \\ \vec{v}_m^T \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{(m,n)}$$

interpretiert werden. **Elementare Umformungen des Vektorsystems  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  entsprechen nun den elementaren Zeilenumformungen der Matrix  $A^T$ .**

(b) Wir bringen die Matrix  $A^T$  durch GAUSS-Schritte in eine Staffelform:

$$A^T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vdots \\ \vec{v}_m^T \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Schritte}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & & \\ \hline * & | & f_1 \\ \hline & * & | & f_2 \\ \hline & & * & | & f_3 \\ \hline & & & & O \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} =: \vec{u}_1^T \\ =: \vec{u}_2^T \\ =: \vec{u}_k^T \end{array} \quad \boxed{\text{S-System, Typ (I) oder Typ (II).}}$$

Die nichtverschwindenden Zeilenvektoren  $\vec{u}_1^T, \vec{u}_2^T, \dots, \vec{u}_k^T \in \mathbf{K}^n$  bilden ein linear unabhängiges Vektorsystem  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ , und es gilt

$$\boxed{U = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}.}$$

Das heißt, das System  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$  ist die gesuchte **Basis** des Unterraumes  $U = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ , und es gilt  $\dim U = k$ .  $\square$

**BSP. (4.5.4)** In  $V := \mathbf{R}^4$  sei das Vektorsystem  $\vec{v}_1 := (2, 5, 4, 2)^T, \vec{v}_2 := (1, 4, 2, 1)^T, \vec{v}_3 := (-1, -1, -2, -1)^T, \vec{v}_4 := (1, 3, 2, 0)^T$  gegeben. Man bestimme eine Basis für  $U := \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ .

Lösung:

$$A^T := \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vec{v}_3^T \\ \vec{v}_4^T \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 2 & \\ 1 & 4 & 2 & 1 & \\ -1 & -1 & -2 & -1 & \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$


---


$$\begin{array}{l} Z_1 \Leftrightarrow Z_2 \\ Z_2 - 2Z_1 \Rightarrow Z_2 \\ Z_3 + Z_1 \Rightarrow Z_3 \\ Z_4 - Z_1 \Rightarrow Z_4 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 & \\ 0 & -3 & 0 & 0 & \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \end{array}$$


---


$$\begin{array}{l} Z_3 \Leftrightarrow Z_4 \\ Z_4 + Z_2 \Rightarrow Z_4 \\ -\frac{1}{3}Z_2 \Rightarrow Z_2 \\ Z_3 + Z_2 \Rightarrow Z_3 \\ -Z_3 \Rightarrow Z_3 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \left. \begin{array}{l} = \vec{u}_1^T \\ = \vec{u}_2^T \\ = \vec{u}_3^T \end{array} \right\} \Rightarrow \text{S-System, Typ (II)}.$$

Wir lesen hier die Basis direkt ab:

$$U = \text{span} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \} = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Basis}} \right\}, \quad E := \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Um einen **Ergänzungsraum**  $E$  für  $U = \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \}$  so zu bestimmen, dass  $U \oplus E = \mathbf{K}^n$  gilt, wählt man

$$E = \text{span} \{ \vec{e}_{j_1}, \vec{e}_{j_2}, \dots, \vec{e}_{j_{n-k}} \},$$

worin  $\vec{e}_{j_l}^T = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  derjenige Einheitsvektor der Standardbasis ist, dessen 1 an der Position  $j_l$  des obigen Staffelsystems steht,  $l = 1, 2, \dots, n - k$ .

**BSP. (4.5.5)** In  $V := \mathbf{R}^5$  sei das Vektorsystem  $\vec{v}_1 := (1, 1, 0, 4, 5)^T$ ,  $\vec{v}_2 := (-1, 0, 3, -4, -4)^T$ ,  $\vec{v}_3 := (-1, -1, 0, -4, -4)^T$ ,  $\vec{v}_4 := (1, 1, 0, 4, 6)^T$  gegeben. Man bestimme Basis, Dimension und Ergänzungsraum für  $U := \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4 \}$ . Lösung:

$$A^T := \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vec{v}_3^T \\ \vec{v}_4^T \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 5 & \\ -1 & 0 & 3 & -4 & -4 & \\ -1 & -1 & 0 & -4 & -4 & \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 6 & \end{array}$$


---


$$\begin{array}{l} Z_2 + Z_1 \Rightarrow Z_2 \\ Z_3 + Z_1 \Rightarrow Z_3 \\ Z_4 - Z_1 \Rightarrow Z_4 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 5 & \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$


---

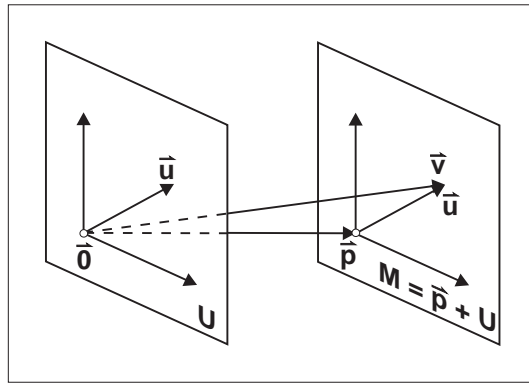

$$\begin{array}{l} Z_1 - 5Z_3 \Rightarrow Z_1 \\ Z_2 - Z_3 \Rightarrow Z_2 \\ Z_4 - Z_3 \Rightarrow Z_4 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \left. \begin{array}{l} = \vec{u}_1^T \\ = \vec{u}_2^T \\ = \vec{u}_3^T \end{array} \right\} \Rightarrow \text{S-System, Typ (II)}.$$

Wir lesen hier Dimension, Basis und Ergänzungsraum direkt ab:  $\dim U = 3;$

$$U = \text{span} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \} = \text{span} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Basis}}, \quad E := \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

## 4.6 Affine Unterräume (Untermannigfaltigkeiten)

Es sei  $V$  ein Vektorraum über einem beliebigen Körper  $\mathbf{K}$ . Dann trägt jeder Unterraum  $\emptyset \neq U \subseteq V$  die **lineare Struktur** von  $V$ , und es gilt insbesondere  $\vec{0} \in U$ . Durch **Parallelverschiebung** von  $U$  um einen festen Vektor  $\vec{p} \in V$  wird die lineare Struktur **affin** auf ein Gebilde  $M := \vec{p} + U$  übertragen:



Durch Parallelverschiebung des UR  $U$  um einen festen Vektor  $\vec{p}$  entsteht die UM  $M = \vec{p} + U$

**Definition 4.17** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ . Eine Teilmenge  $\emptyset \neq M \subseteq V$  heie **affiner Unterraum** (oder **lineare Untermannigfaltigkeit**) (UM) von  $V$  genau dann, wenn ein Unterraum  $\emptyset \neq U \subseteq V$  und ein fester Vektor  $\vec{p} \in V$  existieren mit

$$M = \vec{p} + U = \{ \vec{v} \in V : \vec{v} = \vec{p} + \vec{u}, \vec{u} \in U \}.$$

- Ist  $\dim U = 0$ , so ist  $M = \vec{p}$ , und  $M$  heie **Punkt** in  $V$ .
- Ist  $\dim U = 1$ , so heie  $M$  **Gerade** in  $V$ .
- Ist  $\dim U = 2$ , so heie  $M$  **Ebene** in  $V$ .
- Ist  $\dim U = n - 1$  und  $\dim V = n$ , so heie  $M$  **Hyperebene** in  $V$ .

Im Sonderfall  $\dim V = 3$  sind also die Hyperebenen in  $V$  genau die Ebenen in  $V$ . Der Unterraum  $U$  ist durch die Vorgabe der UM  $M$  **eindeutig** festgelegt, denn es gilt

$$(i) \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in U \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in M, \quad (ii) \quad \vec{p} \in U \Rightarrow U = M.$$



**Definition 4.18** (a) Ist  $M = \vec{p} + U$  eine UM von  $V$ , so heie der Unterraum  $U$  die **Richtung** von  $M$ .

(b) Es seien  $M_1, M_2$  zwei UM von  $V$  mit Richtungen  $U_1$  bzw.  $U_2$ . Dann heißen  $M_1, M_2$

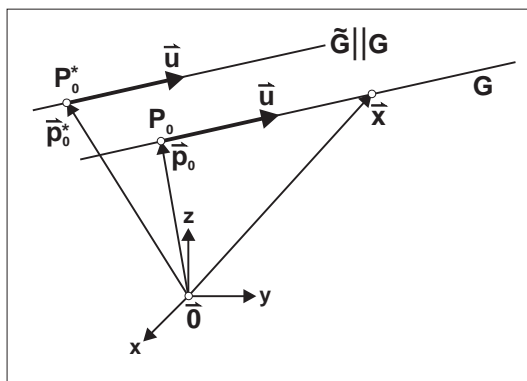
- **parallel**, wenn  $U_1 \subseteq U_2$  oder  $U_2 \subseteq U_1$  gilt,
- **echt parallel**, wenn  $U_1 = U_2$  gilt. In diesem Falle setzt man  $M_1 \parallel M_2$ .

(c) Ist  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$  eine Basis von  $U$ :  $U = \text{span} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m \}$  und  $\dim U = m < \infty$ , so heie  $M$  **endlichdimensional**, und man schreibt  $\dim M := \dim U = m$ . In diesem Falle hat  $M$  die **Parameterdarstellung**

$$M = \left\{ \vec{v} \in V : \vec{v} = \vec{p} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{u}_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K} \right\}$$

mit dem **Aufhangepunkt**  $\vec{p}$ , den **Richtungsvektoren**  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$  und den **Parametern**  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

**BSP. (4.6.1)** Parameterdarstellung einer Geraden in  $V := \mathbf{R}^3$ :



Parameterdarstellung von Geraden in  $\mathbf{R}^3$

Gegeben seien ein Punkt  $P_0 \in A_3$  mit Ortsvektor  $\vec{p}_0 \in \mathbf{R}^3$ , ferner eine Richtung  $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$ ,  $\vec{u} \neq \vec{0}$ . Dann ist

$$G := \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbf{R} \}$$

eine **Gerade** in  $\mathbf{R}^3$ , und die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

ist ihre **Parameterdarstellung**. *Zusatz:* Seien von  $G$  lediglich die zwei Punkte  $P_0, P_1$  mit Ortsvektoren  $\vec{p}_0$  und  $\vec{p}_1$  bekannt, so erhalt man gema

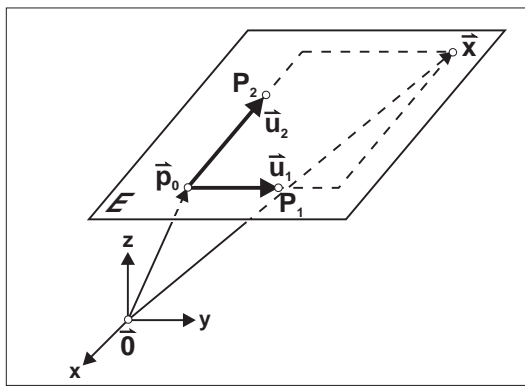
$$\vec{x} = \vec{p}_0 + \lambda (\vec{p}_1 - \vec{p}_0), \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

die Parameterdarstellung der Geraden  $G$ .

*Zum Beispiel:* Die Parameterdarstellung einer Geraden durch die zwei Punkte  $P_0(1, -4, 3)$  und  $P_1(2, 3, -4)$  ist zu bestimmen. *Losung:* Es gilt  $\vec{p}_0 = (1, -4, 3)^T$ ,  $\vec{p}_1 = (2, 3, -4)^T$ ,  $\vec{u} := \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = (1, 7, -7)^T$ , und somit

$$G: \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

**BSP. (4.6.2)** Parameterdarstellung einer Ebene in  $V := \mathbf{R}^3$ :



Parameterdarstellung einer Ebene in  $\mathbf{R}^3$

Gegeben seien ein Punkt  $P_0 \in A_3$  mit Ortsvektor  $\vec{p}_0 \in \mathbf{R}^3$ , ferner zwei **linear unabhängige** Vektoren  $\vec{u}_1 \neq \vec{0} \neq \vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_j \in \mathbf{R}^3$ , die eine Richtung  $U = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  definieren. Dann ist

$$E := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{p}_0 + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}$$

eine **Ebene** in  $\mathbf{R}^3$ , und die Gleichung

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},$$

ist ihre **Parameterdarstellung**. *Zusatz:* Seien von  $E$  lediglich drei **nicht auf einer Geraden** liegende Punkte  $P_0, P_1, P_2$  mit Ortsvektoren  $\vec{p}_0, \vec{p}_1$  bzw.  $\vec{p}_2$  bekannt, so erhält man gemäß

$$\vec{x} = \vec{p}_0 + \lambda_1 (\vec{p}_1 - \vec{p}_0) + \lambda_2 (\vec{p}_2 - \vec{p}_0), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},$$

die Parameterdarstellung der Ebene  $E$ .

*Zum Beispiel:* Die Parameterdarstellung einer Ebene durch die drei Punkte  $P_0(1, -4, 3)$ ,  $P_1(2, 3, -4)$  und  $P_2(-1, -2, 3)$  ist zu bestimmen. *Lösung:* Es gilt  $\vec{p}_0 = (1, -4, 3)^T$ ,  $\vec{p}_1 = (2, 3, -4)^T$ ,  $\vec{p}_2 = (-1, -2, 3)^T$  sowie  $\vec{u}_1 := \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = (1, 7, -7)^T$ ,  $\vec{u}_2 := \vec{p}_2 - \vec{p}_0 = (-2, 2, 0)^T$ , und somit

$$E : \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}.$$

Häufig ist man daran interessiert, von zwei Untermannigfaltigkeiten  $M_1, M_2$  die **Schnittmenge**  $M_1 \cap M_2$  zu bestimmen; so zum Beispiel die Schnittmenge von zwei Ebenen, zwei Geraden oder einer Geraden und einer Ebene. Wir geben hier einen Weg an, der i.a. für **endlichdimensionale** Vektorräume  $V$  gangbar ist. In  $V := \mathbf{R}^3$  gibt es eine wesentlich elegantere Methode, die aber das **Vektorprodukt** verwendet, welches wir erst in Kapitel 5 einführen werden. Man lese dazu Abschnitt 5.9. Zur Vorbereitung zeigen wir:

**Satz 4.15** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ , und es seien  $M, M_1, M_2$  Untermannigfaltigkeiten von  $V$ .*

(a) *Gilt  $M = \vec{p} + U$ , so gilt auch  $M = \vec{v} + U \quad \forall \vec{v} \in M$ .*

(b) *Entweder es gilt  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  oder  $M_1 \cap M_2$  ist wiederum  $UM$  von  $V$ .*

*Begründungen:* (a) Es sei  $\vec{v} \in M$ . Dann folgt  $\vec{v} + U = \vec{p} + \underbrace{(\vec{v} - \vec{p})}_{\in U} + U = \vec{p} + U$ .

(b) Es sei  $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ . Dann existiert ein  $\vec{p} \in M_1 \cap M_2$ , und es folgen aus (a) die Darstellungen  $M_1 = \vec{p} + U_1$ ,  $M_2 = \vec{p} + U_2$ . Wir erschließen  $M_1 \cap M_2 = \vec{p} + (U_1 \cap U_2)$ , und dies ist eine Untermannigfaltigkeit, da  $U_1 \cap U_2$  ja ein UR ist.  $\square$

**Bemerkung 4.10** Haben die Untermannigfaltigkeiten  $M_1, M_2 \subseteq V$  die Parameterdarstellungen

$$M_1 : \vec{v} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{a}_m,$$

$$M_2 : \vec{v} = \vec{q} + \mu_1 \vec{b}_1 + \cdots + \mu_l \vec{b}_l,$$

so führt das Schnittproblem  $M_1 \cap M_2$  auf die zu lösende Gleichung

$$\lambda_1^* \vec{a}_1 + \lambda_2^* \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_m^* \vec{a}_m - \mu_1^* \vec{b}_1 - \mu_2^* \vec{b}_2 - \cdots - \mu_l^* \vec{b}_l = \vec{q} - \vec{p}.$$

Im speziellen Fall  $V := \mathbf{K}^n$  ist somit ein **inhomogenes lineares Gleichungssystem**

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, -\vec{b}_1, -\vec{b}_2, \dots, -\vec{b}_l \mid \vec{q} - \vec{p})$$

zu lösen. Das Lösungstupel  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_l^*)$  definiert zwei Parametersätze  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$  und  $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_l^*$ , von denen nur einer benötigt wird, also auch nur berechnet zu werden braucht. In der Regel wird man den kleineren Parametersatz bestimmen. Man erhält so je nach Wahl des berechneten Parametersatzes die zwei äquivalenten Parameterdarstellungen der Schnittmannigfaltigkeit  $\square$

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 &: \vec{v} = \vec{p} + \lambda_1^* \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_m^* \vec{a}_m, \\ M_1 \cap M_2 &: \vec{v} = \vec{q} + \mu_1^* \vec{b}_1 + \cdots + \mu_l^* \vec{b}_l. \end{aligned}$$

**BSP. (4.6.3)** Es seien in  $V := A_3$  die Punkte  $P_0(1, 1, 2)$ ,  $P_1(0, 1, 1)$ ,  $P_2(2, -1, 1)$  und  $Q_0(1, 1, 1)$ ,  $Q_1(2, 0, -1)$ ,  $Q_2(0, 3, 5)$  gegeben. Man bestimme in  $\mathbf{R}^3$  die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  mit  $P_j \in E_1$  und  $Q_j \in E_2$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Man bestimme ferner die **Schnittgerade**  $G = E_1 \cap E_2$ . *Lösung:* Mit den Ortsvektoren  $\vec{p}_j$  und  $\vec{q}_j$  der Punkte  $P_j$  bzw.  $Q_j$  ergeben sich folgende Parameterdarstellungen:

$$E_1 : \vec{x} = \vec{p}_0 + \lambda_1 \underbrace{(\vec{p}_1 - \vec{p}_0)}_{=: \vec{a}_1} + \lambda_2 \underbrace{(\vec{p}_2 - \vec{p}_0)}_{=: \vec{a}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},$$

$$E_2 : \vec{x} = \vec{q}_0 + \mu_1 \underbrace{(\vec{q}_1 - \vec{q}_0)}_{=: \vec{b}_1} + \mu_2 \underbrace{(\vec{q}_2 - \vec{q}_0)}_{=: \vec{b}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R}.$$

Zur Bestimmung der Schnittmannigfaltigkeit  $E_1 \cap E_2$  müssen wir das lineare Gleichungssystem  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, -\vec{b}_1, -\vec{b}_2 \mid \vec{q}_0 - \vec{p}_0)$  lösen. Dazu verwenden wir den GAUSS-Algorithmus:

|   |  |  |
|---|--|--|
| $-Z_1 \Rightarrow Z_1$<br>$Z_3 + Z_1 \Rightarrow Z_3$ | $\begin{array}{cccc c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -4 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}$ | $\begin{aligned} \lambda_1^* &= -\frac{3}{4}\mu_2^* + \frac{1}{4}, \\ \lambda_2^* &= -\frac{1}{4}\mu_2^* - \frac{1}{4}, \\ \mu_1^* &= \frac{3}{2}\mu_2^* - \frac{1}{2}, \quad \mu_2^* \text{ frei.} \end{aligned}$ |
|---|--|--|

Mit dem frei wählbaren Parameter  $\mu := \frac{1}{2} \mu_2^*$  erhalten wir bei Wahl des Parametersatzes  $\lambda_1^*, \lambda_2^*$  die Parameterdarstellung:

$$G : \vec{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{\mu_2^*}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

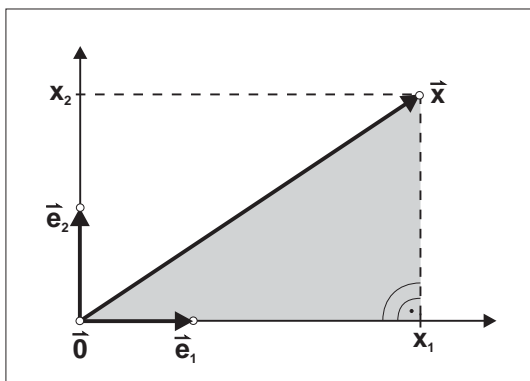
Wird hingegen der Parametersatz  $\mu_1^*, \mu_2^*$  gewählt, so resultiert dieselbe Parameterdarstellung

$$G : \vec{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + \frac{\mu_2^*}{4} \begin{bmatrix} 3-1 \\ 0+2 \\ 3+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

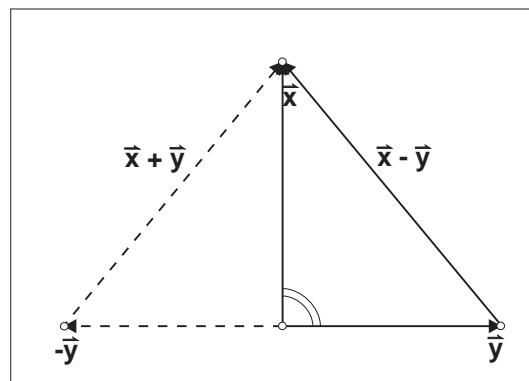
## 4.7 Skalarprodukte

In der CARTESISCHEN Basis des Vektorraumes  $\mathbf{R}^2$  hat ein Ortsvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2$  die **Länge**

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$



Länge des Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$



Im gleichschenkligen Dreieck gilt  $\vec{x} \perp \vec{y}$

Dies folgt unmittelbar aus dem **PYTHAGORÄISCHEN LEHRSATZ**. Analog gilt in der CARTESISCHEN Basis des  $\mathbf{R}^3$  für jeden Ortsvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$ :

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Allgemein wird man die Standardbasis des  $\mathbf{R}^n$  zu folgender Definition heranziehen:

**Definition 4.19** In der Standardbasis des  $\mathbf{R}^n$  ist die **EUKLIDISCHE LÄNGE** eines Ortsvektors  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$  erklärt durch die Zahl

$$\|\vec{x}\| := \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Statt **Länge** sagt man auch **Betrag** oder **Norm**.

**BSP. (4.7.1)** (a) In  $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$  ist  $\|x\|$  einfach der Betrag der Zahl  $x \in \mathbf{R}$ .

(b) Der Vektor  $\vec{x} := (-7, 1, 2, -1)^T \in \mathbf{R}^4$  hat die Norm  $\|\vec{x}\| = \sqrt{49 + 1 + 4 + 1} = \sqrt{55}$ .

(c) Für jeden Einheitsvektor  $\vec{e}_j \in \mathbf{R}^n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , der Standardbasis gilt  $\|\vec{e}_j\| = 1$ .

(d) Für  $\vec{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$  und  $\vec{y} := (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$  gilt

$$\|\vec{x} \pm \vec{y}\| = \left( \sum_{k=1}^n (x_k \pm y_k)^2 \right)^{1/2}.$$

In  $\mathbf{R}^2$  folgt aus elementargeometrischen Überlegungen über gleichschenklige Dreiecke (siehe obige Skizze), dass zwei Vektoren  $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$  und  $\vec{y} = (y_1, y_2)^T$  genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn gilt:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} + \vec{y}\|.$$

In der CARTESISCHEN Basis folgt:

$$0 = \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 4(x_1y_1 + x_2y_2).$$

Eine ähnliche Rechnung in  $\mathbf{R}^3$  liefert die Bedingung  $0 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ . Es ist zweckmäßig, für die Rechengröße  $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$  eine eigene Bezeichnung einzuführen:

**Definition 4.20** (a) Für je zwei Vektoren  $\vec{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$  und  $\vec{y} := (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n$  heiÙe die Zahl

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

**Standardskalarprodukt** von  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$  (auch **inneres Produkt** oder kurz **Skalarprodukt**).

(b) Zwei Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$  heißen zueinander **orthogonal** (oder **stehen senkrecht aufeinander**), in Zeichen  $\vec{x} \perp \vec{y}$ , wenn  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$  gilt:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

**BSP. (4.7.2)** (a) In  $\mathbf{R}^4$  gilt für  $\vec{x} := (-7, 1, 2, -1)^T$ ,  $\vec{y} := (3, 0, -1, 5)^T$  und  $\vec{z} := (1, 0, 0, -7)^T$ :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -28, \quad \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = -32, \quad \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{z}.$$

(b) Stets gilt  $\langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0$ , also  $\vec{0} \perp \vec{x} \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$ .

Norm und Skalarprodukt in  $\mathbf{R}^n$  haben folgende Eigenschaften:

**Satz 4.16** (a) Das **Skalarprodukt** ist eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  mit den Eigenschaften

|       |  |                        |
|-------|--|------------------------|
| (SP1) | $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0 \Leftrightarrow \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{R}^n,$  | (positive Definitheit) |
| (SP2) | $\langle \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R} \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^n,$ | (Bilinearität)         |
| (SP3) | $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n,$   | (Symmetrie)            |

(b) Die **Norm** ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  mit den Eigenschaften

|      |  |                       |
|------|--|-----------------------|
| (N1) | $\ \vec{x}\  > 0 \Leftrightarrow \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{R}^n,$   | (Definitheit)         |
| (N2) | $\ \lambda \vec{x}\  =  \lambda  \cdot \ \vec{x}\  \forall \lambda \in \mathbf{R} \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n,$ | (Homogenität)         |
| (N3) | $\ \vec{x} + \vec{y}\  \leq \ \vec{x}\  + \ \vec{y}\  \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n,$                    | (Dreiecksungleichung) |

(c) Norm und Skalarprodukt sind verknüpft gemäß

$$\boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n.} \quad (7.1)$$

Es gilt für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ :

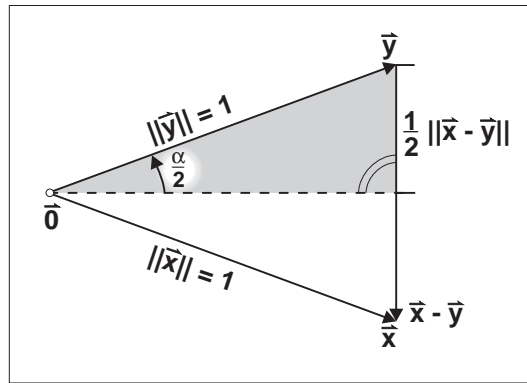
$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}), \quad (\text{Cosinussatz}) \quad (7.2)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}), \quad (7.3)$$

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|. \quad (\text{CAUCHY-SCHWARZ-UNGLEICHUNG}) \quad (7.4)$$

*Begründungen:* Die Eigenschaften (SP1)–(SP3) und (N1), (N2) lassen sich unmittelbar aus den Definitionen herleiten. Ebenso offenkundig ist die Relation (7.1). Gleichung (7.3) ist trivial für  $\vec{x} = \vec{0}$  oder  $\vec{y} = \vec{0}$ . Es sei nun speziell  $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$  angenommen. Wir setzen  $\alpha := \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$  und erhalten aus der folgenden Skizze  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \|\vec{x} - \vec{y}\|$ , und somit:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 1 - \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle \\ &= 1 - \frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 - \frac{1}{2} \|\vec{y}\|^2 + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$



Zum Beweis von (7.3)

Also gilt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \cos \alpha$  für Vektoren der Länge 1. Für beliebige Vektoren  $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$  sind  $\vec{x}/\|\vec{x}\|$  und  $\vec{y}/\|\vec{y}\|$  solche Vektoren der Länge 1. Für diese gilt also:

$$\cos \alpha = \cos \sphericalangle\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right) = \left\langle \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\rangle = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|},$$

und daraus folgt (7.3). Mit  $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  ist die Gleichung (7.2) jetzt eine unmittelbare Folgerung von (7.3), und wegen  $|\cos \alpha| \leq 1$  resultiert sogleich auch (7.4). Schließlich haben wir (N3):

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \stackrel{(7.4)}{\leq} (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

**Bemerkung 4.11** (a) Für  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^n$  und  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  folgt zusammen mit (SP2) und (SP3):

$$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} + \mu \vec{z} \rangle = \langle \lambda \vec{y} + \mu \vec{z}, \vec{x} \rangle = \lambda \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \mu \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \mu \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle.$$

Diese Eigenschaft und (SP2) rechtfertigen den Begriff **Bilinearität**.

(b) Für  $\alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \pi/2$  folgt aus (7.3) wieder  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ , also  $\vec{x} \perp \vec{y}$ . In diesem Falle ist (7.2) nichts anderes als der **PYTHAGORÄISCHE LEHRSATZ**.

(c) Setzen wir

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left( \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n,$$

so wird auf  $\mathbf{R}^n$  eine **Metrik**  $d(\cdot, \cdot) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  erklärt, die wiederum die Eigenschaften

|  |                              |
|--|------------------------------|
| (M1) $d(\vec{x}, \vec{y}) > 0 \Leftrightarrow \vec{x} \neq \vec{y}$ ,  | <b>(Definitheit)</b>         |
| (M2) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ ,                                   | <b>(Symmetrie)</b>           |
| (M3) $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^n$ , | <b>(Dreiecksungleichung)</b> |

hat. Diese heißt die **EUKLIDISCHE METRIK (Distanz, Entfernung)**.

(d) Ein Vektor  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  mit der Norm  $\|\vec{x}\| = 1$  heie **Einheitsvektor**. Jeder Vektor  $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{R}^n$  wird durch die **Normierung**  $\vec{x}/\|\vec{x}\|$  zum Einheitsvektor. □

## 4.8 Praehilbertrume und normierte Vektorräume

In diesem Abschnitt bezeichnet **K** ausschließlich den Körper  $\mathbf{R}$  oder  $\mathbf{C}$ .

Der Versuch, das Standardskalarprodukt des  $\mathbf{R}^n$ , namlich

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T,$$

auf Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{C}^n$  auszudehnen, führt zur Verletzung der Definitheitsbedingung (SP1). *Zum Beispiel* erhalt man für den Vektor  $\vec{x} := (1 + i, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{C}^n$  aus obigem Skalarprodukt die Zahl  $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = (1 + i)^2 = 2i$ . In diesem Fall ist es **nicht** möglich, die **Lange** oder **Norm** des Vektors  $\vec{x}$  gemäß  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$  zu erklaren.

Mit einer geeigneten Modifizierung der Definition kann das Skalarprodukt auch auf  $\mathbf{C}^n$  eingeführt werden:

**Definition 4.21** (a) *Für je zwei Vektoren  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$  und  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{C}^n$  heie*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$$

**Standardskalarprodukt** von  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{C}^n$ .

(b) *Die Zahl*

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \left( \sum_{k=1}^n x_k \bar{x}_k \right)^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

heie die **Lange** oder die **durch das Skalarprodukt induzierte Norm** des Vektors  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{C}^n$ .

*Zum Beispiel:* In  $\mathbf{C}^2$  seien die Vektoren  $\vec{x} := (1 + i, 1 - i)^T$ ,  $\vec{y} := (-2, 2i)^T$  gegeben. Dann gilt  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -2(1 + i) - 2i(1 - i) = -4(1 + i)$  sowie  $\|\vec{x}\| = [(1 + i)(1 - i) + (1 - i)(1 + i)]^{1/2} = 2$  und  $\|\vec{y}\| = [(-2)(-2) + 2i(-2i)]^{1/2} = 2\sqrt{2}$ .

Die in Satz 4.16 aufgelisteten Eigenschaften von Standardskalarprodukt und induzierter Norm gelten weiterhin mit entsprechender Modifikation:

**Satz 4.17** Wir setzen  $V := \mathbf{C}^n$ . (a) Das **Skalarprodukt** ist eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{K} := \mathbf{C}$  mit den Eigenschaften

|       |   |                        |
|-------|---|------------------------|
| (SP1) | $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0 \Leftrightarrow \vec{0} \neq \vec{x} \in V,$  | (positive Definitheit) |
| (SP2) | $\langle \lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K} \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V,$ | (Sesquilinearität)     |
| (SP3) | $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle} \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$  | (Antisymmetrie)        |

(b) Die **Norm** ist eine Abbildung  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$  mit den Eigenschaften

|      |   |                       |
|------|---|-----------------------|
| (N1) | $\  \vec{x} \  > 0 \Leftrightarrow \vec{0} \neq \vec{x} \in V,$   | (Definitheit)         |
| (N2) | $\  \lambda \vec{x} \  =  \lambda  \cdot \  \vec{x} \  \forall \lambda \in \mathbf{K} \forall \vec{x} \in V,$ | (Homogenität)         |
| (N3) | $\  \vec{x} + \vec{y} \  \leq \  \vec{x} \  + \  \vec{y} \  \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$                  | (Dreiecksungleichung) |

**Bemerkung 4.12** (a) Setzen wir in der obigen Definition  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  und  $V := \mathbf{R}^n$ , so gelten die Eigenschaften (SP1), (SP2) und (SP3) auch für das Standardskalarprodukt in  $\mathbf{R}^n$  sowie die Normaxiome (N1)–(N3) für die durch das Skalarprodukt induzierte Norm  $\| \vec{x} \| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ .

(b) Skalarprodukte lassen sich nicht nur – wie bisher getan – in  $V := \mathbf{K}^n$  erklären, sondern auch in vielen anderen Vektorräumen.

Ist beispielsweise  $I := [a, b]$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ , ein abgeschlossenes Intervall, und ist

$$V := \Pi_\infty(I) := \{P(x) : P(x) \text{ ist ein für alle } x \in I \text{ definiertes komplexes Polynom}\},$$

so kann sich der mit dem Integralbegriff vertraute Leser davon überzeugen, dass durch die Vorschrift

$$\langle P, Q \rangle := \int_a^b P(x) \overline{Q(x)} dx, \quad P, Q \in \Pi_\infty(I),$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  erklärt ist. □

**Definition 4.22** (a) Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$  heie **Praehilbertraum**, wenn in  $V$  ein **Skalarprodukt**  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{K}$  erklärt ist, welches die Eigenschaften (SP1), (SP2) und (SP3) hat. Ein Praehilbertraum  $V$  über  $\mathbf{R}$  mit  $\dim V < \infty$  heie auch ein **EUKLIDISCHER Vektorraum**. Ein Praehilbertraum  $V$  über  $\mathbf{C}$  heie auch ein **unitärer Vektorraum**.

(b) Ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$  heie **normierter Vektorraum**, wenn in  $V$  eine **Norm**  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$  erklärt ist mit den Eigenschaften (N1), (N2), (N3).

(c) Ist  $V$  ein Praehilbertraum über  $\mathbf{K}$  mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , so heie die über die Relation  $\| \vec{x} \| := \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \forall \vec{x} \in V$  erklärte Abbildung  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbf{R}$  die durch das Skalarprodukt induzierte **Norm**.

**Bemerkung 4.13** (a) Jeder Praehilbertraum ist gleichzeitig ein **normierter VR**; die Umkehrung gilt im allgemeinen **nicht**. Zum Beispiel ist

$$\| \vec{x} \|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \vec{x} \in \mathbf{C}^n,$$

eine Norm auf dem Vektorraum  $V := \mathbf{C}^n$ , die verschieden ist von der durch das Standardskalarprodukt induzierten Norm  $\| \vec{x} \| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ . Die Norm  $\| \vec{x} \|_1$  lässt sich nicht durch ein



Skalarprodukt induzieren.

(b) Auf jedem normierten Vektorraum  $V$  wird vermöge

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

stets eine **Metrik** mit den früher erklärten Eigenschaften (M1), (M2), (M3) induziert.  $\square$

**BSP. (4.8.1)** (a) Wir setzen  $V := A_3 = \{\text{Ortsvektoren im 3D-Anschauungsraum}\}$  und versehen  $V$  mit dem (basisunabhängigen!) Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}).$$

Dann ist  $V$  ein Praehilbertraum.

(b) Wie oben erläutert, ist  $V := \mathbf{K}^n$  mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$$

ein Praehilbertraum.

Wir stellen nachfolgend wichtige Rechenregeln für das Skalarprodukt zusammen.

**Satz 4.18** *Es sei  $V$  ein Praehilbertraum über  $\mathbf{K}$ . Dann gilt:*

$$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} + \mu \vec{z} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \bar{\mu} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K} \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \quad (8.1)$$

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad (8.2)$$

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \quad (\text{CAUCHY-SCHWARZ-UNGLEICHUNG}). \quad (8.3)$$

In der CAUCHY-SCHWARZ-UNGLEICHUNG tritt **Gleichheit** genau dann ein, wenn  $\vec{x}, \vec{y}$  linear abhängig sind.

*Begründung:* Wir zeigen zunächst (8.1). Es folgt aus den Eigenschaften eines Skalarprodukts:

$$\langle \vec{x}, \lambda \vec{y} + \mu \vec{z} \rangle \stackrel{(SP3)}{=} \overline{\langle \lambda \vec{y} + \mu \vec{z}, \vec{x} \rangle} \stackrel{(SP2)}{=} \overline{\lambda \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \mu \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle} \stackrel{(SP3)}{=} \bar{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \bar{\mu} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle.$$

Wir beweisen jetzt (8.2):

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \stackrel{(SP2)}{=} \langle \vec{x}, \vec{x} + \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \stackrel{(8.1)}{=} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &\stackrel{(SP3)}{=} \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (8.3) vermerken wir, dass die Behauptung für  $\vec{y} = \vec{0}$  trivial ist. Es sei also  $\vec{y} \neq \vec{0}$  angenommen. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \|\vec{x}\| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|} \vec{y} - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\|^2 \stackrel{(8.2)}{=} \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 + |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \vec{x}, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \vec{y} \rangle \\ &\stackrel{(8.2)}{=} \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 + |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 - 2 \operatorname{Re} \left( \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \right) = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Ist  $\vec{x} + \lambda \vec{y} = \vec{0}$ , so gilt in dieser Rechnung überall Gleichheit.  $\square$

**Bemerkung 4.14** (a) Aus (8.2) und (8.3) erhält man jetzt (N3), nämlich

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

(b) In  $V := \mathbf{K}^n$  hat die CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung (8.3) die Form

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{1/2}.$$

(c) Ist  $V$  ein Praehilbertraum über  $\mathbf{R}$ , so wird durch  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle / \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$  für jedes Paar von Vektoren  $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$  eine **reelle** Zahl aus dem Intervall  $[-1, 1]$  erklärt:

**Definition 4.23** Gegeben sei ein **reeller** Praehilbertraum  $V$ . Die durch

$$\cos \alpha := \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

eindeutig definierte Zahl  $\alpha \in \mathbf{R}$  heie der **(unorientierte) Winkel** zwischen den Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$ , bezeichnet mit  $\alpha =: \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ .

Zum Beispiel in  $V := \mathbf{R}^5$  haben wir für  $\vec{x} := (0, 1, 1, 0, 0)^T$  und  $\vec{y} := (1, 1, 1, 0, 1)^T$ :

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{also} \quad \alpha = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{4}.$$

(d) Ist  $V$  ein **normierter** Vektorraum, so heie jeder Vektor  $\vec{v} \in V$  mit  $\|\vec{v}\| = 1$  ein **Einheitsvektor**. Für jeden Vektor  $\vec{0} \neq \vec{w} \in V$  wird vermöge  $\vec{v} := \vec{w} / \|\vec{w}\|$  eine **Normierung** auf die Länge 1 induziert. Zum Beispiel sei in  $V := \mathbf{R}^5$  der Vektor  $\vec{w} := (-2, 1, 3, 0, 1)^T \in V$  gegeben. Wegen  $\|\vec{w}\| = \sqrt{15}$  ist  $\vec{w}$  kein Einheitsvektor. Normierung liefert den Einheitsvektor:

$$\vec{v} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{15}} (-2, 1, 3, 0, 1)^T.$$

(e) In einem normierten Vektorraum  $V$  erschließt man aus (N3) durch vollständige Induktion die **verallgemeinerte Dreiecksungleichung** □

$$\left\| \sum_{k=1}^n \vec{v}_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|\vec{v}_k\| \quad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V.$$

In jedem Praehilbertraum kann genau wie in  $\mathbf{R}^n$  ein **Orthogonalittsbegriff** erklärt werden.

**Definition 4.24** (a) Gegeben sei ein Praehilbertraum  $V$ . Zwei Vektoren  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  sind **orthogonal** oder **zueinander senkrecht**, in Zeichen:  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , wenn  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  gilt:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad :\Leftrightarrow \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

(b) Gelte  $\dim V = n < \infty$ . Eine Basis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  von  $V$  heie **Orthogonalbasis** genau dann, wenn gilt

$$\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k.$$

Eine Basis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  von  $V$  heie **Orthonormalbasis** (ON-Basis) genau dann, wenn gilt

$$\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle = \delta_{jk} \quad \forall j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Dabei heie

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1 & : j = k, \\ 0 & : j \neq k \end{cases}$$

das **KRONECKER-Symbol**. Eine **Orthonormalbasis** besteht mit anderen Worten aus **Einheitsvektoren**, die paarweise zueinander senkrecht sind.

**BSP. (4.8.2)** (a) In  $V := \mathbf{C}^3$  seien die Vektoren  $\vec{u} := (1 + 2i, 1 - 2i, i)^T$  und  $\vec{v} := (-4i, 1 - 2i, -4 + 3i)^T$  gegeben. Dann gilt

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (1 + 2i)4i + (1 - 2i)(1 + 2i) + i(-4 - 3i) = 0, \quad \text{also } \vec{u} \perp \vec{v}.$$

**Beachte** in dieser Rechnung: Bei komplexem Skalarprodukt sind die Komponenten des Faktors  $\vec{v}$  **konjugiert komplex** zu nehmen!

(b) Die **Standardbasis**  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  in  $V := \mathbf{K}^n$  ist eine **ON-Basis**! Aus der Darstellung  $\vec{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)^T$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , deduziert man sofort:

$$\|\vec{e}_j\|^2 = \langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle = 1, \quad \langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

(c) Es sei  $V := \mathbf{R}^3$ , versehen mit dem Standardskalarprodukt. Man prüft leicht nach, dass auch das folgende Vektorsystem eine **ON-Basis** von  $\mathbf{R}^3$  ist:

$$\vec{v}_1 := \frac{1}{3}(2, 2, 1)^T, \quad \vec{v}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad \vec{v}_3 := \frac{1}{\sqrt{18}}(-1, -1, 4)^T.$$

Allgemein kann **jede** Basis in einem Praehilbertraum in eine **ON-Basis** umgewandelt werden. Ein **konstruktives Umwandlungsverfahren** wurde von ERHARD SCHMIDT (1876–1959, Professor für Mathematik in Berlin) gefunden:

**Satz 4.19 (SCHMIDTSches Orthonormalisierungsverfahren)**

In einem Praehilbertraum  $V$  sei ein System  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , **linear unabhangiger** Vektoren gegeben. Dann existiert ein **Orthonormalsystem**  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  mit der **Eigenschaft**

$$\text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \} = \text{span} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \}.$$

Man erhalt das **ON-System konstruktiv** durch folgende **Rekursion**:

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}_1 &:= \vec{u}_1, \\ \vec{w}_k &:= \vec{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{u}_k, \vec{v}_j \rangle \vec{v}_j, \quad k = 2, 3, \dots, n, \\ \vec{v}_j &:= \frac{\vec{w}_j}{\|\vec{w}_j\|}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (\text{ONS})$$

**Begründung:** Nach Konstruktion gilt ja bereits  $\|\vec{v}_j\| = 1$ . Nun zeigen wir mit vollstandiger Induktion nach  $k$  die Orthogonalitat  $\langle \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \leq n - 1$ . Für  $k = 1$  haben wir per Konstruktion:

$$\langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle = \frac{1}{\|\vec{w}_2\|} \langle \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle = \frac{1}{\|\vec{w}_2\|} \langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle - \frac{1}{\|\vec{w}_2\|} \langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle \|\vec{v}_1\|^2 = 0.$$

Also gilt die Induktionsverankerung. Wir zeigen jetzt den Schluss von  $k$  auf  $k + 1$ . Gelte nun bereits  $\langle \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_j \rangle = 0$  für ein  $k \leq n - 2$  und für  $j = 1, 2, \dots, k$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_{k+2}, \vec{v}_j \rangle &= \frac{1}{\|\vec{w}_{k+2}\|} \left\langle \vec{u}_{k+2} - \sum_{l=1}^{k+1} \langle \vec{u}_{k+2}, \vec{v}_l \rangle \vec{v}_l, \vec{v}_j \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\vec{w}_{k+2}\|} \left\{ \langle \vec{u}_{k+2}, \vec{v}_j \rangle - \sum_{l=1}^{k+1} \langle \vec{u}_{k+2}, \vec{v}_l \rangle \underbrace{\langle \vec{v}_l, \vec{v}_j \rangle}_{=\delta_{lj}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

**BSP. (4.8.3)** Es sei  $V := \mathbf{R}^4$ , versehen mit dem Standardskalarprodukt. Um in dem Unterraum  $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in V : x_3 = x_1 - 2x_2 + x_4\}$  eine Basis zu bestimmen, setzen wir in die Gleichung  $x_3 = x_1 - 2x_2 + x_4$  nacheinander die Tripel  $(x_1, x_2, x_4) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  ein. Wir erhalten die Basisvektoren

$$\vec{u}_1 := (1, 0, 1, 0)^T, \quad \vec{u}_2 := (0, 1, -2, 0)^T, \quad \vec{u}_3 := (0, 0, 1, 1)^T.$$

Mit dem SCHMIDTSchen Orthonormalisierungsverfahren konstruieren wir nun eine ON-Basis von  $U$ :

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &:= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{u}_1 & \Rightarrow \vec{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \vec{w}_2 &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(0-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \Rightarrow \vec{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \vec{w}_3 &:= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(1+0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(0-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} & \Rightarrow \vec{v}_3 &= \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.15** (a) Jeder endlichdimensionale Praehilbertraum  $V$  besitzt eine ON-Basis. Denn ist  $\dim V = n$ , so kann die existierende Basis  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  mit dem Verfahren (ONS) orthonormiert werden.

(b) Es gelte  $\dim V = n$ , und es sei  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  eine gemäß (a) existierende ON-Basis. Dann ist jeder Vektor  $\vec{u} \in V$  eine LK der Basisvektoren:  $\vec{u} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k$  mit den Komponenten

$$\langle \vec{u}, \vec{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\langle \vec{v}_k, \vec{v}_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Das heißt, in einer **ON-Basis** des Vektorraumes  $V$  gestattet jeder Vektor die Darstellung

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^n \langle \vec{u}, \vec{v}_k \rangle \vec{v}_k, \quad \forall \vec{u} \in V.$$

**Definition 4.25** Die Zahlen  $\lambda_k := \langle \vec{u}, \vec{v}_k \rangle$  in der obigen Darstellung heißen die **FOURIER-Koeffizienten** des Vektors  $\vec{u}$  in der ON-Basis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ .

Für jeden weiteren Vektor  $\vec{v} \in V$  mit den FOURIER-Koeffizienten  $\mu_j := \langle \vec{v}, \vec{v}_j \rangle$  gilt nun

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k, \sum_{j=1}^n \mu_j \vec{v}_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_k \mu_j \underbrace{\langle \vec{v}_k, \vec{v}_j \rangle}_{=\delta_{kj}},$$

und somit □

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \bar{\mu}_k \quad \vec{v} \stackrel{=}{=} \vec{u} \quad \|\vec{u}\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle \vec{u}, \vec{v}_k \rangle|^2.}$$

**BSP. (4.8.4)** Es sei  $U$  der Unterraum aus BSP. (4.8.3) mit der dort konstruierten ON-Basis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ . Wir geben die Vektoren  $\vec{u} := (2, -2, 1, -5)^T \in U$  und  $\vec{v} := (1, 1, 0, 1)^T \in U$  vor. Dann errechnet man sofort die FOURIER-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle &= \frac{3}{\sqrt{2}}, & \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, & \langle \vec{u}, \vec{v}_3 \rangle &= -\frac{35}{\sqrt{42}}, \\ \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle &= \frac{2}{\sqrt{3}}, & \langle \vec{v}, \vec{v}_3 \rangle &= \frac{7}{\sqrt{42}}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - \frac{35 \cdot 7}{\sqrt{42}\sqrt{42}} = -5,$$

in Übereinstimmung mit dem Wert des Standardskalarproduktes  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 - 2 - 5 = -5$ .

## 4.9 Orthogonalkomplemente und geometrische Anwendungen

In diesem Abschnitt sei  $V$  stets ein Prachilbertraum, und es sei  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ .

**Definition 4.26** Das Orthogonalkomplement  $U^\perp$  eines Unterraumes  $U \subseteq V$  ist die Menge

$$\boxed{U^\perp := \{\vec{v} \in V : \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \forall \vec{u} \in U\}.$$

**BSP. (4.9.1)** Es sei  $V := \mathbf{R}^4$ , versehen mit dem Standardskalarprodukt. Man erkennt sehr einfach, dass die beiden Vektoren  $\vec{a} := (1, 0, 1, 0)^T$  und  $\vec{b} := (0, 1, 0, 1)^T$  den Unterraum  $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in V : x_1 = x_3 \text{ und } x_2 = x_4\}$  aufspannen. (Klar,  $\vec{a}, \vec{b} \in U$  sind LU, und wegen der zwei Nebenbedingungen  $x_1 = x_3, x_2 = x_4$  muss  $\dim U = 2$  gelten.) Wir setzen jetzt  $\vec{c} := (1, 0, -1, 0)^T$  und  $\vec{d} := (0, 1, 0, -1)^T$  und behaupten:

$$U^\perp = \text{span}\{\vec{c}, \vec{d}\}, \quad \dim U^\perp = 2.$$

Tatsächlich, es gilt für jeden Vektor  $\vec{u} := \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} \in U$  und jeden Vektor  $\vec{v} := \mu_1 \vec{c} + \mu_2 \vec{d}$ :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda_1 \mu_1 \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}_{=0} + \lambda_2 \mu_1 \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}_{=0} + \lambda_1 \mu_2 \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{d} \rangle}_{=0} + \lambda_2 \mu_2 \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{d} \rangle}_{=0} = 0.$$

Also haben wir  $\vec{v} \in U^\perp$ .

Wir sehen ferner, es gilt hier  $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ , was kein Zufall ist, wie folgender Satz zeigt:

**Satz 4.20** Es sei  $U \subseteq V$  ein Unterraum des Praehilbertraumes  $V$ . Dann gilt:

(a) Stets ist auch  $U^\perp$  ein **Unterraum** von  $V$ .

(b) Ist  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$  eine **Basis** von  $U$ , so gilt  $\vec{v} \in U^\perp$  genau dann, wenn

$$\langle \vec{u}_k, \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m.$$

(c) Stets gilt  $U \subseteq U^{\perp\perp} := (U^\perp)^\perp$ .

(d) (**Satz von der orthogonalen Zerlegung.**)

Es sei  $\dim V < \infty$ . Dann gilt  $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$  und  $U + U^\perp = V$ , also

$$V = U \oplus U^\perp, \quad \dim V = \dim U + \dim U^\perp.$$

Das heißt, zu jedem Vektor  $\vec{v} \in V$  gibt es eindeutig bestimmte Vektoren  $\vec{u}, \vec{u}^\perp$  mit

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}^\perp, \quad \vec{u} \in U, \quad \vec{u}^\perp \in U^\perp.$$

*Begründungen:* (a) Wegen  $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0 \quad \forall \vec{u} \in U$  haben wir  $\vec{0} \in U^\perp \neq \emptyset$ . Seien nun  $\vec{v}, \vec{w} \in U^\perp$  und  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$  vorgegeben. Dann folgt

$$\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \rangle = \underbrace{\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}_{=0} + \underbrace{\mu \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}_{=0} = 0 \quad \forall \vec{u} \in U,$$

also  $\lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \in U^\perp$ . Somit sind die Unterraumaxiome (U1) und (U2) in  $U^\perp$  erfüllt.

(b)  $\vec{v} \in V$  und  $\langle \vec{u}_k, \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m$  implizieren klar  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall \vec{u} \in U$ . Also haben wir  $\vec{v} \in U^\perp$ . Sei nun umgekehrt  $\vec{v} \in U^\perp$  gegeben. Dann haben wir  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall \vec{u} \in U$ . Mit der speziellen Wahl  $\vec{u} := \vec{u}_k \in U$  erhält man also  $\langle \vec{u}_k, \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m$ .

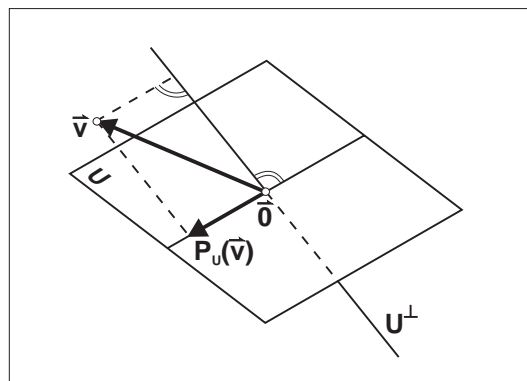
(c) Jedes  $\vec{u} \in U$  erfüllt  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall \vec{v} \in U^\perp$ . Also folgt  $\vec{u} \in U^{\perp\perp}$ .

(d) Wegen  $\dim U \leq \dim V < \infty$  können wir in  $U$  eine ON-Basis festlegen, die sich gemäß Satz 4.12 zu einer ON-Basis von  $V$  ergänzen lässt. Die ergänzenden Basisvektoren spannen nach Satz 4.12 den zu  $U$  komplementären Unterraum  $U^\perp$  auf, und es gilt  $U \oplus U^\perp = V$ .  $\square$

**Bemerkung 4.16** (a) Im Falle  $\dim V < \infty$  gilt für jeden Unterraum  $U \subseteq V$  sogar stets  $U = U^{\perp\perp}$ . Dies folgt unmittelbar aus den direkten Summen

$$U^\perp \oplus U = V = U^\perp \oplus U^{\perp\perp}.$$

(b) Durch die **orthogonale Zerlegung**  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}^\perp$  mit  $\vec{u} \in U$  und  $\vec{u}^\perp \in U^\perp$  wird jeder Vektor  $\vec{v} \in V$  in eindeutiger Weise auf einen Vektor  $P_U(\vec{v}) := \vec{u} \in U$  abgebildet.  $\square$



**Orthogonale Projektion auf den  
Unterraum  $U$**

**Definition 4.27** Der Vektor  $P_U(\vec{v}) \in U$  heie die **orthogonale Projektion** des Vektors  $\vec{v} \in V$  auf den Unterraum  $U \subseteq V$ .

Die orthogonale Projektion hat eine sehr wichtige **Extremaleigenschaft**:

**Satz 4.21** Es seien  $V$  ein endlichdimensionaler Praehilbertraum,  $U \subseteq V$  ein Unterraum und  $\vec{v} \in V$  ein fester Vektor. Dann gilt:

$$\|\vec{v} - P_U(\vec{v})\| = \min_{\vec{u} \in U} \|\vec{v} - \vec{u}\| < \|\vec{v} - \vec{w}\| \quad \forall \vec{w} \in U : \vec{w} \neq P_U(\vec{v}). \quad (9.1)$$

Ist  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$  eine ON-Basis von  $U$ , so gestattet  $P_U(\vec{v})$  die folgende Darstellung:

$$P_U(\vec{v}) = \sum_{k=1}^m \langle \vec{v}, \vec{u}_k \rangle \vec{u}_k. \quad (9.2)$$

*Begründung:* Für jeden Vektor  $\vec{w} \in U$  haben wir (vgl. obige Skizze):

$$\vec{v} - \vec{w} = \underbrace{\vec{v} - P_U(\vec{v})}_{=\vec{u}^\perp \in U^\perp} + \underbrace{P_U(\vec{v}) - \vec{w}}_{\in U} =: \vec{u}^\perp + \vec{x}.$$

Hieraus folgt

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}^\perp + \vec{x}\|^2 = \|\vec{u}^\perp\|^2 + \|\vec{x}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \underbrace{\langle \vec{u}^\perp, \vec{x} \rangle}_{=0} = \|\vec{v} - P_U(\vec{v})\|^2 + \|P_U(\vec{v}) - \vec{w}\|^2.$$

Für  $\vec{w} \neq P_U(\vec{v})$  folgt daraus  $\|\vec{v} - P_U(\vec{v})\| < \|\vec{v} - \vec{w}\|$ , also (9.1). Der Vektor  $P_U(\vec{v}) \in U$  kann in der ON-Basis des Unterraumes  $U$  aufgespannt werden. Wegen  $P_U(\vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}^\perp$  erhält man seine FOURIER-Koeffizienten zu

$$\langle P_U(\vec{v}), \vec{u}_k \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}_k \rangle + \underbrace{\langle \vec{u}^\perp, \vec{u}_k \rangle}_{=0} = \langle \vec{v}, \vec{u}_k \rangle.$$

Hieraus resultiert die Darstellung (9.2). □

**BSP. (4.9.2)** In dem Praehilbertraum  $V := \mathbf{R}^4$  betrachten wir den Unterraum

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in V : x_3 = x_1 - 2x_2 + x_4\}$$

(vgl. das BSP. (4.8.3) in Abschnitt 4.8). Der Unterraum  $U \subset V$  wird von folgender ON-Basis aufgespannt:

$$\vec{u}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)^T, \quad \vec{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1, 0)^T, \quad \vec{u}_3 := \frac{1}{\sqrt{42}}(-1, 2, 1, 6)^T.$$

Die orthogonale Projektion der beiden Vektoren  $\vec{v}_1 := (1, 2, 3, 4)^T$  und  $\vec{v}_2 := (2, 2, 1, 3)^T$  auf  $U$  ist zu berechnen. Wir haben:

$$P_U(\vec{v}_1) = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{v}_1, \vec{u}_k \rangle \vec{u}_k = \frac{4}{\sqrt{2}}\vec{u}_1 + 0\vec{u}_2 + \frac{30}{\sqrt{42}}\vec{u}_3 = \frac{1}{7}(9, 10, 19, 30)^T,$$

$$P_U(\vec{v}_2) = \sum_{k=1}^3 \langle \vec{v}_2, \vec{u}_k \rangle \vec{u}_k = \frac{3}{\sqrt{2}}\vec{u}_1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\vec{u}_2 + \frac{21}{\sqrt{42}}\vec{u}_3 = (2, 2, 1, 3)^T = \vec{v}_2.$$

Das zweite Ergebnis überrascht nicht: der Vektor  $\vec{v}_2$  liegt bereits in  $U$ . Stets gilt nämlich

$$P_U(\vec{v}) = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in U,$$

wie man sich schnell an obiger Skizze klarmacht.

Ist  $M := \vec{p} + U \subseteq V$  ein **affiner Unterraum**, so ist es sinnvoll, den **Abstand** eines Punktes  $\vec{v} \in V$  von  $M$  als **kürzeste Entfernung** (bezüglich einer gegebenen Metrik in  $V$ ) zwischen  $\vec{v}$  und  $M$  zu erklären.

**Definition 4.28** Gegeben sei ein Prähilbertraum  $V$  und eine Untermannigfaltigkeit  $M := \vec{p} + U$  von  $V$ . Für  $\vec{v} \in V$  heie die Zahl

$$d(\vec{v}, M) := \min_{\vec{w} \in M} \|\vec{v} - \vec{w}\| = \min_{\vec{u} \in U} \|\vec{v} - \vec{p} - \vec{u}\|$$

der **Abstand des Punktes  $\vec{v} \in V$  von  $M$** . Gemäß Satz 4.21 haben wir

$$d(\vec{v}, M) = \|\vec{v} - \vec{p} - P_U(\vec{v} - \vec{p})\| = \|P_{U^\perp}(\vec{v} - \vec{p})\|.$$

Sind  $M_i := \vec{p}_i + U_i$  zwei UM von  $V$ , so heie die Zahl

$$d(M_1, M_2) := \min_{\substack{\vec{u}_1 \in U_1 \\ \vec{u}_2 \in U_2}} \|\vec{p}_1 + \vec{u}_1 - \vec{p}_2 - \vec{u}_2\|$$

der **Abstand von  $M_1$  und  $M_2$** . Setzen wir

$$W := U_1 + U_2 = \{\vec{u} \in V : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ mit } \vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2\},$$

so gilt

$$d(M_1, M_2) = \|P_{W^\perp}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\|.$$

**BSP. (4.9.3)** Abstand zweier Ebenen in  $V := \mathbf{R}^4$ . Es seien in  $V$  die Vektoren  $\vec{p}_1 := (4, -1, 2, -3)^T$ ,  $\vec{p}_2 := (3, 2, 1, 4)^T$  sowie  $\vec{u}_{11} := (1, 0, 2, 1)^T$ ,  $\vec{u}_{12} := (1, 1, 0, 2)^T$  und  $\vec{u}_{21} := (2, 2, 3, 4)^T$ ,  $\vec{u}_{22} := (0, 1, 1, 1)^T$  vorgeben, mit denen wir die beiden Ebenen  $E_j := \vec{p}_j + U_j$ ,  $U_j := \text{span}\{\vec{u}_{j1}, \vec{u}_{j2}\}$ ,  $j = 1, 2$ , definieren. Wir berechnen den Abstand  $d(E_1, E_2)$  von  $E_1$  und  $E_2$ .

*1. Schritt:* Wir bestimmen eine Basis fur den Unterraum  $W := U_1 + U_2 = \text{span}\{\vec{u}_{11}, \vec{u}_{12}, \vec{u}_{21}, \vec{u}_{22}\}$  mit Hilfe des GAUSS-Algorithmus:

$$\begin{array}{l}
 A^T := \begin{bmatrix} \vec{u}_{11}^T \\ \vec{u}_{12}^T \\ \vec{u}_{21}^T \\ \vec{u}_{22}^T \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c}
 1 & 0 & 2 & 1 & \\
 1 & 1 & 0 & 2 & \\
 2 & 2 & 3 & 4 & \\
 0 & 1 & 1 & 1 & \\
 \hline
 1 & 0 & 2 & 1 & \\
 Z_2 - Z_1 \Rightarrow Z_2 & 0 & 1 & -2 & 1 & \\
 Z_3 - 2Z_1 \Rightarrow Z_3 & 0 & 2 & -1 & 2 & \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
 \hline
 Z_2 \Leftrightarrow Z_4 & 1 & 0 & 2 & 1 & = \vec{u}_1^T \\
 Z_3 - 2Z_2 \Rightarrow Z_3 & \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & = \vec{u}_2^T \\
 Z_4 - Z_2 \Rightarrow Z_4 & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 & = \vec{u}_3^T \\
 Z_4 - Z_3 \Rightarrow Z_4 & & & & & \\
 -\frac{1}{3}Z_3 \Rightarrow Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 \hline
 \end{array} \Rightarrow \text{S-System, Typ (II)}.
 \end{array}$$



Wir haben also  $W = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ , und der Ergänzungsraum wird von dem Vektor  $\vec{u}_4 := (0, 0, 0, 1)^T$  aufgespannt.

*2.Schritt:* Mit Hilfe des SCHMIDT'schen Orthonormalisierungsverfahrens formen wir nun das Vektorsystem  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$  in ein ON-System  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$  um. Man erhält mit elementarer, aber etwas länglicher Rechnung:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nun gilt

$$W^\perp = \text{span}\{\vec{v}_4\} = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 0, 1)^T\right\},$$

und tatsächlich überzeugt man sich sehr einfach, dass der Vektor  $\vec{v}_4$  senkrecht steht auf den Vektoren  $\vec{u}_{11}, \vec{u}_{12}, \vec{u}_{21}, \vec{u}_{22}$ , also auch auf  $U_1$  und  $U_2$ . Es gilt nun  $P_{W^\perp}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = \langle \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \vec{v}_4 \rangle \vec{v}_4 = -\frac{5}{\sqrt{3}} \vec{v}_4$ , und hieraus resultiert schließlich

$$d(E_1, E_2) = \|P_{W^\perp}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\| = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Ist die Untermannigfaltigkeit  $M$  eine **Hyperebene** in  $V$ , gilt also  $H := M = \vec{p} + U$  mit  $\dim U = \dim V - 1$ , so hat man  $\dim U^\perp = 1$ . Folglich gilt  $U^\perp = \text{span}\{\vec{n}\}$  mit einem Vektor  $\vec{0} \neq \vec{n} \in V$ .

**Definition 4.29** *Es seien  $V$  ein Prachilbertraum mit  $\dim V < \infty$ , ferner  $U \subset V$  ein Unterraum mit  $\dim U = \dim V - 1$  und  $\vec{p} \in V$  ein fester Vektor. Dann heiÙe jeder Vektor  $\vec{0} \neq \vec{n} \in U^\perp$  eine **Normale an die Hyperebene**  $H = \vec{p} + U$ .*

**Satz 4.22** (a) *Ist  $\vec{n} \in V$  eine Normale an die Hyperebene  $H = \vec{p} + U$ , so gilt die Darstellung*

$$H = \{\vec{v} \in V : \langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{n} \rangle = 0\} = \{\vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = \text{const}\}.$$

(b) *Sind  $\vec{0} \neq \vec{n} \in V$  und  $\alpha \in \mathbf{K}$  vorgegeben, so ist durch*

$$H := \{\vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle - \alpha = 0\} \tag{9.3}$$

*genau eine Hyperebene in dem endlichdimensionalen Prachilbertraum  $V$  bestimmt. Die Darstellung (9.3) heiÙt **HESSESche Normalform** einer Hyperebene in  $V$ .*

*Begründungen:* (a) Wegen  $U^\perp = \text{span}\{\vec{n}\}$  und wegen  $\vec{v} - \vec{p} \in U \forall \vec{v} \in H$  gilt immer  $\vec{v} - \vec{p} \perp \vec{n}$ , oder äquivalent  $\langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{n} \rangle = 0$ .

(b) Offensichtlich ist

$$H := \alpha \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} + (\text{span}\{\vec{n}\})^\perp$$

eine Hyperebene in  $V$ , und diese hat gemäß (a) die Darstellung (9.3). □

**Bemerkung 4.17** (a) die Aussagen (a) und (b) in Satz 4.22 bleiben richtig, wenn der Normalenvektor  $\vec{n}$  durch den **Einheitsnormalenvektor** (die **Einheitsnormale**)

$$\vec{n}_0 := \pm \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \quad (9.4)$$

ersetzt wird.

(b) Ist  $V$  ein **EUKLIDISCHER Vektorraum** (also **reell**), so kann in (9.4) das Vorzeichen stets so gewählt werden, dass  $\langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle \geq 0$  gilt. In diesem Fall gibt

$$d(\vec{0}, H) = \|\langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle \vec{n}_0\| = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle \geq 0$$

den **Abstand der Hyperebene  $H$  vom Ursprung  $\vec{0}$**  an.

(c) Es seien  $V$  und  $\vec{n}_0$  wie in (b) gegeben. Dann heie

$$d^*(\vec{w}, H) := \langle \vec{w} - \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle$$

der **orientierte Abstand des Punktes  $\vec{w} \in V$  von der Hyperebene  $H$** . Es gilt:

$$d^*(\vec{w}, H) \text{ ist } \begin{cases} \text{negativ, falls } \vec{0} \text{ und } \vec{w} \text{ auf einer Seite von } H \text{ liegen,} \\ \text{positiv, falls } \vec{0} \text{ und } \vec{w} \text{ auf entgegengesetzten Seiten von } H \text{ liegen.} \end{cases}$$

**BSP. (4.9.4)** Ebenen (= Hyperebenen) in  $\mathbf{R}^3$ . In  $V := \mathbf{R}^3$  sei die Untermannigfaltigkeit  $E$  durch die Gleichung

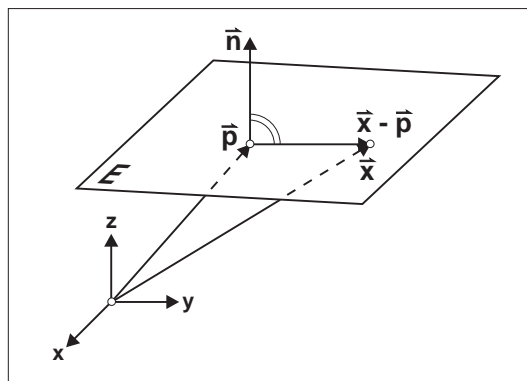
$$E := \{\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3 : ax + by + cz = d\}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ fest,}$$

gegeben. Mit Hilfe des Vektors  $\vec{n} := (a, b, c)^T \neq \vec{0}$  erhält man unter Verwendung des Standardskalarproduktes die folgende Darstellung:

$$E = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = d\}.$$

Dies ist gemäß Satz 4.22 die **HESSESCHE Normalform** einer Hyperebene in  $\mathbf{R}^3$ . Mit einem festen Vektor  $\vec{p} \in E$  folgt wegen  $\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = d$  nun auch

$$\langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{n} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = \text{const } \forall \vec{x} \in E.$$



**Geometrische Interpretation der HESSESCHEN Normalform einer Ebene  $E$  in  $\mathbf{R}^3$**

Die obige Gleichung kann **geometrisch** in der folgenden Weise interpretiert werden: Die Vektoren  $\vec{x} - \vec{p} \forall \vec{x} \in E$  stehen senkrecht auf dem Vektor  $\vec{n}$ . Die Untermannigfaltigkeit  $E \subset \mathbf{R}^3$  ist eine **Ebene**. Wegen  $\vec{n} \perp E$  fällt das **Lot** von  $\vec{0}$  auf  $E$  in die Richtung  $\vec{n}$ . Das heißt, die **orthogonale Projektion** von  $\vec{p}$  auf den Unterraum  $\text{span}\{\vec{n}\}$  ist das **Lot** von  $\vec{0}$  auf  $E$ .

**Definition 4.30** Eine Gleichung der Form  $ax + by + cz = d$  mit nicht gleichzeitig verschwindenden Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  heie **allgemeine Ebenengleichung** einer Ebene  $E \subset \mathbf{R}^3$ . Der Vektor

$$\vec{n} := (a, b, c)^T$$

heie **Normalenvektor** an  $E$ . Er steht senkrecht auf der Ebene  $E$ . Der Vektor

$$\vec{n}_0 := \frac{\pm \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (a, b, c)^T$$

heie **Einheitsnormale** (nvektor) an  $E$ . Bei geeigneter Wahl des Vorzeichens von  $\vec{n}_0$  gibt die Zahl

$$d(\vec{0}, E) := \frac{d}{\pm \|\vec{n}\|} = \frac{d}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq 0 \quad (\text{Vorzeichenwahl!})$$

den **Abstand** der Ebene  $E$  vom Ursprung  $\vec{0}$  an. Einheitsnormale  $\vec{n}_0$  zusammen mit einem Punkt  $\vec{p} \in E$  oder zusammen mit dem Abstand  $d(\vec{0}, E)$  legen die Ebene  $E$  eindeutig fest:

$$\langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = d(\vec{0}, E), \quad (\text{HESSESche Normalform}).$$

Zum Beispiel laute die allgemeine Ebenengleichung einer Ebene  $E \subset \mathbf{R}^3$ :

$$x - 2y + 3z + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2y - 3z = 5. \quad \text{Vorzeichenwahl getroffen: } d > 0.$$

- Normalenvektor:  $\vec{n} = (-1, 2, -3)^T$ ;
- Einheitsnormale:  $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} (-1, 2, -3)^T$ ;
- Abstand der Ebene  $E$  vom Ursprung  $\vec{0}$ :  $d(\vec{0}, E) = \frac{5}{\sqrt{14}} > 0$ ;
- HESSESche Normalform:  $\langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (-x + 2y - 3z)$ .

**BSP. (4.9.5)** Parameterdarstellung von  $E \Leftrightarrow$  HESSESche Normalform von  $E$ .

Es ist klar, da beide Formen dieselbe Ebene darstellen, müssen sich beide Darstellungen auch ineinander überführen lassen.

(i) Es sei die HESSESche Normalform (HNF) der Ebene  $E$  gegeben:

$$E := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = d(\vec{0}, E)\}.$$

Man wähle in dieser Menge drei Vektoren  $\vec{p}, \vec{x}_1, \vec{x}_2$  so, dass die beiden Vektoren  $\vec{u}_1 := \vec{x}_1 - \vec{p}$  und  $\vec{u}_2 := \vec{x}_2 - \vec{p}$  LU sind. In diesem Falle resultiert bereits die Parameterdarstellung

$$E = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{p} + \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}. \quad (9.5)$$

Man verschafft sich die drei gesuchten Vektoren  $\vec{p}, \vec{x}_1, \vec{x}_2$  durch Einsetzen von Zahlen  $x, y, z$  in die HNF. Bei einer Ebene  $E$  in "allgemeiner" Lage (das heißt,  $E$  liegt nicht parallel zu einer der drei *Koordinatenebenen*), können in der Regel durch Einsetzen der drei Zahlentupel  $(x = 0, y = 1), (y = 0, z = 1), (z = 0, x = 1)$  in die HNF die drei gesuchten Vektoren bestimmt werden. Wir betrachten als Beispiel die Ebene  $E$  aus BSP. (4.9.4) mit der HNF

$$\langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (-x + 2y - 3z) \Leftrightarrow -x + 2y - 3z = 5.$$

Wir verwenden die letzte Gleichung und erhalten

$$\left. \begin{array}{l} (x = 0, y = 1) \Rightarrow \vec{p} = (0, 1, -1)^T, \\ (y = 0, z = 1) \Rightarrow \vec{x}_1 = (-8, 0, 1)^T, \\ (z = 0, x = 1) \Rightarrow \vec{x}_2 = (1, 3, 0)^T, \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (-8, -1, 2)^T, \\ \vec{u}_2 = (1, 2, 1)^T, \end{array} \right\} \text{LU.}$$

Die gesuchte Parameterdarstellung lautet nun

$$E = \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = (0, 1, -1)^T + \lambda_1 (-8, -1, 2)^T + \lambda_2 (1, 2, 1)^T, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \}.$$

(ii) Gegeben sei nun eine Parameterdarstellung (9.5) der Ebene  $E$ . Für die Darstellung von  $E$  in der HESSESchen Normalform  $\langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = 0$  verfügen wir bereits über den Aufhängepunkt  $\vec{p}$ , den wir (9.5) entnehmen. Die Einheitsnormale  $\vec{n}_0$  muss nun so bestimmt werden, dass die Orthogonalitätsrelationen  $\vec{u}_1 \perp \vec{n}_0 \perp \vec{u}_2$  gelten. Zur Lösung dieser Aufgabe führen wir ein **spezielles Produkt** ein, welches zwei Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3$  einen Vektor  $\vec{z} \in \mathbf{R}^3$  mit  $\vec{x} \perp \vec{z} \perp \vec{y}$  zuordnet.

**Definition 4.31** In der Standardbasis des  $\mathbf{R}^3$  seien zwei Vektoren  $\vec{x} := (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$  und  $\vec{y} := (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbf{R}^3$  gegeben. Dann heie der durch die Vorschrift

$$\vec{z} := \vec{x} \times \vec{y} := \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

definierte Vektor  $\vec{z} \in \mathbf{R}^3$  das **Vektorprodukt (Kreuzprodukt)** der Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ .

Zum Beispiel: Das Vektorprodukt der beiden Vektoren  $\vec{u}_1 := (-8, -1, 2)^T$  und  $\vec{u}_2 := (1, 2, 1)^T$  ist der Vektor  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (-5, 10, -15)^T$ .

**Beachte:** Das Vektorprodukt ist **nur** in dem EUKLIDischen Vektorraum  $\mathbf{R}^3$  erklärt!

**Satz 4.23** Bezüglich des Standardskalarproduktes steht der Vektor  $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbf{R}^3$  **senkrecht** auf beiden Vektoren  $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$  und  $\vec{y} \in \mathbf{R}^3$ :

$$\vec{x} \perp \vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}.$$

*Begründung:* Offenbar gilt nach Definition

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 - x_2 x_1 y_3 + x_3 x_1 y_2 - x_3 x_2 y_1 = 0,$$

und mit ähnlicher Rechnung erhält man auch  $\langle \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y} \rangle = 0$ . □

Wir folgern aus diesem Satz, dass der oben berechnete Vektor  $\vec{n} := \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (-5, 10, -15)^T$

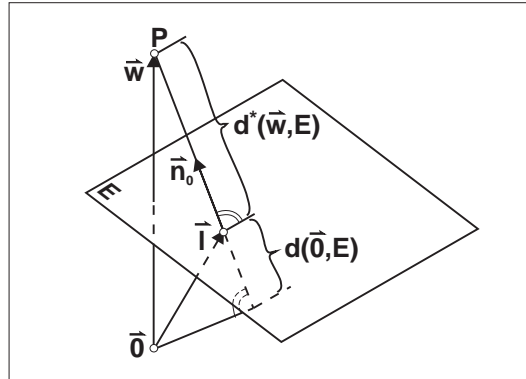
die geforderten Orthogonalitätsrelationen  $\vec{u}_1 \perp \vec{n} \perp \vec{u}_2$  erfüllt. Durch Normierung erhalten wir die Einheitsnormale und daraus schließlich die gesuchte HESSESche Normalform:

$$\text{Einheitsnormale: } \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1, 2, -3)^T; \quad \text{HNF: } \langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

**BSP. (4.9.6)** Lotfußpunkt und Abstand eines Punktes  $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$  von einer Ebene  $E$  bzw. einer Geraden  $G$ .

Wird das **Lot** von einem Punkt  $P \in A_3$  mit Ortsvektor  $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$  auf eine Ebene  $E$  gefällt, so gilt für die **Länge**  $d^*(\vec{w}, E)$  **des Lotes** (das ist der Abstand des Punktes  $P$  von der Ebene  $E$ ):

$$d^*(\vec{w}, E) = \langle \vec{w}, \vec{n}_0 \rangle - d(\vec{0}, E).$$



Abstand des Punktes  $\vec{w}$  von der Ebene  $E$

Hier sind die Einheitsnormale  $\vec{n}_0$  und der Abstand  $d(\vec{0}, E)$  der Ebene  $E$  vom Ursprung  $\vec{0}$  aus der HESSESchen Normalform  $\langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = d(\vec{0}, E)$  der Ebene  $E$  zu entnehmen.

**Beachte:**  $d^*(\vec{w}, E)$  ist **negativ**, wenn die Punkte  $\vec{0}$  und  $\vec{w}$  auf der gleichen Seite der Ebene  $E$  liegen, vgl. obige Skizze!

Der **Lotfußpunkt** mit dem Ortsvektor  $\vec{\ell}$  liegt auf der Geraden  $G := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{w} + \lambda \vec{n}_0, \lambda \in \mathbf{R}\}$ . Er bildet also die **Schnittmannigfaltigkeit**  $G \cap E$ :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\ell} \in G \Rightarrow \vec{\ell} = \vec{w} + \lambda \vec{n}_0, \\ \vec{\ell} \in E \Rightarrow \langle \vec{\ell}, \vec{n}_0 \rangle = d(\vec{0}, E) \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \vec{\ell}, \vec{n}_0 \rangle = \langle \vec{w}, \vec{n}_0 \rangle + \lambda = d(\vec{0}, E).$$

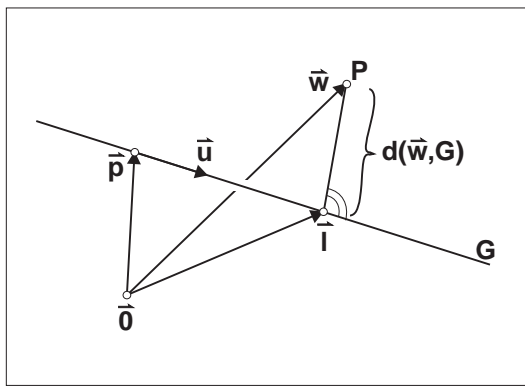
Durch Auflösen nach  $\lambda$  resultiert  $\lambda = d(\vec{0}, E) - \langle \vec{w}, \vec{n}_0 \rangle = -d^*(\vec{w}, E)$ , und somit

$$\vec{\ell} = \vec{w} - d^*(\vec{w}, E) \vec{n}_0.$$

Zum *Beispiel* seien die Ebene  $E := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : 2x - y + 2z + 5 = 0\}$  und der Punkt  $\vec{w} := (1, 2, 3)^T \in \mathbf{R}^3$  gegeben. Dann ist  $\vec{n}_0 = \frac{1}{3}(-2, 1, -2)^T$  die Einheitsnormale, und es resultiert die HNF  $\langle \vec{x}, \vec{n}_0 \rangle = \frac{5}{3} =: d(\vec{0}, E)$ . Wir erhalten den Abstand  $d^*(\vec{w}, E) = \langle \vec{w}, \vec{n}_0 \rangle - d(\vec{0}, E) = -\frac{6}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}$  des Punktes  $\vec{w}$  von  $E$ . Hiermit resultiert schließlich der Lotfußpunktvektor

$$\vec{\ell} = \vec{w} - d^*(\vec{w}, E) \vec{n}_0 = (1, 2, 3)^T + \frac{11}{9}(-2, 1, -2)^T = \frac{1}{9}(-13, 29, 5)^T.$$

Um den **Abstand** des Punktes  $\vec{w}$  von einer **Geraden**  $G \subset \mathbf{R}^3$  zu berechnen, verwenden wir ebenfalls den **Lotfußpunkt** des Lotes von  $\vec{w}$  auf  $G$ .



**Abstand und Lotfußpunkt eines Punktes  $\vec{w}$  bezüglich einer Geraden  $G$**

Es sei  $\vec{\ell}$  der Ortsvektor des Lotfußpunktes von  $\vec{w} \in \mathbf{R}^3$  auf der Geraden  $G := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbf{R}\}$ . Wegen  $\vec{w} - \vec{\ell} \perp \vec{u}$  ist also  $\vec{\ell}$  eindeutig bestimmt durch die zwei Bedingungen  $\vec{\ell} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$  und  $\langle \vec{w} - \vec{\ell}, \vec{u} \rangle = 0$ . Einsetzen der ersten Bedingung in die zweite führt auf  $\langle \vec{w} - \vec{p}, \vec{u} \rangle - \lambda \|\vec{u}\|^2 = 0$ , und hieraus kann  $\lambda$  berechnet werden. Es folgt:

$$\text{Lotfußpunkt: } \vec{\ell} = \vec{p} + \frac{\langle \vec{w} - \vec{p}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}, \quad \text{Abstand: } d(\vec{w}, G) = \|\vec{w} - \vec{\ell}\|.$$

Zum Beispiel seien die Gerade  $G := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbf{R}\}$  mit  $\vec{p} := (1, -4, 3)^T$  und  $\vec{u} := (1, 7, -7)^T$  sowie der Punkt  $\vec{w} := (1, 2, 3)^T$  gegeben. Dann gilt  $\|\vec{u}\|^2 = 99$ ,  $\langle \vec{w} - \vec{p}, \vec{u} \rangle = 42$ , und somit  $\vec{\ell} = (1, -4, 3)^T + \frac{42}{99} (1, 7, -7)^T = \frac{1}{33} (47, -34, 1)^T$ . Wir erhalten den folgenden Abstand des Punktes  $\vec{w}$  von der Geraden  $G$ :

$$d(\vec{w}, G) = \|\vec{w} - \vec{\ell}\| = \frac{2}{33} \sqrt{4950} = \frac{10}{11} \sqrt{22}.$$

**BSP. (4.9.7) Schnittgerade zweier Ebenen  $E_1$  und  $E_2$ .**

Die Bestimmung der Schnittmannigfaltigkeit  $E_1 \cap E_2$  für zwei Ebenen  $E_1, E_2$  in  $\mathbf{R}^3$  wird sehr einfach, wenn für  $E_1, E_2$  **allgemeine Ebenengleichungen** oder **HESSESche Normalformen** vorliegen:

$$E_j := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : a_j x + b_j y + c_j z = d_j\}, \quad j = 1, 2.$$

Voraussetzung für  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$  ist die Bedingung  $E_1 \nparallel E_2$ . Das heißt, die beiden **Normalenvektoren**  $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)^T$  und  $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)^T$  müssen **linear unabhängig** sein. In diesem Falle gilt für die Schnittgerade  $E_1 \cap E_2 = G := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbf{R}\}$  die Bedingung  $\vec{n}_1 \perp G \perp \vec{n}_2$ . Die **Richtung**  $\vec{u}$  von  $G$  erhält man somit gemäß

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Den **Aufhängepunkt**  $\vec{p} = (x, y, z)^T$  von  $G$  erhält man durch Bestimmen einer **speziellen Lösung** des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \end{cases}$$

zum Beispiel durch Wahl von  $x = 0$  oder  $y = 0$  oder  $z = 0$ .

Als **Zahlenbeispiel** seien die Ebenen  $E_1 := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : x + y - z = 0\}$  und  $E_2 := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : 2y - z = 1\}$  vorgelegt. Mit  $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)^T$  und  $\vec{n}_2 = (0, 2, -1)^T$  resultiert die Richtung

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 1, 2)^T,$$

während aus dem linearen Gleichungssystem

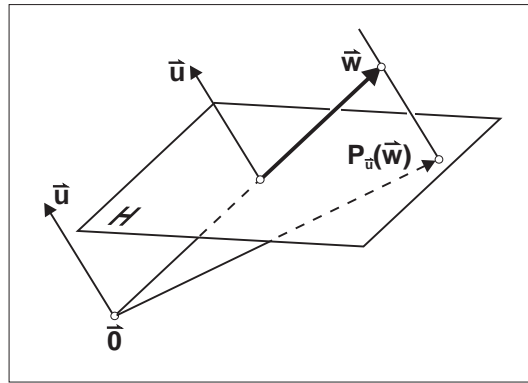
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0, \\ 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

durch Wahl von  $x = 0$  die spezielle Lösung  $\vec{p} = (0, 1, 1)^T$  ermittelt werden kann. Also folgt

$$E_1 \cap E_2 = \{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = (0, 1, 1)^T + \lambda (1, 1, 2)^T, \lambda \in \mathbf{R} \}.$$

**BSP. (4.9.8)** Projektion eines Vektors  $\vec{w} \in V$  auf eine Hyperebene  $H \subset V$  in vorgegebener Projektionsrichtung  $\vec{u} \in V$ .

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler Praehilbertraum, in welchem eine Hyperebene  $H$  in der HESSESchen Normalform  $H = \{ \vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle - \alpha = 0 \}$  vorliege. Wir geben Vektoren  $\vec{u}, \vec{w} \in V$  vor und wollen die Projektion  $P_{\vec{u}}(\vec{w})$  von  $\vec{w}$  in Richtung  $\vec{u}$  auf die Hyperebene  $H$  bestimmen.



Projektion des Punktes  $\vec{w}$  in Richtung  $\vec{u}$  auf eine Hyperebene  $H$

Die Projektion  $P_{\vec{u}}(\vec{w})$  muss die zwei Bedingungen (i)  $P_{\vec{u}}(\vec{w}) = \vec{w} + \lambda \vec{u}$  und (ii)  $P_{\vec{u}}(\vec{w}) \in H$  erfüllen. Setzt man also (i) in die HNF der Hyperebene  $H$  ein, so findet man  $\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle + \lambda \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = \alpha$ . Falls  $\vec{u} \not\parallel H$  ist, so gilt  $\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle \neq 0$ , und es resultiert:

$$P_{\vec{u}}(\vec{w}) = \vec{w} - \frac{\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle - \alpha}{\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle} \vec{u}.$$

**Sonderfall: Orthogonale Projektion.**

Bei orthogonaler Projektion von  $\vec{w}$  auf  $H$  haben wir  $\vec{u} = \vec{n}$  zu setzen. Wir erhalten

$$P_H(\vec{w}) = \vec{w} - \frac{\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle - \alpha}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \vec{w} - [\langle \vec{w}, \vec{n}_0 \rangle - d(\vec{0}, H)] \vec{n}_0,$$

und dies ist wiederum der **Lotfußpunkt** des Lotes von  $\vec{w}$  auf  $H$ . Die **Länge** des Lotes beträgt

$$d(\vec{w}, H) = \|\vec{w} - P_H(\vec{w})\| = \frac{1}{\|\vec{n}\|} |\langle \vec{w}, \vec{n} \rangle - \alpha|.$$

# Kapitel 5

## Matrizen

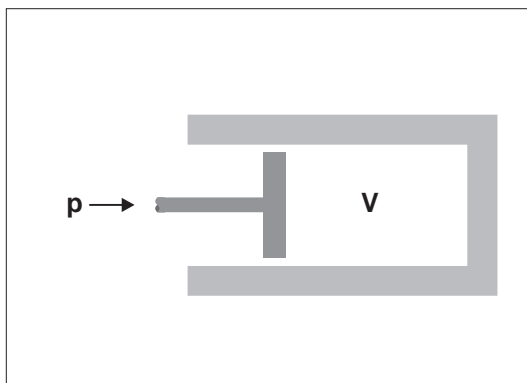
### 5.1 Abbildungen, Funktionen

Der Inhalt dieses Abschnitts vertieft die Ausführungen von Abschnitt 1.4.1.

Zahlreiche physikalische und technische Vorgänge werden durch **Funktionen** beschrieben. Wir nennen hier das Beispiel eines *idealen Gases*, welches bei konstanter Temperatur in einem Kolben eingeschlossen sei. Nach dem BOYLE-MARIOTTE-Gesetz besteht der folgende **funktionale Zusammenhang** zwischen dem Druck  $p$  und dem Volumen  $V$ :

$$pV = c = \text{const} (= RT),$$

worin  $T$  die Temperatur des Gases,  $R$  die ideale Gaskonstante bezeichnet.



**Zum BOYLE-MARIOTTE-Gesetz von  
idealen Gasen**

Hier kann der Druck  $p$  als **Funktion** des Volumens  $V$  aufgefasst werden:

$$p(V) = \frac{c}{V}.$$

Funktionen oder Abbildungen sind **spezielle Korrespondenzen** mit der Abbildungseigenschaft (A), wie wir in Definition 1.11 festgestellt haben. Wir betrachten nun stets **nichtleere** Mengen  $X, Y$  sowie den Funktionenraum  $\text{Abb}(X, Y)$  aller Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ . Die überaus wichtigen Begriffe der Surjektivität, Injektivität und Bijektivität für  $f \in \text{Abb}(X, Y)$  sollen hier nochmals in Erinnerung gebracht werden.

**Definition 5.1** Gegeben seien Mengen  $X, Y$  und eine Funktion  $f \in \text{Abb}(X, Y)$ .

(a) Für  $A \subset X$  heiÙe  $f(A) := \bigcup_{x \in A} f(x) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ und } x \in A\}$  die **Bildmenge**



von  $A$  unter  $f$ . Man setzt  $\text{Bild } f := f(X)$ .

(b) Für  $B \subset \text{Bild } f$  heie  $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$  die **Urbildmenge** von  $B$  bezüglich  $f$ . Speziell für  $b \in \text{Bild } f$  heie  $f^{-1}(b) := \{a \in X : f(a) = b\}$  die **Lösungsmenge** der Gleichung  $f(x) = b$ .

(c) Die Funktion  $f$  heie

- **surjektiv** (oder **Abbildung auf**), wenn gilt:  $f(X) = Y$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\boxed{\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x),}$$

- **injektiv** (oder **eindeutige Abbildung**), wenn gilt:

$$\boxed{x_1, x_2 \in X \text{ und } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.}$$

In Worten: Jedes Bild  $y \in f(X)$  hat genau ein Urbild  $x \in X$ ,

- **bijektiv** (oder **eindeutige Abbildung auf**), wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

(d) Ist  $f$  bijektiv, so wird durch

$$\boxed{f^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : y = f(x) \text{ und } y \in Y\}}$$

die **Umkehrabbildung**  $f^{-1}$  von  $f$  definiert (denn jedem Element  $y \in Y$  wird genau ein Element  $x \in X$  zugeordnet), und wir schreiben wieder  $x = f^{-1}(y)$  anstelle von  $(y, x) \in f^{-1}$ . Es ist  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  ebenfalls bijektiv, und es gilt  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

**BSP. (5.1.1)** (a) Jede **Funktion einer reellen Veränderlichen**  $x$  ist eine Abbildung, insbesondere  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f(x) := \sin x$  oder  $f(x) := \cos x$ . Beide Abbildungen sind weder injektiv noch surjektiv, denn es gilt ja  $f(\mathbf{R}) = [-1, 1]$  und zum Beispiel  $\sin 0 = \sin \pi = 0 = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2}$ . Hingegen ist die Funktion  $f(x) = 2x + 1$  bijektiv, denn für jedes  $y \in \mathbf{R}$  ist  $x := \frac{1}{2}(y - 1) \in \mathbf{R}$  genau das Element mit  $y = f(x)$ .

(b) Es sei  $X := Y := \mathbf{N}$ .

- $f(x) := \begin{cases} 2 & : x = 1, \\ x & : x > 1 \end{cases}$  ist weder surjektiv noch injektiv, (da  $1 \notin f(\mathbf{N})$  und  $f(1) = 2 = f(2)$ );
- $f(x) := x + 1$  ist injektiv, aber nicht surjektiv, (da  $1 \notin (\mathbf{N})$ );
- $f(x) := \begin{cases} 1 & : x = 1, \\ x - 1 & : x > 1 \end{cases}$  ist surjektiv, aber nicht injektiv, (da  $f(1) = 1 = f(2)$ );
- $f(x) := \begin{cases} 2 & : x = 1, \\ 1 & : x = 2, \\ x & : x > 2 \end{cases}$  ist bijektiv.

(c) Für eine gegebene Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  und für gegebenes  $b \in Y$  hat die Gleichung  $f(x) = b$

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \text{stets} \\ \text{höchstens} \\ \text{genau} \end{array} \right\} \text{ eine Lösung } x \in X, \text{ falls } f \left\{ \begin{array}{l} \text{surjektiv} \\ \text{injektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\} \text{ ist.}$$

**BSP. (5.1.2)** (a) Die Funktion  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  mit  $f(z) := a_1 z + a_0$ ,  $a_1 \neq 0$ , ist bijektiv. Die Umkehrabbildung  $f^{-1} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  ist gegeben durch  $f^{-1}(\zeta) := (\zeta - a_0)/a_1$ .

(b) Die Bijektivität geht bereits bei Polynomen 2. Grades verloren. Zum Beispiel ist  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f(x) := x^2$  weder injektiv noch surjektiv. Betrachtet man jedoch die **Einschränkung** von  $f$  auf  $\mathbf{R}_+ := (0, +\infty)$ :

$$f|_{\mathbf{R}_+} =: \tilde{f} \in \text{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+) \text{ mit } \tilde{f}(x) := \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{R}_+, \\ \emptyset, & x \leq 0, \end{cases}$$

so ist  $\tilde{f}$  bijektiv. Die Umkehrabbildung ist  $\tilde{f}^{-1}(y) := \sqrt{y}$ ,  $y > 0$ . Ganz analog ist die Einschränkung

$$f|_{\mathbf{R}_-} =: \tilde{f} \in \text{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+) \text{ mit } \tilde{f}(x) := \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{R}_-, \\ \emptyset, & x \geq 0, \end{cases}$$

bijektiv, und ihre Umkehrabbildung ist  $\tilde{f}^{-1}(y) := -\sqrt{y}$ ,  $y > 0$ .

medskip

Wie das BSP. (5.1.2(b)) lehrt, ist es häufig sinnvoll, Funktionen  $f \in \text{Abb}(X, Y)$  nur auf einer **Teilmenge** von  $X$  zu erklären, obwohl sie **formelmäßig** auf ganz  $X$  vorliegen. In diesem Sinne definieren wir:

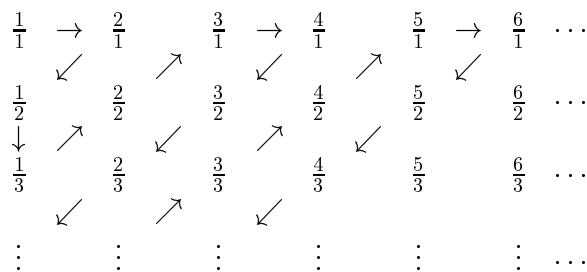
**Definition 5.2** Gegeben sei eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$ . Dann heie die Menge  $D(f) := \{x \in X : f(x) \neq \emptyset\} \subset X$  der **Definitionsbereich** von  $f$ . Ist  $X$  die maximale Menge, auf der  $f$  durch einen formelmäßigen Ausdruck sinnvoll erklärt werden kann, so heie  $X$  der **maximale Definitionsbereich** von  $f$ .

**Beachte:** Definitionsbereich und Bildbereich beeinflussen die Eigenschaften einer Abbildung ganz wesentlich!

**Definition 5.3** (a) Zwei Mengen  $X, Y$  heißen **gleichmächtig**, wenn es eine **bijektive** Abbildung  $f \in \text{Abb}(X, Y)$  mit  $D(f) = X$  gibt.

(b) Eine Menge  $X$  heie **abzählbar**, wenn es eine **injektive** Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbf{N}$  mit  $D(f) = X$  gibt. Die Menge  $X$  heie **unendlich**, wenn es eine **injektive** Abbildung  $g : \mathbf{N} \rightarrow X$  mit  $D(g) = \mathbf{N}$  gibt. Andernfalls heie  $X$  **endlich**.

Zum Beispiel ist die Menge  $\mathbf{G} := \{n \in \mathbf{N} : n = 2m \text{ mit } m \in \mathbf{N}\}$  **abzählbar unendlich**, denn die Abbildung  $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{G}$  mit  $g(m) := 2m \forall m \in \mathbf{N}$  ist bijektiv. Ebenso ist die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbf{Q} := \{r \in \mathbf{R} : r = p/q \text{ mit } p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}$  **abzählbar unendlich**. Beschränkt man sich zunächst nur auf die positiven rationalen Zahlen  $\mathbf{Q}_+$ , so kann eine bijektive Abbildung  $f : \mathbf{Q}_+ \rightarrow \mathbf{N}$  in der folgenden Weise konstruiert werden:

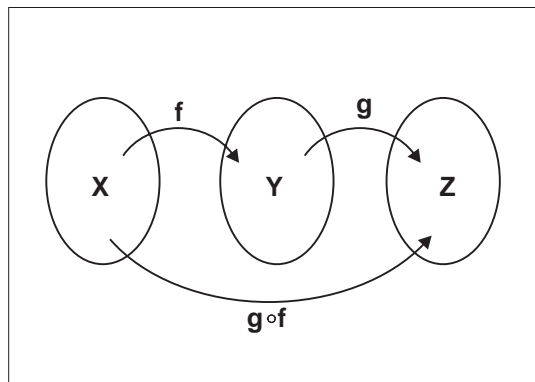


Dieses Schema wird in der durch die Pfeile angegebenen Reihenfolge durchgezählt. Mehrfach auftretende rationale Zahlen werden nur einmal gezählt. Man ordnet der an  $n$ -ter Stelle auftretenden rationalen Zahl  $r$  die natürliche Zahl  $n$  zu.

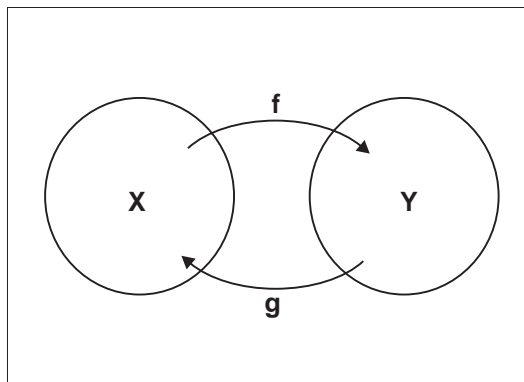
**Definition 5.4** Sind  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen mit  $\text{Bild } f \subseteq D(g)$ , so heie  $h := g \circ f : X \rightarrow Z$  mit  $h(x) := g[f(x)]$  die **Hintereinanderausführung** oder das **Kompositum** von  $f$  und  $g$ . Das Kompositum ist **assoziativ**, aber nicht kommutativ:

$$(g \circ f) \circ k = g \circ (f \circ k), \text{ aber } g \circ f \neq f \circ g \text{ im allgemeinen,}$$

falls sämtliche Abbildungen erklärt sind.



Das Kompositum von  $f$  und  $g$



Die inverse Abbildung

**BSP. (5.1.3)** (a) Es seien  $\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \overline{\mathbf{R}}_+ := [0, +\infty)$  mit  $f(x) := a_1x + a_0$ ,  $a_1 \neq 0$ , und  $g(x) := x^2$  gegeben. Dann gilt:

$$(g \circ f)(x) = (a_1x + a_0)^2, \quad (f \circ g)(x) = a_1x^2 + a_0 \neq (g \circ f)(x).$$

(b) Für jede Funktion  $f \in \text{Abb}(X, Y)$  gelten  $f \circ \text{Id}_X \in \text{Abb}(X, Y)$  und  $f \circ \text{Id}_X = f$  sowie  $\text{Id}_Y \circ f \in \text{Abb}(X, Y)$  und  $\text{Id}_Y \circ f = f$ .

**Definition 5.5** Es seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow X$  Abbildungen.

(a) Die Abbildung  $g$  heie **Linksinverse** von  $f$  falls gilt:

$$\text{Bild } f \subseteq D(g) \text{ und } g \circ f = \text{Id}_X.$$

Ist  $f$  **injektiv** mit  $D(f) = X$ , so existiert stets eine Linksinverse.

(b) Die Abbildung  $g$  heie **Rechtsinverse** von  $f$  falls gilt:

$$\text{Bild } g \subseteq D(f) \text{ und } f \circ g = \text{Id}_Y.$$

Ist  $f$  **surjektiv** mit  $D(f) = X$ , so existiert stets eine Rechtsinverse.

(c) Die Abbildung  $g$  heie **Inverse** von  $f$ , wenn  $g$  sowohl Rechts- als auch Linksinverse von  $f$  ist. Die Inverse  $g$  existiert genau dann, wenn  $f$  **bijektiv** ist. Man schreibt  $f^{-1} := g$  und hat

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y.$$

**BSP. (5.1.4)** (a) Die Funktion  $f : \mathbf{R} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  mit  $f(x) := x^2$  ist **surjektiv**. Sie besitzt die **Rechtsinverse**  $g : \overline{\mathbf{R}}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $g(x) := \sqrt{x}$ . Denn offenbar gilt  $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x})^2 = x \forall x \geq 0$ , also  $f \circ g = \text{Id}_{\overline{\mathbf{R}}_+}$ .

(b) Die Funktion  $f : \overline{\mathbf{R}}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f(x) := x^2$  ist **injektiv**. Sie besitzt die **Linksinverse**  $g : \mathbf{R} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  mit  $g(x) := \sqrt{|x|}$ . Denn offenbar gilt  $(g \circ f)(x) = \sqrt{|x^2|} = x \ \forall x \geq 0$ , also  $g \circ f = Id_{\overline{\mathbf{R}}_+}$ .

(c) Die Abbildung  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $f(x) := x^5$  ist **bijektiv**. Sie besitzt die **Inverse**  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  mit  $g(x) := \text{sign}(x) \cdot \sqrt[5]{|x|}$ . Denn offenbar gilt  $(g \circ f)(x) = \text{sign}(x^5) \cdot \sqrt[5]{|x^5|} = |x| \cdot \text{sign}(x) = x \ \forall x \in \mathbf{R}$  sowie  $(f \circ g)(x) = (\text{sign}(x))^5 \cdot \left(\sqrt[5]{|x|}\right)^5 = |x| \cdot \text{sign}(x^5) = |x| \cdot \text{sign}(x) = x \ \forall x \in \mathbf{R}$ .

**Bemerkung 5.1** (a) Sind  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  **bijektiv**, so gelten

$$(f^{-1})^{-1} = f, \quad [g \circ f]^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

(b) Die Menge

$$\text{Inv}(X) := \{f : X \rightarrow X : f \text{ bijektiv}\}$$

bildet unter der Verknüpfung  $\circ$  eine (nicht-kommutative) **Gruppe**  $(\text{Inv}(X), \circ)$  mit neutralem Element  $Id_X$  und inverselem Element  $f^{-1}$ . Hingegen bildet  $(\text{Abb}(X, X), \circ)$  lediglich eine **Halbgruppe** mit neutralem Element  $Id_X$ . Diese heie die **symmetrische Halbgruppe** von  $X$  oder auch **Transformationshalbgruppe**.  $\square$

## 5.2 Lineare Abbildungen. Kern und Bild

Eine Sonderstellung unter den Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  nehmen in vieler Hinsicht die **linearen Abbildungen** ein, die allerdings nur über **Vektorräumen** erklärt werden können. Nachfolgend bezeichnet  $\mathbf{K}$  einen beliebigen Körper.

**Definition 5.6** Gegeben seien Vektorräume  $V$  und  $W$  über demselben Körper  $\mathbf{K}$ . Eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit  $D(f) = V$  heie **linear** genau dann, wenn gilt:

$$f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V. \tag{L}$$

Setzt man in (L)  $\lambda = \mu = 0$ , so resultiert die für lineare Abbildungen stets gültige Beziehung

$$f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

**Bemerkung 5.2** Die Bedingung (L) besagt, dass eine lineare Abbildung  $f \in \text{Abb}(V, W)$  **verträglich** ist mit den algebraischen Strukturen von  $(V, +, \lambda\text{-mal})$  und  $(W, +, \lambda\text{-mal})$ . Es gilt nämlich für jede der algebraischen Verknüpfungen  $+$  und  $\lambda\text{-mal}$  die Verträglichkeitsbedingung (H) aus Abschnitt 1.4.3, so dass mit  $f$  ein **Homomorphismus** im Sinne der Definition 1.17 vorliegt. Speziell für  $V = W$  ist  $f$  ein **Endomorphismus**.  $\square$

**BSP. (5.2.1)** Es sei  $V$  ein VR über  $\mathbf{K}$ , und es sei  $r \in \mathbf{K}$  ein festes Element. Dann ist

$$f : V \rightarrow V \text{ mit } f(\vec{v}) := r \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$$

eine lineare Abbildung. Als Spezialfälle sind enthalten: für  $r = 0$  die **triviale Abbildung**  $f(\vec{v}) = \vec{0} \ \forall \vec{v} \in V$  sowie für  $r = 1$  die **identische Abbildung** oder **Identität**  $f(\vec{v}) = \vec{v} \ \forall \vec{v} \in V$ , also  $f = Id_V$ .

**BSP. (5.2.2)** Es sei  $V$  ein Praehilbertraum über  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , und es sei  $W := \mathbf{K}$ . Der Vektor  $\vec{w} \in V$  sei fest gewählt. Aus dem Axiom (SP2) für Skalarprodukte folgt, dass

$$f : V \rightarrow \mathbf{K} \text{ mit } f(\vec{v}) := \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V$$

eine lineare Abbildung ist. **Beachte:** Setzt man stattdessen

$$g : V \rightarrow \mathbf{K} \text{ mit } g(\vec{v}) := \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V,$$

so gilt anstelle der Linearitätsbeziehung (L) die Bedingung

$$\boxed{g(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \bar{\lambda} g(\vec{u}) + \bar{\mu} g(\vec{v}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.} \quad (\bar{L})$$

Abbildungen mit der Eigenschaft  $\overline{(L)}$  heißen **antilinear**.

**BSP. (5.2.3)** Es sei  $V := \mathbf{K}^{(m,n)}$ . Die Elemente von  $V$  sind die  $m \times n$ -**Matrizen** über  $\mathbf{K}$ :

$$A \in \mathbf{K}^{(m,n)} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{jk}) \text{ mit } a_{jk} \in \mathbf{K}.$$

Es wird nun ein **Produkt** der Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  mit einem Vektor  $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$  derart erklärt, dass ein Vektor  $\vec{y} \in \mathbf{K}^m$  entsteht:

**Definition 5.7** Das **Produkt** der Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  mit dem Vektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{K}^n$  ist derjenige Vektor  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbf{K}^m$ , dessen Komponenten gemäß

$$\boxed{y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, \dots, m,} \quad (\text{MP})$$

definiert sind. Explizit gilt also:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \end{bmatrix} = \vec{y}.$$

Das heißt, das Produkt (MP) wird nach dem Schema **Zeile mal Spalte** gebildet.

**BSP. (5.2.4)**

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2+5i & 5+2i & 0 \\ 2-5i & 5-2i & 3i \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{C}^{(2,3)}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \\ 2 \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{C}^3} = \begin{bmatrix} 2+5i+5+2i-5i+2 \\ 2-5i+5-2i-5i-2+6i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9+2i \\ 5-6i \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{C}^2},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{R}^{(3,3)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{R}^3} = \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{R}^3}.$$

Die einfache *algorithmische Struktur* des Produktes (MP) erlaubt es, die Berechnung von  $A\vec{x} = \vec{y}$  sehr effizient mit dem Computer vorzunehmen:

**Algorithmus zur Berechnung des Produktes  $\vec{y} := A\vec{x}$ :**

|    |  |
|----|--|
| 1: | Einlesen von $a_{jk}, x_k$ ;                 |
| 2: | für $j := 1, 2, \dots, m$ :                  |
| 3: | $y_j := 0$ ;                                 |
| 4: | für $k := 1, 2, \dots, n$ :                  |
| 5: | $y_j := y_j + a_{jk} * x_k$ . (Ende $j, k$ ) |

**Satz 5.1** Durch das Produkt (MP) wird jeder Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  eine lineare Abbildung

$$f_A : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m \text{ mit } f_A(\vec{x}) := A\vec{x}$$

zugeordnet. Es ist üblich, die Abbildung  $f_A$  mit der Matrix  $A$  zu identifizieren.

*Begründung:* Zu gegebenen Elementen  $\vec{x}, \vec{u} \in \mathbf{K}^n$  und  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$  setzen wir  $\vec{y} := A\vec{x}$ ,  $\vec{v} := A\vec{u}$  und  $\vec{w} := A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{u})$ . Dann folgt aus (MP):

$$w_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}(\lambda x_k + \mu u_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k + \mu \sum_{k=1}^n a_{jk}u_k = \lambda y_j + \mu v_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Also gilt  $\vec{w} = A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{u}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{u}$ . □

**Bemerkung 5.3** In Abschnitt 4.1 hatten wir **lineare Gleichungssysteme**

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{LG}$$

betrachtet. Mit Hilfe der **Koeffizientenmatrix**  $A := (a_{jk})$  können wir jetzt (LG) in der neuen Form

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{LG}'$$

schreiben. Hier ist die rechte Seite  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbf{K}^m$  vorgegeben, und der Lösungsvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{K}^n$  ist gesucht. □

**Definition 5.8** Es seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Körper  $\mathbf{K}$ . Dann setzen wir

$$L(V, W) := \{f : V \rightarrow W : f \text{ ist lineare Abbildung}\}.$$

Speziell heiÙe

$$V' := L(V, \mathbf{K}) = \{f : V \rightarrow \mathbf{K} : f \text{ ist lineare Abbildung}\}$$

der **algebraische Dual** von  $V$ . Die Elemente von  $V'$  heiÙen **lineare Funktionale auf  $V$** .

Zum Beispiel gilt  $A \in L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$  für jede Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$ . Ist  $V$  ein Prähilbertraum, so gilt  $\langle \cdot, \vec{u} \rangle \in V'$  für jedes feste  $\vec{u} \in V$ .

Die Menge  $L(V, W)$  ist selbst ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$ :

**Satz 5.2** Gegeben seien Vektorräume  $V, W$  über demselben Körper  $\mathbf{K}$ . Versieht man die Menge der linearen Abbildungen  $L(V, W)$  mit den folgenden algebraischen Operationen  $+$  und  $\lambda$ -mal, so ist  $L(V, W)$  selbst ein **Vektorraum über  $\mathbf{K}$** :

$$\begin{array}{ll} + & : \quad (f + g)(\vec{v}) := f(\vec{v}) + g(\vec{v}) \quad \forall f, g \in L(V, W) \quad \forall \vec{v} \in V, \\ \lambda\text{-mal} & : \quad (\lambda f)(\vec{v}) := \lambda f(\vec{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall f \in L(V, W) \quad \forall \vec{v} \in V. \end{array}$$

*Begründung:* Diese erfolgt leicht durch Nachrechnen der Vektorraumaxiome, was hier nicht vorgeführt werden soll.  $\square$

**Bemerkung 5.4** (a) Die algebraischen Operationen  $+$  und  $\lambda$ -mal sind so definiert, dass die **Vektorraumstrukturen** von  $V, W$  und  $L(V, W)$  durch **lineare Abbildungen**  $f : V \rightarrow W$  ineinander übergeführt werden:

$$\begin{aligned}
 + & : \underbrace{(f+g)}_{+ \text{ in } L(V,W)} \underbrace{(\vec{u}+\vec{v})}_{+ \text{ in } V} = f(\vec{u}+\vec{v}) + g(\vec{u}+\vec{v}) = \underbrace{f(\vec{u})+g(\vec{u})+f(\vec{v})+g(\vec{v})}_{+ \text{ in } W} \\
 & = (f+g)(\vec{u}) + (f+g)(\vec{v}), \\
 \lambda\text{-mal} & : \underbrace{(\lambda f)}_{\lambda \cdot \text{ in } L(V,W)}(\vec{v}) = \underbrace{\lambda f(\vec{v})}_{\lambda \cdot \text{ in } W} = f(\underbrace{\lambda \vec{v}}_{\lambda \cdot \text{ in } V}).
 \end{aligned}$$

(b) Wir haben oben schon gezeigt, dass die Inklusion  $\mathbf{K}^{(m,n)} \subset L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$  gilt. Wir werden im nächsten Satz 5.3 sogar die Gleichheit  $\mathbf{K}^{(m,n)} = L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$  zeigen. Die soeben eingeführten algebraischen Operationen  $+$  und  $\lambda$ -mal sind dieselben, die wir bereits in Abschnitt 4.2 auf  $\mathbf{K}^{(m,n)}$  erklärt hatten (vgl. BSP. (4.2.4)):  $\square$

$$\forall A, B \in \mathbf{K}^{(m,n)} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K} : \lambda A + \mu B = \lambda(a_{jk}) + \mu(b_{jk}) := (\lambda a_{jk} + \mu b_{jk}).$$

Eine Verallgemeinerung der Linearitätsbeziehung (L) auf  $r$  Summanden kann sehr einfach durch **vollständige Induktion** nach  $r$  gezeigt werden:

$$f\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(\vec{v}_k) \quad \forall \lambda_j \in \mathbf{K} \quad \forall \vec{v}_j \in V; \quad r \in \mathbf{N}, \quad (\text{L})'$$

und dies gilt für jede lineare Abbildung  $f \in L(V, W)$ .

**Satz 5.3** (a) *Es gelte  $\dim V = n < \infty$ , und es sei  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  eine Basis von  $V$ . Dann ist jedes  $f \in L(V, W)$  allein durch die Vorgabe der Bilder  $\vec{w}_j := f(\vec{v}_j) \in W \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$ , eindeutig bestimmt.*

(b) *Es gilt*

$$\mathbf{K}^{(m,n)} = L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m).$$

*Ist nämlich  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  die Standardbasis des  $\mathbf{K}^n$  und ist eine beliebige lineare Abbildung  $f \in L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$  gegeben, so bilden die Vektoren*

$$\vec{a}_j := f(\vec{e}_j) \in \mathbf{K}^m \quad \forall j = 1, 2, \dots, n,$$

*die Spalten einer Matrix  $A := (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  mit der Eigenschaft  $A\vec{x} = f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n$ , das heißt, es gilt  $f = A$ .*

*Begründungen:* (a) Da jeder Vektor  $\vec{u} \in V$  in der angegebenen Basis die Darstellung  $\vec{u} = \sum_{k=1}^n \mu_k \vec{v}_k$  zuläßt, erhalten wir aus (L)'

$$f(\vec{u}) = f\left(\sum_{k=1}^n \mu_k \vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu_k f(\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^n \mu_k \vec{w}_k,$$

und zu dieser Darstellung werden ausschließlich die Bilder  $\vec{w}_j$  benötigt.

(b) Gemäß (a) ist jede lineare Abbildung  $f \in L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$  durch die Vorgabe der Bilder  $\vec{a}_j := f(\vec{e}_j) \forall j = 1, 2, \dots, n$  eindeutig festgelegt. Wir bilden die Matrix  $A := (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$ . Dann erhält man aus (MP) ganz offensichtlich die folgenden Relationen:

$$A\vec{e}_j = \vec{a}_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Hieraus resultiert für jeden Vektor  $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \in \mathbf{K}^n$ :

$$A\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k A\vec{e}_k = \sum_{k=1}^n x_k f(\vec{e}_k) \stackrel{(L)'}{=} f(\vec{x}).$$

**BSP. (5.2.5)** Es ist  $A \in L(\mathbf{R}^5, \mathbf{R}^3)$  so zu bestimmen, dass gilt:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_5 + x_3 \\ x_2 + 4x_4 - x_3 \\ x_4 - x_1 \end{bmatrix} \quad \forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbf{R}^5.$$

*Lösung:* Offenbar ist die Abbildungsvorschrift  $A : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^3$  linear, so dass  $A$  als  $3 \times 5$ -Matrix darstellbar ist. Wir setzen  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_5)$  und berechnen die Spaltenvektoren  $\vec{a}_j = A\vec{e}_j$  aus obiger Vorschrift:  $A\vec{e}_1 = (1, 0, -1)^T$ ,  $A\vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ ,  $A\vec{e}_3 = (1, -1, 0)^T$ ,  $A\vec{e}_4 = (0, 4, 1)^T$ ,  $A\vec{e}_5 = (-2, 0, 0)^T$ . Hieraus ergibt sich:

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Kern und Bild einer linearen Abbildung

**Definition 5.9** Es seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Körper  $\mathbf{K}$ . Für eine lineare Abbildung  $f \in L(V, W)$  heiÙe die Menge

$$\text{Kern } f := \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{0}\} \subset V$$

der **Kern** oder **Nullraum** von  $f$ . (Andere Bezeichnungen sind  $N(f)$  oder  $\text{Ker } f$ .) Die Menge

$$\text{Bild } f := \{\vec{w} \in W : \vec{w} = f(\vec{v}) \text{ und } \vec{v} \in V\} \subset W$$

heiÙe **Bild** oder **Bildraum** von  $f$ . (Andere Bezeichnungen sind  $R(f)$  oder  $\text{im}(f)$  für "range" bzw. "image").

**Satz 5.4** Für  $f \in L(V, W)$  ist  $\text{Kern } f \subset V$  ein Unterraum von  $V$  und  $\text{Bild } f \subset W$  ein Unterraum von  $W$ .

*Begründung:* Wegen  $f(\vec{0}) = \vec{0} \in \text{Bild } f$  haben wir  $\text{Kern } f \neq \emptyset \neq \text{Bild } f$ . Seien ferner  $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Kern } f$  gegeben. Dann gilt für  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ :

$$f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0},$$



also  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in \text{Kern } f$ . Wir setzen  $\vec{w} := f(\vec{u})$ ,  $\vec{z} := f(\vec{v})$ , und erhalten

$$\lambda \vec{w} + \mu \vec{z} = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \in \text{Bild } f.$$

Es gelten somit die Unterraumaxiome (U1) und (U2) für Kern  $f$  und Bild  $f$ . □

**BSP. (5.2.6)** Es sei  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(m,n)} = L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$  gegeben. Offensichtlich gilt:

Kern  $A$  ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems:

$$\vec{x} \in \text{Kern } A \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

Der Unterraum Kern  $A$  kann also mit dem GAUSS-Algorithmus berechnet werden. Wir bestimmen nun den Unterraum Bild  $A$ . Für die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  der Standardbasis des  $\mathbf{K}^n$  haben wir in Satz 5.3 gezeigt:

$$A := (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = (A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, \dots, A\vec{e}_n).$$

Mit der Darstellung  $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k$  eines beliebigen Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$  resultiert hieraus:

$$A\vec{x} = A\left(\sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k\right) \stackrel{(L)}{=} \sum_{k=1}^n x_k A\vec{e}_k = \sum_{k=1}^n x_k \vec{a}_k \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}.$$

Das heißt, es gilt stets

$$\text{Bild } A = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}.$$

**Satz 5.5** Es sei  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  eine  $m \times n$ -Matrix. Dann besteht der Unterraum Kern  $A \subset \mathbf{K}^n$  genau aus der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\text{Kern } A = \{\vec{x} \in \mathbf{K}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

Der Unterraum Bild  $A \subset \mathbf{K}^m$  wird von den Spaltenvektoren  $\vec{a}_k := (a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})^T$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , der Matrix  $A$  aufgespannt:

$$\text{Bild } A = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}, \quad \vec{a}_k = A\vec{e}_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Falls für die Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  die Dimensionsrelation  $m < n$  gilt, so können nur **maximal**  $m$  der  $n$  Spaltenvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  der Matrix  $A$  **linear unabhängig** sein. Wegen Bild  $A \subset \mathbf{K}^m$  muss nämlich  $\dim \text{Bild } A \leq m$  gelten. Man definiert in diesem Zusammenhang:

**Definition 5.10** Es seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Körper  $\mathbf{K}$ . Für  $f \in L(V, W)$  heie die Zahl

$$\text{Rang } f := \dim \text{Bild } f$$

der **Rang von**  $f$ , sofern der Unterraum Bild  $f$  endlichdimensional ist. Für eine Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  ist insbesondere

$$\text{Rang } A = \dim \text{Bild } A = \text{Maximalzahl der LU Spaltenvektoren.}$$

## Basen für Kern $A$ und Bild $A$

Wir verwenden das in Abschnitt 4.5 beschriebene Verfahren zur Berechnung einer Basis in einem gegebenen Unterraum.

(I) **Basis für Kern  $A$ :** Zu gegebener Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  ist das homogene lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{0}$  zu lösen:

$$(A \mid \vec{0}) \xrightarrow{\text{Gauss-Schritte}} \left. \begin{array}{ccc|ccc} * & & & & & 0 \\ & * & | & f_1 & & 0 \\ & & & & * & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & * & | & f_2 & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \\ O & & & & & & & & 0 \end{array} \right\} n-r \quad \left. \begin{array}{l} \text{S-System, Typ (I)} \\ \text{oder Typ (II)}. \end{array} \right\}$$

Die Komponenten  $x_l$  des Lösungsvektors  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  in den Positionen  $f_l$  des obigen Schemas sind **frei wählbare Parameter**  $C_1, C_2, \dots, C_r$ ,  $r \leq n$ . Setzt man sukzessive  $C_l := \delta_{jl}$  für  $j = 1, 2, \dots, r$  in das obige Schema ein, so erhält man durch Lösen des verbleibenden Gleichungssystems nacheinander  $r$  **Basisvektoren** von Kern  $A$ , die wir mit neuen Bezeichnungen

$$\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_r \in \text{Kern } A$$

versehen wollen. Mit diesen Basisvektoren kann die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{0}$  in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\mathcal{L}(\text{LG}_h) = \{ \vec{x} \in \mathbf{K}^n : \vec{x} = C_1 \vec{h}_1 + C_2 \vec{h}_2 + \dots + C_r \vec{h}_r, C_j \in \mathbf{K} \}.$$

Dass sich der Unterraum Kern  $A$  unter den GAUSS-Schritten nicht verändert, das hatten wir bereits in Satz 4.14 festgestellt.

### BSP. (5.2.7)

$$(A \mid \vec{0}) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{ccc|ccc} & 2 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ \hline Z_1 \Leftrightarrow Z_3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ Z_2 + Z_1 \Rightarrow Z_2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ Z_3 - 2Z_1 \Rightarrow Z_3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline -Z_3 \Leftrightarrow Z_2 & 1 & \boxed{2} & 1 & 4 & 0 \\ Z_3 - 2Z_2 \Rightarrow Z_3 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{S-System, Typ (II)}.$$

Die Komponenten des Lösungsvektors  $\vec{x} = (x_1, \boxed{x_2}, x_3, \boxed{x_4})^T$  in den gekennzeichneten Positionen sind also frei wählbar:  $x_2 = C_1$ ,  $x_4 = C_2$ . Mit der speziellen Wahl  $(C_1, C_2) = (1, 0)$  bzw.  $(C_1, C_2) = (0, 1)$  erhält man aus dem obigen System die beiden Basisvektoren  $\vec{h}_1 = (-2, 1, 0, 0)^T$  bzw.  $\vec{h}_2 = (-3, 0, -1, 1)^T$ . Es folgt also für die Lösungen von  $A\vec{x} = \vec{0}$ :

$$\vec{x} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Kern } A = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \text{Kern } A = 2.$$

(II) **Basis für Bild  $A$ :** Zu gegebener Matrix  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  ist eine Basis des Unterraumes Bild  $A = \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \}$  zu bestimmen. Das heißt, es ist die Maximalzahl

der linear unabhängigen Spaltenvektoren aufzufinden. Dazu wenden wir das Verfahren aus Abschnitt 4.5 an. Wir schreiben das **transponierte** Vektorsystem  $\vec{a}_1^T, \vec{a}_2^T, \dots, \vec{a}_n^T \in \mathbf{K}^m$  als **Zeilen** einer Matrix

$$A^T := \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{(n,m)}$$

und wenden danach elementare Zeilenumformungen so auf die Matrix  $A^T$  an, dass  $A^T$  in eine Staffelform übergeht:

$$A^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss-Schritte}} \begin{array}{|ccc} * & & \\ * & | & f_1 \\ & * & | & f_2 \\ & & * & | & f_3 \\ O & & & & \end{array} \begin{array}{l} =: \vec{b}_1^T \\ =: \vec{b}_2^T \\ \vdots \\ =: \vec{b}_s^T \end{array} \quad \boxed{\text{S-System, Typ (I) oder Typ (II).}}$$

Die nichtverschwindenden Zeilenvektoren  $\vec{b}_1^T, \vec{b}_2^T, \dots, \vec{b}_s^T \in \mathbf{K}^m$  bilden eine Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$  von Bild  $A$ , und es gilt

$$\boxed{\text{Bild } A = \text{span} \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s \}, \quad \text{Rang } A = s.}$$

**BSP. (5.2.8)** Für die Matrix  $A$  aus BSP. (5.2.7) bestimmen wir eine Basis von Bild  $A$ .

$$A^T := \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vec{a}_3^T \\ \vec{a}_4^T \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{|ccc} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 4 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{S-System, Typ (II).}$$

|                              |   |    |    |                                     |
|------------------------------|---|----|----|-------------------------------------|
| $Z_1 \Leftrightarrow Z_3$    | 1 | 1  | 1  | } $\Rightarrow$ S-System, Typ (II). |
| $Z_2 - 4Z_1 \Rightarrow Z_2$ | 0 | -6 | -2 |                                     |
| $Z_3 - 2Z_1 \Rightarrow Z_3$ | 0 | -3 | -1 |                                     |
| $Z_4 - 7Z_1 \Rightarrow Z_4$ | 0 | -9 | -3 |                                     |
| $-Z_3 \Leftrightarrow Z_2$   | 1 | 1  | 1  | } $\Rightarrow$ S-System, Typ (II). |
| $Z_3 + 2Z_2 \Rightarrow Z_3$ | 0 | 3  | 1  |                                     |
| $Z_4 + 3Z_2 \Rightarrow Z_4$ | 0 | 0  | 0  |                                     |
|                              | 0 | 0  | 0  |                                     |

Wir lesen hier die Basis von Bild  $A$  sowie den Ergänzungsraum  $E$  mit  $E \oplus \text{Bild } A = \mathbf{R}^3$  direkt ab:

$$\text{Bild } A = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim \text{Bild } A = 2, \quad E = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**Beachte:** Das obige Beispiel der linearen Abbildung  $A \in L(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3) =: L(V, W)$  liefert die **Dimensionsformel**

$$\boxed{\dim \text{Bild } A + \dim \text{Kern } A = \dim V (= \dim \mathbf{R}^4 = 4).} \quad (2.1)$$

Wir wollen die Dimensionsformel (2.1) für beliebige lineare Abbildungen auf einem **endlich-dimensionalen** Vektorraum  $V$  zeigen:

**Satz 5.6** Es seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Körper  $\mathbf{K}$ , und es gelte  $\dim V < \infty$ . Dann gilt für jedes  $f \in L(V, W)$  die Dimensionsformel

$$\dim \text{Bild } f + \dim \text{Kern } f = \dim V.$$

*Begründung:* Wir setzen  $\dim V =: n$  sowie  $\dim \text{Kern } f =: p \leq n$ . Für den endlichdimensionalen UR  $\text{Kern } f \subset V$  gibt es eine Basis  $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_p \in \text{Kern } f$ :

$$\text{Kern } f = \text{span} \{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_p \}, \quad f(\vec{h}_j) = \vec{0} \quad \forall j = 1, 2, \dots, p.$$

Falls  $p = n$  gilt, so folgt  $V = \text{Kern } f$  und somit  $\text{Bild } f = f(V) = \{ \vec{0} \}$ . In diesem Falle ist die Behauptung offenkundig wahr. Es sei nun  $p < n$ . Wir wählen gemäß Satz 4.12 eine Basisergänzung  $\vec{h}_{p+1}, \vec{h}_{p+2}, \dots, \vec{h}_n$ , so dass  $V = \text{span} \{ \vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_n \}$  gilt. Jeder Vektor  $\vec{v} \in V$  gestattet nun eine Zerlegung  $\vec{v} = \sum_{k=1}^n v_k \vec{h}_k$ , und es folgt

$$f(\vec{v}) = f\left(\sum_{k=1}^n v_k \vec{h}_k\right) \stackrel{(L)'}{=} \sum_{k=1}^p v_k \underbrace{f(\vec{h}_k)}_{=\vec{0}} + \sum_{k=p+1}^n v_k f(\vec{h}_k) = \sum_{k=p+1}^n v_k f(\vec{h}_k).$$

Mithin resultiert

$$\text{Bild } f = \text{span} \{ f(\vec{h}_{p+1}), f(\vec{h}_{p+2}), \dots, f(\vec{h}_n) \}.$$

Wir zeigen, dass die Vektoren  $f(\vec{h}_{p+1}), f(\vec{h}_{p+2}), \dots, f(\vec{h}_n) \in W$  LU sind. In diesem Falle folgt dann schon die behauptete Dimensionsformel  $\dim \text{Bild } f = n - p = \dim V - \dim \text{Kern } f$ . Zur linearen Unabhängigkeit:

$$\vec{0} = \sum_{k=p+1}^n \lambda_k f(\vec{h}_k) = f\left(\sum_{k=p+1}^n \lambda_k \vec{h}_k\right) \Rightarrow \sum_{k=p+1}^n \lambda_k \vec{h}_k \in \text{Kern } f \Rightarrow \vec{0} = \sum_{k=p+1}^n \lambda_k \vec{h}_k.$$

Den letzten Schritt begründet man mit der Tatsache, dass  $\text{Kern } f \cap \text{span} \{ \vec{h}_{p+1}, \vec{h}_{p+2}, \dots, \vec{h}_n \} = \{ \vec{0} \}$  gilt. Da das System  $\vec{h}_{p+1}, \vec{h}_{p+2}, \dots, \vec{h}_n$  LU ist, erhalten wir schließlich  $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_n = 0$ , und somit folgt die behauptete lineare Unabhängigkeit.  $\square$

Als direkte Folgerung aus dem vorstehenden Satz erhalten wir:

**Satz 5.7** Es seien  $V, W$  endlichdimensionale Vektorräume über demselben Körper  $\mathbf{K}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\Leftrightarrow \dim V = \dim \text{Bild } f, \\ f \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow \dim W = \dim \text{Bild } f. \end{aligned}$$

Im Falle  $\dim V = \dim W$  folgt sogar

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ bijektiv.}$$

Werden diese Resultate speziell auf lineare Abbildungen  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)} = L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$  bezogen, so erhalten wir die

**Bemerkung 5.5** (a) Stets gilt

$$\text{Rang } A = \dim \text{Bild } A = \text{Maximalzahl der LU Spalten.}$$

Wir haben gezeigt, dass Bild  $A$  durch elementare (Spalten-) Umformungen nicht verändert wird!

(b) Aus dem GAUSS-Algorithmus zur Ermittlung von Kern  $A$  ersieht man:

$$\vec{x} \in \text{Kern } A \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A \mid \vec{0}) \xrightarrow{\text{Gauss-Schritte}} \left. \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} * & & \\ & * & | f_1 \\ & & * \\ & & & * \\ & & & & * & | f_2 \\ & & & & & & O \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n - r \\ \text{LU Zeilen.} \end{array}$$

Wir erschließen hieraus:

$$\dim \text{Kern } A =: r = n - \text{Maximalzahl der LU Zeilen.}$$

Durch elementare (Zeilen-) Umformungen wird Kern  $A$  nicht verändert!

(c) Es gilt gemäß Satz 5.6 die Dimensionsformel

$$\text{Rang } A + \dim \text{Kern } A = \dim \mathbf{K}^n = n.$$

Trägt man diese in die Relationen unter (a) und (b) ein, so erhält man

$$\text{Rang } A = \text{Maximalzahl der LU Spalten} = \text{Maximalzahl der LU Zeilen.}$$

Hieraus folgern wir, dass für eine  $m \times n$ -Matrix  $A$  stets gilt:

$$\text{Rang } A \leq \min\{m, n\}.$$

Es folgt ferner

$$A \in \mathbf{K}^{(m,n)} \text{ ist } \left\{ \begin{array}{l} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rang } A = n, \\ \text{Rang } A = m, \\ \text{Rang } A = m = n. \end{array} \right.$$

Das heißt, **bijektive** Matrizen müssen **notwendig dieselbe Zeilen- und Spaltenzahl** haben. Wir nennen diese Matrizen **quadratisch** oder  $n \times n$ -Matrizen.  $\square$

Wir setzen die obigen Erkenntnisse um in **Lösbarkeitsaussagen** für lineare Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A \in \mathbf{K}^{(m,n)}, \quad \vec{b} \in \mathbf{K}^m. \tag{LG}'$$

**Satz 5.8 (a) Existenz einer Lösung:**

$$(LG)' \text{ besitzt eine Lösung} \Leftrightarrow \vec{b} \in \text{Bild } A \Leftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } (A \mid \vec{b}).$$

Dabei bezeichnet  $(A \mid \vec{b}) \in \mathbf{K}^{(m,n+1)}$  die um den Spaltenvektor  $\vec{b}$  erweiterte Matrix  $A$ .

(b) **Eindeutigkeit von Lösungen:**

$$(LG)' \text{ besitzt höchstens eine Lösung} \Leftrightarrow \text{Kern } A = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \text{Rang } A = n.$$

(c) **Beständige Lösbarkeit:**

$(\text{LG})'$  hat für jede Vorgabe  $\vec{b} \in \mathbf{K}^m$  eine Lösung  $\Leftrightarrow \text{Rang } A = m \Leftrightarrow \dim \text{Kern } A = n - m$ .

(c) **Struktur der Lösungsmenge (Lösungsgesamtheit):** Ist  $\vec{x}_p \in \mathbf{K}^n$  eine Lösung des linearen Gleichungssystems  $(\text{LG})'$ , so bildet der **affine Unterraum**

$$\mathcal{L}(\text{LG})' = \vec{x}_p + \text{Kern } A := \{ \vec{x} \in \mathbf{K}^n : \vec{x} = \vec{x}_p + \vec{h} \text{ mit } \vec{h} \in \text{Kern } A \}$$

die Lösungsgesamtheit. Wegen  $r := \dim \text{Kern } A = n - \text{Rang } A$  bedarf es also  $r$  Parameter zur Beschreibung der Lösungsgesamtheit.

*Begründungen:* (a) Es ist klar,  $(\text{LG})'$  ist genau dann lösbar, wenn  $\vec{b} \in \text{Bild } A$  gilt, oder äquivalent, wenn  $\vec{b} \in \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \}$  gilt. Dann folgt  $\text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \} = \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \} = \text{Bild}(A | \vec{b})$  und wir erhalten  $\text{Rang } A = \text{Rang}(A | \vec{b})$ . Diese Aussage ist auch umkehrbar. Gilt nämlich  $\text{Rang } A = \text{Rang}(A | \vec{b})$ , so ist  $\text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \} = \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \}$ , und wir folgern  $\vec{b} \in \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \} = \text{Bild } A$ .

(b) Wir haben  $\text{Kern } A = \{ \vec{0} \} \Leftrightarrow \dim \text{Kern } A = 0 \Leftrightarrow n - \text{Rang } A = 0$ .

(c) Diese Aussage folgt aus den obigen Kriterien für Surjektivität und der Dimensionsformel (2.1).

(d) Für jedes  $\vec{h} \in \text{Kern } A$  gilt  $A(\vec{x}_p + \vec{h}) = A\vec{x}_p + A\vec{h} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$ . Also muss  $\vec{x}_p + \text{Kern } A \subset \mathcal{L}(\text{LG})'$  gelten. Ist andererseits  $\vec{x} \in \mathcal{L}(\text{LG})'$  gegeben, so folgt  $A\vec{x} = \vec{b}$ , und somit  $A(\vec{x} - \vec{x}_p) = A\vec{x} - A\vec{x}_p = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$ . Also gilt  $\vec{x} \in \vec{x}_p + \text{Kern } A$ , und wir haben  $\mathcal{L}(\text{LG})' \subset \vec{x}_p + \text{Kern } A$ .  $\square$

Aus der Dimensionsformel (2.1), nämlich  $\text{Rang } A + \dim \text{Kern } A = n \quad \forall A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  folgt schließlich noch im Falle **quadratischer** Matrizen:

**Satz 5.9** Es sei  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  eine **quadratische**  $n \times n$ -Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen (a), (b) und (c) äquivalent:

(a)  $\text{Kern } A = \{ \vec{0} \}$ , das heißt, das homogene System  $A\vec{x} = \vec{0}$  hat nur die **triviale** Lösung  $\vec{x} = \vec{0}$ .

(b)  $\text{Rang } A = n$ , das heißt, das inhomogene System  $A\vec{x} = \vec{b}$  ist für **jede** Vorgabe  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$  (eindeutig) lösbar.

(c) Das inhomogene System  $A\vec{x} = \vec{b}$  hat für jede rechte Seite  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$  genau eine Lösung.

**BSP. (5.2.9)** (a) Es seien  $A \in \mathbf{R}^{(3,4)}$  und  $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$  wie folgt vorgelegt:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 7 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir haben oben in den Beispielen BSP. (5.2.7) und BSP. (5.2.8) bereits gezeigt, dass  $\text{Rang } A = 2 = \dim \text{Kern } A$  gilt. Das heißt, das inhomogene System  $A\vec{x} = \vec{b}$  ist *nicht* für jede Vorgabe  $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$  lösbar.

Um zu prüfen, ob die Lösbarkeitsbedingung  $\vec{b} \in \text{Bild } A$  gilt, zeigen wir  $\text{Rang}(A | \vec{b}) = 2 = \text{Rang } A$ :

$$\begin{array}{c}
 (A | \vec{b}) \Leftrightarrow \\
 \boxed{Z_1 \Leftrightarrow Z_3} \\
 \boxed{Z_2 + Z_1 \Rightarrow Z_2} \\
 \boxed{Z_3 - 2Z_1 \Rightarrow Z_3} \\
 \boxed{-Z_3 \Leftrightarrow Z_2} \\
 \boxed{Z_3 - 2Z_2 \Rightarrow Z_3}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 2 & 4 & 1 & 7 & 1 \\
 -1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\
 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\
 \hline
 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
 \hline
 1 & \boxed{2} & 1 & 4 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \right\} \text{(LU).}$$

Wir erhalten in der Tat  $\text{Rang}(A | \vec{b}) = 2$ . Wir berechnen jetzt eine spezielle Lösung  $\vec{x}_p = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  des inhomogenen Systems, indem wir die Komponenten  $x_j$  in den oben gekennzeichneten Positionen Null setzen:  $x_2 = x_4 = 0$ . Es folgt mit einfacher Rechnung  $x_1 = -x_3 = 1$ . Da wir Kern  $A$  bereits in BSP. (5.2.7) berechnet hatten, erhalten wir nun die Lösungsmenge

$$\vec{x}_p + \text{Kern } A = \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Es seien jetzt  $A \in \mathbf{R}^{(3,3)}$  und  $\vec{b} \in \mathbf{R}^3$  wie folgt vorgelegt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $A$  ist quadratisch. Wir berechnen in einem *1. Schritt*:  $\text{Rang}(A | \vec{b})$  und eine Basis für Kern  $A$ :

$$\begin{array}{c}
 (A | \vec{b}) \Leftrightarrow \\
 \boxed{Z_1 \Leftrightarrow Z_2} \\
 \boxed{Z_3 - Z_1 \Rightarrow Z_3} \\
 \boxed{Z_3 - Z_2 \Rightarrow Z_3}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 1 & 1 & 8 \\
 1 & 0 & 1 & 7 \\
 1 & 1 & 0 & -7 \\
 \hline
 1 & 0 & 1 & 7 \\
 0 & 1 & 1 & 8 \\
 0 & 1 & -1 & -14 \\
 \hline
 1 & 0 & 1 & 7 \\
 0 & 1 & 1 & 8 \\
 0 & 0 & -2 & -22 \\
 \hline
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|ccc} \right\} \text{S-Matrix, Typ (I).}$$

Wir erhalten hier  $\text{Rang}(A | \vec{b}) = 3$  sowie  $\text{Kern } A = \{\vec{0}\}$ , so dass auch  $\text{Rang } A = 3$  folgt. Die eindeutig bestimmte Lösung  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (-4, -3, 11)^T$  des inhomogenen Systems ergibt sich mit leichter Rechnung aus obigem Schema.

*2. Schritt*: Wir bestimmen eine Basis für Bild  $A$ . Hierzu ist keine Rechnung mehr erforderlich. Wegen  $\text{Rang } A = 3$  hat die Matrix **Vollrang**, das heißt, ihre drei Spaltenvektoren sind bereits LU:

$$\text{Bild } A = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

## 5.3 Das Matrizenprodukt

Es seien  $U, V, W$  Vektorräume über demselben Körper  $\mathbf{K}$ , der sonst beliebig sein darf. Es seien ferner  $f, g$  lineare Abbildungen mit

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W.$$

Dann ist die **Hintereinanderausführung**  $g \circ f : U \rightarrow W$  wohldefiniert, und wegen

$$g[f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})] = g[\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})] = \lambda g[f(\vec{u})] + \mu g[f(\vec{v})] \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$$

ist  $g \circ f$  wieder eine **lineare Abbildung**. Wird dieses Erkenntnis auf Matrizen  $A, B$  übertragen, so resultiert:

**Satz 5.10** Gegeben seien Matrizen  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und  $B \in \mathbf{K}^{(n,l)}$ , so dass gilt

$$\mathbf{K}^l \xrightarrow{B} \mathbf{K}^n \xrightarrow{A} \mathbf{K}^m.$$

Dann ist  $A \circ B : \mathbf{K}^l \rightarrow \mathbf{K}^m$  notwendig wieder eine lineare Abbildung, nämlich wegen

$$A \circ B \in L(\mathbf{K}^l, \mathbf{K}^m) = \mathbf{K}^{(m,l)}$$

eine  $m \times l$ -Matrix.

Wir wollen bei gegebenen Matrizen  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{jk})$  und  $C = (c_{ik}) := A \circ B$  den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten  $a_{ij}$ ,  $b_{jk}$  und  $c_{ik}$  studieren. Dazu schreiben wir die Vektorgleichung  $\vec{y} = C\vec{x} := A[B\vec{x}]$  unter Verwendung der Multiplikationsregel (MP) aus Abschnitt 5.2 **komponentenweise** auf und vergleichen danach die einzelnen Faktoren in den Produkten:

$$y_i = \sum_{k=1}^l c_{ik} x_k = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \sum_{k=1}^l b_{jk} x_k \right) = \sum_{k=1}^l \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) x_k \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

Da diese Gleichung für alle Vektoren  $\vec{x} \in \mathbf{K}^l$  gilt, erhalten wir:

**Definition 5.11** Für eine  $m \times n$ -Matrix  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und eine  $n \times l$ -Matrix  $B = (b_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,l)}$  ist das **Matrizenprodukt**  $C = A \circ B =: AB \in \mathbf{K}^{(m,l)}$  stets definiert, wobei die Koeffizienten  $c_{ik}$  der Produktmatrix  $C$  nach folgender Vorschrift zu bilden sind:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (3.1)$$

Das heißt, der Koeffizient  $c_{ik}$  entsteht gemäß der **Multiplikationsregel**

$$i\text{-te Zeile mal } k\text{-te Spalte.}$$

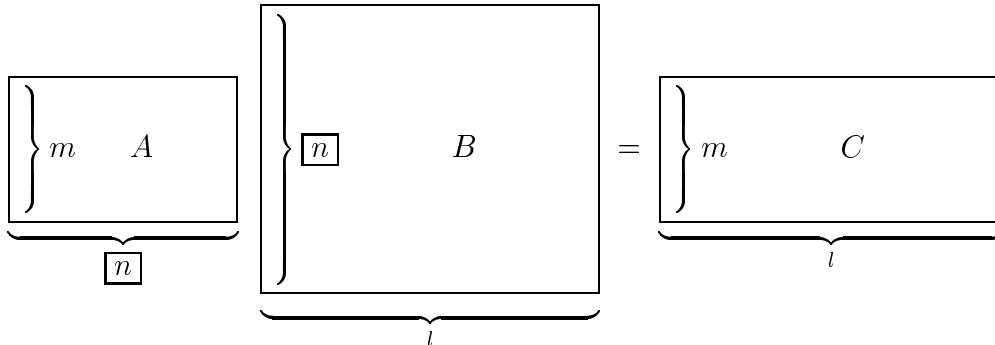
Zum Beispiel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2i & 5+i & i \\ 5 & 0 & 2-i \end{bmatrix}}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & i & 2 \\ 3 & i & 1 & 4 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{3 \times 4} = \underbrace{\begin{bmatrix} 16+3i & 7i-1 & 3+i & 20+9i \\ -1-2i & 5 & 5i & 12-i \end{bmatrix}}_{2 \times 4}.$$



**Merke:** Das Matrizenprodukt  $AB$  ist nur definiert, wenn gilt:

$$\boxed{\text{Spaltenzahl von } A = \text{Zeilenzahl von } B.}$$



Hat die Matrix  $B$  die Spaltenvektoren  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l$ , so gilt

$$\boxed{AB = A(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l) = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_l).}$$

Das heißt, die Spaltenvektoren der Produktmatrix  $AB$  sind gerade die Bilder  $A\vec{b}_j$  der Spaltenvektoren  $\vec{b}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ .

Die einfache algorithmische Struktur des Produktes (3.1) ermöglicht es wiederum, die Berechnung von  $AB$  sehr effizient mit dem Computer vorzunehmen:

**Algorithmus zur Berechnung des Produktes  $C := AB$ :**

|    |  |
|----|--|
| 1: | Einlesen von $a_{ij}, b_{jk}$ ;          |
| 2: | für $i := 1, 2, \dots, m$ :              |
| 3: | für $k := 1, 2, \dots, l$ :              |
| 4: | $s := 0$ ;                               |
| 5: | für $j := 1, 2, \dots, n$ :              |
| 6: | $s := s + a_{ij} * b_{jk}$ ; (Ende $j$ ) |
| 7: | $c_{ik} := s$ . (Ende $i, k$ )           |

Aus der Definition des Matrizenproduktes können die folgenden Rechenregeln sofort abgeleitet werden:

**Rechenregeln** für das Matrizenprodukt  $AB$ ,  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  mit  $B \in \mathbf{K}^{(n,l)}$ :

- |     |  |                        |
|-----|--|------------------------|
| (a) | $A(BC) = (AB)C =: ABC \quad \forall C \in \mathbf{K}^{(l,r)},$ | (Assoziativgesetz)     |
| (b) | $(A + C)B = AB + CB \quad \forall C \in \mathbf{K}^{(m,n)},$   | } (Distributivgesetze) |
|     | $A(B + C) = AB + AC \quad \forall C \in \mathbf{K}^{(n,l)}.$   |                        |

**Bemerkung 5.6** Ein **Kommutativgesetz**  $AB = BA$  gilt im allgemeinen **nicht**, auch dann nicht, wenn beide Produkte erklärt sind. *Zum Beispiel:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Spezielle Matrizen** sind:

die **Nullmatrix**  $O = O_n = (0_{jk}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{(n,n)},$

die **Einheitsmatrix**  $E = E_n = Id_n = \mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{(n,n)}.$

Die Nullmatrix  $O = (0_{jk})$  kann auch als **nichtquadratische**  $m \times n$ -Matrix sinnvoll erklärt werden. Stets gilt

$$AO_n = O_m A = O, \quad AE_n = E_m A = A \quad \forall A \in \mathbf{K}^{(m,n)}.$$

Für **quadratische** Matrizen  $A, B \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  sind **Potenzen** erklärt:

$$A^0 := E, \quad A^k := \underbrace{AA \cdots A}_{k\text{-mal}} \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad (A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA, \quad \text{usw.}$$

**Definition 5.12** Eine Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  mit  $A^k = O$  für ein  $k \in \mathbf{N}$  heie **nilpotent**.

Zum Beispiel ist die folgende Matrix nilpotent:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Dieses Beispiel lehrt: Aus  $AB = O$  für  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und  $B \in \mathbf{K}^{(n,l)}$  folgt **keineswegs**  $A = O$  oder  $B = O$ . Ebenso folgt aus  $AB = CB$  für ein  $C \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  **keineswegs**  $A = C$ .

**Bemerkung 5.7** Wir erkennen aus den obigen Rechenregeln, dass die Menge der **quadratischen** Matrizen  $\mathbf{K}^{(n,n)}$ ,  $n \geq 2$ , versehen mit den beiden algebraischen Operationen  $+$  und  $\circ$ , eine Algebra  $(\mathbf{K}^{(n,n)}, +, \circ)$  bildet. Diese ist ein **Ring** mit dem Einselement  $E_n$ , vgl. Definition 1.24. Das Gruppoid  $(\mathbf{K}^{(n,n)}, \circ)$  ist sogar **assoziativ** (nicht aber kommutativ), also eine Halbgruppe. Der assoziative Ring  $(\mathbf{K}^{(n,n)}, +, \circ)$  ist **nicht** nullteilerfrei, wie obiges Beispiel lehrt.  $\square$

**BSP. (5.3.1)**

(a) Eine Matrix  $\Lambda \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  in der Form

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} =: \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

heie **Diagonalmatrix**. Für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n =: \lambda \in \mathbf{K}$  ist offensichtlich  $\Lambda = \lambda E_n$ . In diesem Falle gilt

$$\Lambda A = \lambda E_n A = \lambda A = A \Lambda \quad \forall A \in \mathbf{K}^{(n,n)}.$$

(b) Jede Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,1)}$  ist ein **Spaltenvektor**:  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T =: \vec{a} \in \mathbf{K}^m$ . Deshalb können wir  $\mathbf{K}^{(m,1)} = \mathbf{K}^m$  setzen. Jede Matrix  $B \in \mathbf{K}^{(1,n)}$  ist ein **Zeilenvektor**:  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) =: \vec{b}^T$  mit  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$ . Es kann deshalb  $\mathbf{K}^{(1,n)}$  vermöge der Transposition "T" mit  $\mathbf{K}^n$  identifiziert werden. Gilt speziell  $n = m$ , so folgt aus diesen Überlegungen:

$$BA = \vec{b}^T \vec{a} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n b_k a_k \quad \forall A \in \mathbf{K}^{(1,n)} \quad \forall B \in \mathbf{K}^{(n,1)}.$$

Im speziellen Fall  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  haben wir somit  $\vec{b}^T \vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ . Eine analoge Beziehung erhält man auch im komplexen Fall  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$  vermöge der

**Definition 5.13** Es gelte  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ . Zu gegebenem  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbf{K}^n$  heiÙe

$$\vec{b}^* := \overline{(\vec{b}^T)} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$$

der zu  $\vec{b}$  **adjungierte** Vektor. Im Falle  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  gilt  $\vec{b}^* = \vec{b}^T$ .

**Merke:** adjungiert = transponiert + konjugiert.

Zum Beispiel:  $\vec{b} = (2 - 5i, 2 + 5i, 5 + 2i, 3i)^T \in \mathbf{C}^4 \Rightarrow \vec{b}^* = (2 + 5i, 2 - 5i, 5 - 2i, -3i)$ .

**Folgerung.**

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{b}^* \vec{a} = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^n.$$

## Das Tensorprodukt und Anwendungen

Wir beschränken uns hier ausschließlich auf den Körper der **reellen** Zahlen  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ . Im Gegensatz zum Skalarprodukt  $\vec{b}^T \vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ , welches nur für Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$  **gleicher Dimension** erklärt ist, kann das Produkt  $\vec{a} \vec{b}^T$  auch für Vektoren  $\vec{a} \in \mathbf{R}^m, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$  mit  $n \neq m$  sinnvoll definiert werden. Das Ergebnis ist eine  $m \times n$ -**Matrix**. Es gilt nämlich  $\forall A \in \mathbf{R}^{(m,1)} \quad \forall B \in \mathbf{R}^{(1,n)}$ :

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_n) = \vec{a} \vec{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(m,n)}.$$

und für jeden Vektor  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  haben wir:

$$(AB\vec{x})_j = \sum_{k=1}^n a_j b_k x_k = a_j \sum_{k=1}^n b_k x_k = a_j \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle \quad \forall j = 1, 2, \dots, m.$$

**Definition 5.14** Für jedes Paar von Vektoren  $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$  und  $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$  heiÙe die  $m \times n$ -Matrix  $\vec{a} \otimes \vec{b} := \vec{a} \vec{b}^T$  mit

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{x} := \vec{a} \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^n$$

(sprich:  $\vec{a}$  Tensor  $\vec{b}$ ) das **dyadische Produkt** oder **Tensorprodukt** von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Zum Beispiel ist das Tensorprodukt der Vektoren  $\vec{a} := (-1, 1)^T \in \mathbf{R}^2$  und  $\vec{b} := (3, 3, 1)^T \in \mathbf{R}^3$  gegeben durch die Matrix

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (3, 3, 1) = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \vec{b} \otimes \vec{a}.$$

**Bemerkung 5.8** (a) Das Tensorprodukt ist **nicht kommutativ**; es gilt jedoch:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})^T = (\vec{a} \vec{b}^T)^T = \vec{b} \vec{a}^T = \vec{b} \otimes \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in \mathbf{R}^m \quad \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^n.$$

(b) Die folgenden **Rechenregeln** können unmittelbar aus der Definition abgeleitet werden (stets seien  $\vec{a}, \vec{a}_j \in \mathbf{R}^m$  und  $\vec{b}, \vec{b}_j \in \mathbf{R}^n$  vorausgesetzt):

$$\begin{aligned} \vec{a} \otimes (\lambda \vec{b}) &= \lambda (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \otimes \vec{b} \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \\ \vec{a} \otimes (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) &= \vec{a} \otimes \vec{b}_1 + \vec{a} \otimes \vec{b}_2, \\ (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \otimes \vec{b} &= \vec{a}_1 \otimes \vec{b} + \vec{a}_2 \otimes \vec{b}. \end{aligned}$$

(c) Um die **Matrix**  $C$  der linearen Abbildung  $\vec{a} \otimes \vec{b} \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$  zu bestimmen, berechnen wir die Spaltenvektoren  $\vec{c}_j = C \vec{e}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ :

$$\vec{c}_j = (\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{e}_j = \vec{a} \langle \vec{b}, \vec{e}_j \rangle = b_j \vec{a}.$$

Wir erhalten also in Übereinstimmung mit der obigen Herleitung □

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = C = (b_1 \vec{a}, b_2 \vec{a}, \dots, b_n \vec{a}) \in \mathbf{R}^{(m,n)} \quad \forall \vec{a} \in \mathbf{R}^m \quad \forall \vec{b} \in \mathbf{R}^n.$$

**BSP. (5.3.2)** **Orthogonalprojektion ( $\perp$ -Projektion) eines Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  auf eine Richtung  $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|\vec{a}\| = 1$ :** Diese wird gemäß untenstehender Skizze geleistet durch die Abbildungsvorschrift  $P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  mit

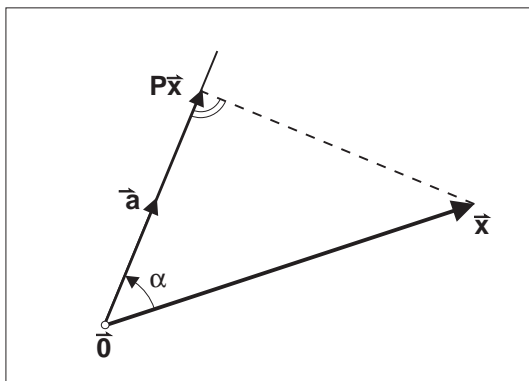
$$P\vec{x} := \vec{a} \|\vec{x}\| \cos \alpha = \vec{a} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = (\vec{a} \otimes \vec{a}) \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Man erkennt sofort, dass eine **lineare Abbildung**  $P \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$  vorliegt.

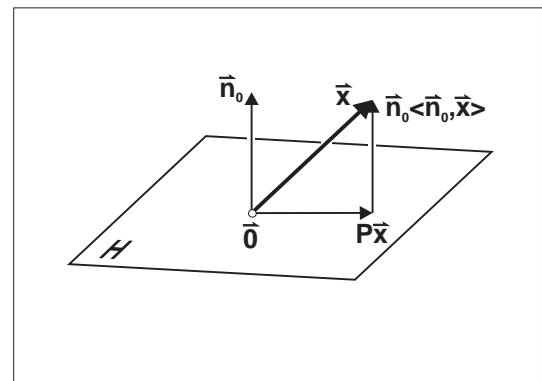
**Merke:** Es sei  $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$  mit  $\|\vec{a}\| = 1$  gegeben. Die **Matrix**  $P$  der  $\perp$ -Projektion auf die **Richtung**  $\vec{a}$  ist das Tensorprodukt

$$P = \vec{a} \otimes \vec{a} \in \mathbf{R}^{(n,n)}.$$

Somit ist  $P\vec{x} = (\vec{a} \otimes \vec{a}) \vec{x} = \vec{a} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$  die  $\perp$ -Projektion des Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  auf die Richtung  $\vec{a}$ .



$\perp$ -Projektion auf eine Richtung  
 $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|\vec{a}\| = 1$



$\perp$ -Projektion auf eine Hyperebene  
 $H \subset \mathbf{R}^n$  durch  $\vec{0}$

Von der Anschauung ist es klar, dass

$$\boxed{P^2 = P} \tag{3.2}$$

gelten muss. Dies wird auch durch die Rechnung bestätigt. In der Tat, für jedes  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  gilt:

$$P^2 \vec{x} = P(P\vec{x}) = \vec{a} \langle \vec{a}, P\vec{x} \rangle = \vec{a} \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{=1} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = P\vec{x}.$$

Zum Beispiel wird in  $\mathbf{R}^4$  die  $\perp$ -Projektion auf die Richtung  $\vec{a} := \frac{\sqrt{2}}{6} (1, 2, 3, -2)^T$  durch die folgende  $4 \times 4$ -Matrix beschrieben:

$$P = \vec{a} \otimes \vec{a} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \\ -2 & -4 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

**BSP. (5.3.3)** Orthogonalprojektion ( $\perp$ -Projektion) eines Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  auf eine Hyperebene  $H \subset \mathbf{R}^n$  durch  $\vec{0}$ :

Die Hyperebene  $H$  sei in der HESSESCHEN Normalform (HNF)  $H = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n : \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle = 0\}$  mit  $\|\vec{n}_0\| = 1$  vorgelegt. Dann wird die gesuchte  $\perp$ -Projektion gemäß obiger Skizze durch die folgende Abbildungsvorschrift  $P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  geleistet:

$$P\vec{x} := \vec{x} - \vec{n}_0 \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle = (Id_n - \vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0)\vec{x}.$$

Man erkennt auch hier wieder sofort, dass eine lineare Abbildung  $P \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$  vorliegt.

**Merke:** Es sei  $H \subset \mathbf{R}^n$  eine Hyperebene durch  $\vec{0}$  in der HNF  $H = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n : \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle = 0\}$  mit  $\|\vec{n}_0\| = 1$ . Die Matrix  $P$  der  $\perp$ -Projektion auf die Hyperebene  $H$  ist gegeben durch

$$\boxed{P = Id_n - \vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0 \in \mathbf{R}^{(n,n)}}.$$

Somit ist  $P\vec{x} = \vec{x} - (\vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0)\vec{x} = \vec{x} - \vec{n}_0 \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle$  die  $\perp$ -Projektion des Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  auf die Hyperebene  $H$ .

Wir zeigen, dass wiederum die Beziehung (3.2) gilt. In der Tat, für jedes  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  haben wir:

$$P^2 \vec{x} = P(P\vec{x}) = P\vec{x} - \vec{n}_0 \underbrace{\langle \vec{n}_0, P\vec{x} \rangle}_{=0, \text{ weil } \vec{n}_0 \perp P\vec{x}} = P\vec{x}.$$

Zum Beispiel wird in  $\mathbf{R}^3$  die  $\perp$ -Projektion auf die Ebene  $E := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3 : \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle = 0\}$  mit  $\vec{n}_0 := \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2, -1)^T$  durch die folgende  $3 \times 3$ -Matrix beschrieben:

$$P = Id_3 - \vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Wir nehmen das Bestehen der Gleichung (3.2) für die beiden  $\perp$ -Projektionen in BSP. (5.3.2) und BSP. (5.3.3) zum Anlass für folgende Definition:

**Definition 5.15** Es sei  $V$  ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung  $P \in L(V, V)$  heie eine **Projektion**, wenn gilt  $\boxed{P^2 = P}$ . Eine Projektion  $P$  **projiziert** auf den Unterraum  $\text{Bild } P = P(V) \subset V$ .

In BSP. (5.3.2) projiziert  $P$  **orthogonal** auf den UR  $\text{span}\{\vec{a}\} \subset \mathbf{R}^n$ . In BSP. (5.3.3) projiziert  $P$  **orthogonal** auf den UR  $(\text{span}\{\vec{n}_0\})^\perp \subset \mathbf{R}^n$ . **Beachte:** Nicht jede Projektion ist eine  $\perp$ -Projektion!

**BSP. (5.3.4)** Projektion eines Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  auf eine Hyperebene  $H \subset \mathbf{R}^n$  in Richtung  $\vec{a}$ : Die Hyperebene  $H$  sei in der HESSESchen Normalform (HNF)  $H = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n : \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle = \alpha\}$  mit  $\|\vec{n}_0\| = 1$  vorgelegt, und es sei  $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$  mit  $\|\vec{a}\| = 1$  eine feste Richtung. Dann ist die gesuchte Projektion  $P_{\vec{a}}\vec{x}$  eines Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  durch die folgende Vorschrift festgelegt (vgl. untenstehende Skizze):

$$(i) \quad P_{\vec{a}}\vec{x} - \vec{x} = \lambda \vec{a}, \quad (ii) \quad P_{\vec{a}}\vec{x} \in H, \quad \text{also} \quad \langle \vec{n}_0, P_{\vec{a}}\vec{x} \rangle = \alpha.$$

Diese Gleichungen sind genau dann eindeutig nach  $P_{\vec{a}}$  auflösbar, wenn  $\langle \vec{n}_0, \vec{a} \rangle \neq 0$  gilt, wenn also  $\vec{a}$  und  $\vec{n}_0$  **nicht** senkrecht zueinander sind. Setzt man nämlich (i) in (ii) ein, so resultiert die Gleichung  $\langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle + \lambda \langle \vec{n}_0, \vec{a} \rangle = \alpha$ , aus der der Parameter  $\lambda$  eindeutig berechnet werden kann. Wird dieses  $\lambda$  in (i) eingesetzt, so resultiert die gesuchte Lösung

$$P_{\vec{a}}\vec{x} = \frac{\alpha}{\langle \vec{n}_0, \vec{a} \rangle} \vec{a} + \left( Id_n - \frac{1}{\langle \vec{n}_0, \vec{a} \rangle} \vec{a} \otimes \vec{n}_0 \right) \vec{x}.$$

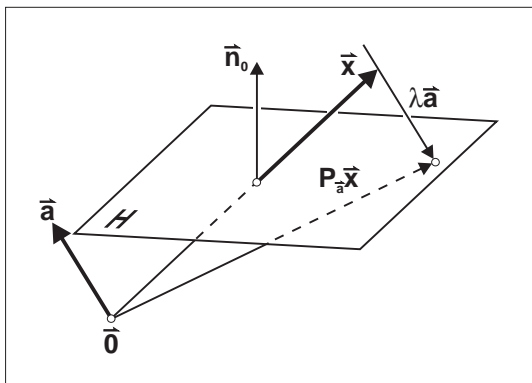
**Bemerkung 5.9** (a) Genau dann ist  $P_{\vec{a}} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  eine **lineare Abbildung**, wenn  $\alpha = 0$  gilt, das heißt, wenn die Hyperebene  $H$  durch den Ursprung  $\vec{0}$  verläuft:

$$P_{\vec{a}} = Id_n - \frac{1}{\langle \vec{n}_0, \vec{a} \rangle} \vec{a} \otimes \vec{n}_0.$$

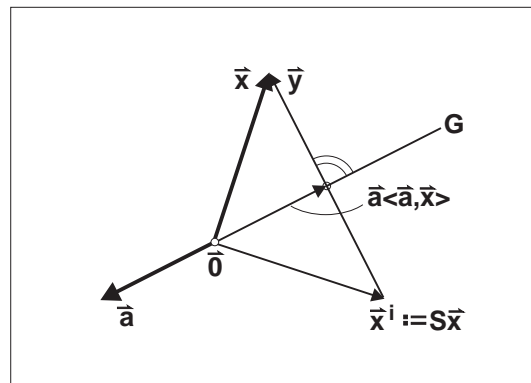
In diesem Fall gilt ebenfalls die Beziehung (3.2), nämlich

$$P_{\vec{a}}^2 \vec{x} = P_{\vec{a}}(P_{\vec{a}}\vec{x}) = P_{\vec{a}}\vec{x} - \frac{1}{\langle \vec{n}_0, \vec{a} \rangle} \vec{a} \underbrace{\langle \vec{n}_0, P_{\vec{a}}\vec{x} \rangle}_{=0, \text{ weil } \vec{n}_0 \perp P_{\vec{a}}\vec{x}} = P_{\vec{a}}\vec{x}.$$

(b) Im Falle  $\vec{a} = \vec{n}_0$  erhalten wir aus (a) wiederum die  $\perp$ -Projektion auf die Hyperebene  $H$  durch  $\vec{0}$ , die wir bereits in BSP. (5.3.3) studiert haben, nämlich  $P := P_{\vec{n}_0} = Id_n - \vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0$ .  $\square$



Projektion in vorgegebener Richtung  $\vec{a}$  auf eine Hyperebene  $H$



Spiegelung an einer Geraden  $G$

Als *Zahlenbeispiel* wollen wir die Projektion  $P_{\vec{a}}\vec{x}$  eines beliebigen Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^4$  in Richtung  $\vec{a} := \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1, 0)^T$  auf die Hyperebene  $H := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^4 : v_1 + 2v_2 + 3v_3 - 2v_4 = \sqrt{2}\}$  bestimmen. Wir haben hier offenbar  $\vec{n}_0 = \frac{\sqrt{2}}{6}(1, 2, 3, -2)^T$  sowie  $\alpha = \sqrt{2}/\sqrt{18} = \frac{1}{3}$ . Hieraus resultieren  $\langle \vec{n}_0, \vec{a} \rangle = \frac{1}{9}\sqrt{3}$  und

$$P_{\vec{a}}\vec{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \vec{x}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

**BSP. (5.3.5)** Spiegelung von  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  an einer Geraden  $G = \text{span}\{\vec{a}\}$ ,  $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|\vec{a}\| = 1$ : Diese wird gemäß obiger Skizze geleistet durch die Abbildungsvorschrift  $S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  mit

$$S\vec{x} := \vec{x}^i = \vec{a} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle - \vec{y},$$

wobei  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{a} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$  gilt. Man erhält wiederum eine lineare Abbildung  $S = 2\vec{a} \otimes \vec{a} - Id_n \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ .

**Merke:** Es sei  $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$  mit  $\|\vec{a}\| = 1$  gegeben. Die Matrix  $S$  der Spiegelung an der Geraden  $G := \text{span}\{\vec{a}\}$  ist gegeben durch

$$S = 2\vec{a} \otimes \vec{a} - Id_n \in \mathbf{R}^{(n,n)}.$$

Somit ist  $S\vec{x} = (2\vec{a} \otimes \vec{a} - Id_n)\vec{x} = 2\vec{a} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle - \vec{x}$  die Spiegelung des Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  an der Geraden  $G = \text{span}\{\vec{a}\}$ .

Von der Anschauung her ist es auch hier klar, dass

$$S^2 = Id_n \tag{3.3}$$

gelten muss. Dies wird durch die folgende Rechnung bestätigt. Für jedes  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  gilt:

$$S^2\vec{x} = S(S\vec{x}) = 2\vec{a} \langle \vec{a}, S\vec{x} \rangle - S\vec{x} = 4\vec{a} \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}_{=1} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle - 2\vec{a} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle - S\vec{x} = \vec{x}.$$

Zum Beispiel wird in  $\mathbf{R}^3$  die Spiegelung an der Geraden  $G = \text{span}\{\vec{a}\}$  mit  $\vec{a} := \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)^T$  durch die folgende  $3 \times 3$ -Matrix beschrieben:

$$S = 2\vec{a} \otimes \vec{a} - Id_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wir nehmen dieses Beispiel zum Anlass für folgende

**Definition 5.16** Es sei  $V$  ein Vektorraum. Eine lineare Abbildung  $S \in L(V, V)$  heie eine Spiegelung oder Involution, wenn gilt  $S^2 = Id$ . Dabei ist der Spiegelraum

$$A_S := \{\vec{v} \in V : S\vec{v} = \vec{v}\} = \text{Kern}(S - Id)$$

die Menge derjenigen Punkte, die in sich selbst abgebildet werden. Das heißt, eine Spiegelung  $S$  spiegelt an dem Unterraum  $\text{Kern}(S - Id)$ .

In dem obigen Beispiel haben wir  $\vec{x} \in \text{Kern}(S - Id)$  genau dann, wenn  $\vec{a} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = \vec{x}$  oder äquivalent  $\vec{x} = \lambda\vec{a}$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ , gilt. Wir ersehen hier, dass die Gerade  $\text{Kern}(S - Id) = \text{span}\{\vec{a}\}$  tatsächlich Spiegelraum ist.

**BSP. (5.3.6)** Spiegelung von  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  an einer Hyperebene  $H \subset \mathbf{R}^n$  durch  $\vec{0}$ : Die Hyperebene  $H$  sei in der HESSESCHEN Normalform (HNF)  $H = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n : \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle = 0\}$  mit  $\|\vec{n}_0\| = 1$  vorgelegt. Dann wird die gesuchte Spiegelung durch die folgende Abbildungsvorschrift  $S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  geleistet:

$$S\vec{x} := (\text{Id}_n - 2\vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0)\vec{x}.$$

Man erkennt auch hier wieder sofort, dass eine **lineare Abbildung**  $S \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$  vorliegt. Wir prüfen die Bedingung (3.3) nach. Es gilt in der Tat:

$$S^2\vec{x} = S(S\vec{x}) = S\vec{x} - 2\vec{n}_0 \langle \vec{n}_0, S\vec{x} \rangle = S\vec{x} - 2\vec{n}_0 \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle + 4\vec{n}_0 \underbrace{\langle \vec{n}_0, \vec{n}_0 \rangle}_{=1} \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle = \vec{x}.$$

Also ist  $S$  eine Spiegelung. Um den Spiegelraum zu ermitteln, berechnen wir  $\text{Kern}(S - \text{Id}_n) = \text{Kern}(\vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0)$ . Es gilt offenbar  $(\vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0)\vec{x} = \vec{n}_0 \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle = \vec{0}$  genau für  $\vec{x} \perp \vec{n}_0$ . Der Spiegelraum ist also der Unterraum  $\text{Kern}(S - \text{Id}_n) = (\text{span}\{\vec{n}_0\})^\perp = H$ .

**Merke:** Es sei  $H \subset \mathbf{R}^n$  eine Hyperebene durch  $\vec{0}$  in der HNF  $H = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n : \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle = 0\}$  mit  $\|\vec{n}_0\| = 1$ . Die **Matrix  $S$  der Spiegelung an der Hyperebene  $H$**  ist gegeben durch

$$S = \text{Id}_n - 2\vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0 \in \mathbf{R}^{(n,n)}.$$

Somit ist  $S\vec{x} = \vec{x} - 2(\vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0)\vec{x} = \vec{x} - 2\vec{n}_0 \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle$  die Spiegelung des Vektors  $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$  an der Hyperebene  $H$ .

Zum *Beispiel* wird in  $\mathbf{R}^3$  die Spiegelung an der Ebene  $E := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3 : \langle \vec{v}, \vec{n}_0 \rangle = 0\}$  mit  $\vec{n}_0 := \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)^T$  durch die folgende  $3 \times 3$ -Matrix beschrieben:

$$P = \text{Id}_3 - 2\vec{n}_0 \otimes \vec{n}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wir notieren schließlich noch die folgende **Regel für die Hintereinanderausführung** zweier Tensorprodukte:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})(\vec{c} \otimes \vec{d}) = \vec{a}(\vec{b}^T \vec{c})\vec{d}^T = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle (\vec{a} \otimes \vec{d}) \in \mathbf{R}^{(m,n)} \quad \forall \vec{a} \in \mathbf{R}^m, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^l, \vec{d} \in \mathbf{R}^n.$$

Mit dieser Regel kann in einfacher Weise bestätigt werden, dass  $P := \vec{a} \otimes \vec{a}$  für  $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\|\vec{a}\| = 1$ , stets eine **Projektion** ist:

$$P^2 = (\vec{a} \otimes \vec{a})(\vec{a} \otimes \vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle (\vec{a} \otimes \vec{a}) = \vec{a} \otimes \vec{a} = P.$$

## 5.4 Die inverse Matrix

Sei  $\mathbf{K}$  ein beliebiger Körper. Für eine gegebene Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  stellt sich die Frage nach der Existenz der **inversen Abbildung**  $A^{-1}$ . Um eine Antwort zu geben, zeigen wir in einem ersten Schritt, dass  $A^{-1}$  **notwendigerweise** eine lineare Abbildung sein muss:

**Satz 5.11** *Es seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Körper  $\mathbf{K}$ . Ist die lineare Abbildung  $f \in L(V, W)$  **bijektiv**, so existiert die inverse Abbildung  $f^{-1} \in L(W, V)$ ; das heißt,  $f^{-1}$  ist wiederum **linear**.*



*Begründung:* Da die Abbildung  $f : V \rightarrow W$  bijektiv ist, existiert die Umkehrabbildung  $f^{-1} : W \rightarrow V$ . Wir zeigen ihre Linearität. Dazu seien  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  gegeben. Wir setzen  $\vec{w} := f(\vec{u})$  und  $\vec{z} := f(\vec{v})$ . Für  $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$  folgt nun aus der Linearitätsbeziehung (L):  $f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \lambda \vec{w} + \mu \vec{z}$ . Wendet man auf diese Gleichung rechts und links die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  an, so resultiert schon die behauptete Linearität

$$f^{-1}(\lambda \vec{w} + \mu \vec{z}) = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \lambda f^{-1}(\vec{w}) + \mu f^{-1}(\vec{z}).$$

**Bemerkung 5.10** (a) Jede **lineare bijektive** Abbildung  $f \in L(V, W)$  ist ein **Isomorphismus** von  $V$  nach  $W$ , vgl. Definition 1.17.

(b) Existiert zu einer Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  die inverse Abbildung  $A^{-1} : \mathbf{K}^m \rightarrow \mathbf{K}^n$ , so muss gemäß Satz 5.11 notwendig  $A^{-1} \in L(\mathbf{K}^m, \mathbf{K}^n) = \mathbf{K}^{(n,m)}$  gelten. Das heißt,  $A^{-1}$  ist stets wieder eine **Matrix**.

(c) Wie in Bemerkung 5.5(c), Abschnitt 5.2, gezeigt wurde, ist die Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  genau dann bijektiv und somit **invertierbar**, wenn gilt

$$\text{Rang } A = m = n.$$

Das heißt,

**invertierbare Matrizen sind notwendigerweise quadratisch.**

(d) Die invertierbaren Matrizen  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  sind also genau die invertierbaren Elemente des assoziativen Ringes  $(\mathbf{K}^{(n,n)}, +, \circ)$ . Somit muss für die Inversen  $A^{-1} \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  gelten:  $\square$

$$AA^{-1} = E_n = A^{-1}A.$$

### Algorithmus zur Berechnung von $A^{-1}$

Wir nehmen also an, die Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  erfülle die obige Rangbedingung  $\text{Rang } A = n$ . Wir werden in Abschnitt 5.8 ein **Determinantenkriterium** für die Rangbedingung angeben. Mit dessen Hilfe kann die Rangbedingung insbesondere für  $n \leq 3$  einfach nachgeprüft werden. (Das Kriterium lautet  $\det A \neq 0$ ). Im allgemeinen Fall ist es zweckmäßig, die Rangbedingung mit dem GAUSS-Algorithmus nachzuprüfen: Genau dann gilt  $\text{Rang } A = n$ , wenn  $A$  in ein S-System vom Typ (I) übergeführt werden kann. Wir verwenden nun die Vektoren  $\vec{e}_j$  der Standardbasis des  $\mathbf{K}^n$  zur Darstellung der Einheitsmatrix in der Form  $E_n = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ . Man erkennt an dieser Darstellung, dass gilt

$$E_n A = A E_n = A, \quad \text{also} \quad E_n = A^{-1} A = A A^{-1}.$$

Das heißt, der **Ansatz**  $A^{-1} := (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$  führt über  $AA^{-1} = (A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_n) \stackrel{!}{=} E_n = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$  auf die  $n$  linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{b}_j = \vec{e}_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Diese löst man **simultan** mit Hilfe des GAUSS-Algorithmus, und zwar muss das System  $(A \mid E_n)$  wegen  $\vec{b}_j = A^{-1}\vec{e}_j$  mittels **elementarer Zeilenumformungen** genau auf die Form  $(E_n \mid \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) = (E_n \mid A^{-1})$  gebracht werden:

$$(A \mid E_n) \xrightarrow{\text{Gauss-Schritte}} (E_n \mid A^{-1}).$$

**BSP. (5.4.1)**

$$(A \mid E_3) \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline Z_1 \Leftrightarrow Z_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ Z_3 - Z_1 \Rightarrow Z_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline Z_3 - Z_2 \Rightarrow Z_3 & & & & & & \\ -\frac{1}{2}Z_3 \Rightarrow Z_3 & & & & & & \\ Z_2 - Z_3 \Rightarrow Z_2 & & & & & & \\ Z_1 - Z_3 \Rightarrow Z_1 & & & & & & \\ E_3 & \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right\} & A^{-1} \end{array}$$

Wir haben in diesem Beispiel also

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

und die **Probe**  $AA^{-1} = E_3$  bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

**Probe niemals vergessen!** Die Gefahr von Rechenfehlern bei der Durchführung der GAUSS-Schritte ist sehr groß, da sehr viele arithmetische Rechenoperationen durchgeführt werden müssen.

Es bezeichne im folgenden

$$\text{Inv}(\mathbf{K}^n) \subset \mathbf{K}^{(n,n)} = \text{Menge der invertierbaren } n \times n\text{-Matrizen.}$$

**Satz 5.12** Für jede Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  hat das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  die eindeutig bestimmte Lösung

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Dieses Ergebnis ist wegen des Aufwands zur Berechnung von  $A^{-1}$  nur dann von praktischer Bedeutung, wenn das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  für **mehrere** rechte Seiten  $\vec{b} = \vec{b}_j, j = 1, 2, \dots, N$ , gelöst werden soll.

**BSP. (5.4.2)** Man löse  $A\vec{x} = \vec{b}_j$  für  $\vec{b}_1 := (8, 7, -7)^T$ ,  $\vec{b}_2 := (-1, 3, 2)^T$  und für die Matrix  $A \in \mathbf{R}^{(3,3)}$  aus BSP. (5.4.1). Die *Lösungen* sind:

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir stellen nachfolgend einige **Rechenregeln** für die Elemente von  $\text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  zusammen.

**Satz 5.13** Für invertierbare Matrizen  $A, B \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  gilt:

$$(i) (A^{-1})^{-1} = A, \quad (ii) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (iii) (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \quad \forall \lambda \neq 0.$$

*Begründung:* Die Relationen (i) und (iii) ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Umkehrabbildung. Wir zeigen (ii):

$$\vec{y} := AB\vec{x} \Leftrightarrow A^{-1}\vec{y} = B\vec{x} \Leftrightarrow B^{-1}A^{-1}\vec{y} = \vec{x} = (AB)^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Linear unabhängige Vektorsysteme werden durch Isomorphismen in linear unabhängige Vektorsysteme übergeführt:

**Satz 5.14** Es seien  $V, W$  Vektorräume über demselben Körper  $\mathbf{K}$ , und es sei  $f \in L(V, W)$  ein **Isomorphismus**. Ein Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  ist **LU**  $\Leftrightarrow$  Das System der Bildvektoren  $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_m) \in W$  ist **LU**.

*Begründung:* Wir zeigen zunächst die Implikation " $\Rightarrow$ ". Sei also ein linear unabhängiges Vektorsystem  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in V$  gegeben. Wir nehmen an, es gebe Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$ , nicht alle Null, mit

$$\vec{0} = \sum_{k=1}^m \lambda_k f(\vec{v}_k) \stackrel{(L)'}{=} f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{v}_k\right).$$

Da  $f$  bijektiv ist, folgern wir  $f^{-1}(\vec{0}) = \vec{0} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{v}_k$ , im Widerspruch zur LU des Vektorsystems  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ . Also muss  $\lambda_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m$  gelten. Das heißt, das System der Bildvektoren  $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), \dots, f(\vec{v}_m) \in W$  ist LU. Die Implikation " $\Leftarrow$ " zeigt man nun ganz analog.  $\square$

**Bemerkung 5.11** (a) Ist  $f \in L(V, W)$  ein **Isomorphismus** und ist einer der Vektorräume  $V$  oder  $W$  **endlichdimensional**, so gilt  $\dim V = \dim W$ .

(b) Ein Isomorphismus  $f \in L(V, W)$  bildet **Basen** von  $V$  auf **Basen** von  $W$  ab, und umgekehrt.

(c) Insbesondere gilt für jede **invertierbare** Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ :

$$\text{Rang}(AB) = \text{Rang} B \quad \forall B \in \mathbf{K}^{(n,m)}, \quad \text{Rang}(CA) = \text{Rang} C \quad \forall C \in \mathbf{K}^{(m,n)}.$$

## 5.5 Basis- und Koordinatentransformation

Wir nehmen die obige Bemerkung 5.11(b) über die Abbildung von Basen auf Basen durch einen Isomorphismus zum Anlass, die folgende Fragestellung zu untersuchen:

**Problem:** Es sei ein Vektorraum  $V$  über dem Körper  $\mathbf{K}$  mit  $\dim V =: n < \infty$  gegeben. Es seien ferner  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$  und  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in V$  zwei Basen von  $V$ . Gibt es einen **Isomorphismus**  $f \in L(V, V)$  mit  $f(\vec{a}_j) = \vec{b}_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$ , und falls dieser existiert, wie berechnet man ihn? Wie transformieren sich ferner die **Koordinaten** eines Vektors  $\vec{v} \in V$  beim Wechsel von der Basis  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  in die Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ ?

Wir werden beide Fragen in mehreren Schritten untersuchen.

1. *Schritt:* Wir haben in Satz 5.3.(a) gezeigt, dass eine lineare Abbildung  $f \in L(V, V)$  allein durch die Zuordnungsvorschrift  $\vec{b}_j = f(\vec{a}_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , eindeutig bestimmt ist. Also existiert ein  $f \in L(V, V)$  mit den geforderten Abbildungseigenschaften. Wegen  $\text{Bild } f = \text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\} = V$  gilt  $\text{Rang } f = n$ . Somit ist  $f$  gemäß Satz 5.7 bijektiv, also ein Isomorphismus. Für den allgemeinen Fall eines Vektorraumes  $V$  kann eine Darstellung von  $f$  nicht angegeben werden.

**Sonderfall:** Im Vektorraum  $V := \mathbf{K}^n$  bilden die Basisvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  und  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  die Spalten von Matrizen  $A := (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  bzw.  $B := (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ , denn es gilt ja  $\text{Rang } A = \text{Rang } B = n$ . Somit folgt

$$F := BA^{-1} \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n),$$

und wegen  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) = B = FA = (F\vec{a}_1, F\vec{a}_2, \dots, F\vec{a}_n)$  leistet der Isomorphismus  $F$  die verlangte **Basistransformation**  $\vec{b}_j = F\vec{a}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

2. *Schritt:* Wir untersuchen jetzt die Frage nach der Transformation der **Koordinaten** bei Basiswechsel. Es ist klar, gemäß der Definition einer Basis in  $V$  müssen eindeutig definierte Zahlen  $\alpha_{jk}, \beta_{jk} \in \mathbf{K}$ , und zu jedem  $\vec{v} \in V$  eindeutig definierte Zahlen  $\lambda_j, \mu_j \in \mathbf{K}$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, n$ , existieren mit

$$\vec{b}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \vec{a}_k, \quad \vec{a}_j = \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \vec{b}_k \quad \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^n \mu_j \vec{b}_j. \quad (5.2)$$

3. *Schritt:* Mit dem **Ansatz**  $T := (t_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  zeigen wir nun die Existenz einer **linearen Abbildung**  $\vec{\mu} = T\vec{\lambda}$  zwischen dem Koordinatenvektor  $\vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$  von  $\vec{v}$  bezüglich der Basis  $\vec{a}_j$  und dem Koordinatenvektor  $\vec{\mu} := (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$  von  $\vec{v}$  bezüglich der Basis  $\vec{b}_j$ . Setzen wir nämlich die Beziehungen (5.1) in (5.2) ein, so gilt

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left( \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \vec{b}_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \beta_{jk} \lambda_j \right) \vec{b}_k \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^n \mu_k \vec{b}_k.$$

Da das Vektorsystem  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  **LU** ist, folgern wir

$$\mu_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} \lambda_j =: \sum_{j=1}^n t_{kj} \lambda_j = (T\vec{\lambda})_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Das heißt, die Transformationsmatrix  $T = (t_{jk}) := (\beta_{jk})^T$  ist durch die Beziehungen (5.1) eindeutig bestimmt:

$$T = (\beta_{jk})^T = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1^T \\ \vec{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n^T \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{\beta}_k = \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

4. *Schritt:* Wir bestimmen ganz analog eine Transformationsmatrix  $S := (s_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  zum Koordinatenwechsel  $\vec{\lambda} = S\vec{\mu}$ . Es folgt nun aus den Beziehungen (5.1) und (5.2):

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n \mu_j \left( \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \vec{a}_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} \mu_j \right) \vec{a}_k \stackrel{!}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k.$$

Da das Vektorsystem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  **LU** ist, folgern wir jetzt

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} \mu_j =: \sum_{j=1}^n s_{kj} \mu_j = (S\vec{\mu})_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Das heißt, die Transformationsmatrix  $S = (s_{jk}) := (\alpha_{jk})^T$  ist wiederum durch die Beziehungen (5.1) eindeutig bestimmt:

$$S = (\alpha_{jk})^T = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1^T \\ \vec{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n^T \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{\alpha}_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Nun gilt offenbar  $\vec{\lambda} = ST\vec{\lambda}$  und  $\vec{\mu} = TS\vec{\mu} \quad \forall \vec{\lambda}, \vec{\mu} \in \mathbf{K}^n$ . Das heißt, die Koeffizienten  $\alpha_{jk}, \beta_{jk}$  in (5.1) sind nicht unabhängig voneinander; sie stehen in der Relation

$$S := (\alpha_{jk})^T, \quad T := (\beta_{jk})^T \Rightarrow S = T^{-1}.$$

**Sonderfall**  $V := \mathbf{K}^n$ : Führen wir wie oben die Matrizen  $A, B \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  ein, so können wir die Gleichungen (5.1) in der Form  $B = AS = AT^{-1}$  und  $A = BT$  schreiben. In diesem Fall leisten die folgenden Matrizen die gesuchten **Koordinatentransformationen**:

$$T = B^{-1}A, \quad S = T^{-1} = A^{-1}B.$$

**Definition 5.17** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbf{K}$  mit  $\dim V = n < \infty$ . Es seien  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$  und  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in V$  zwei **Basen** von  $V$ . Dann existiert ein Isomorphismus  $f \in L(V, V)$  mit  $f(\vec{a}_j) = \vec{b}_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$ . Dieser heie **Basistransformation zum Basiswechsel** von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  auf  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ . Die lineare Abbildung  $T \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  mit  $\vec{\mu} = T\vec{\lambda}$ , so dass fur gegebenes  $\vec{v} \in V$  gilt*

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \vec{a}_j = \vec{v} = \sum_{j=1}^n \mu_j \vec{b}_j,$$

heie **Koordinatentransformation** zum Basiswechsel von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  auf  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ .

**Satz 5.15** (a) *In einem Vektorraum  $V$  über  $\mathbf{K}$  mit endlicher Dimension  $\dim V = n$  existieren zu jedem Basiswechsel von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  auf  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  Umrechnungsformeln*

$$\vec{b}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \vec{a}_k, \quad \vec{a}_j = \sum_{k=1}^n \beta_{jk} \vec{b}_k \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1)$$

Die Spaltenvektoren  $\vec{\beta}_k := (\beta_{1k}, \beta_{2k}, \dots, \beta_{nk})^T$  bzw.  $\vec{\alpha}_k := (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{nk})^T, k = 1, 2, \dots, n$ , der aus (5.1) resultierenden Matrizen  $(\beta_{jk})$  und  $(\alpha_{jk})$  bilden in der folgenden Weise die **Matrix**  $T$  (bzw.  $S$ ) der **Koordinatentransformation** zum Basiswechsel von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  auf  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  (bzw. von  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  auf  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ):

$$T = \begin{bmatrix} \vec{\beta}_1^T \\ \vec{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n^T \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1^T \\ \vec{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n^T \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $T \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ist ein **Isomorphismus**; es gilt  $T^{-1} = S$ .

(b) Im **Sonderfall**  $V := \mathbf{K}^n$  bilden wir mit den gegebenen Basisvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^n$  und  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in \mathbf{K}^n$  die Matrizen  $A, B \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  gemäß  $A := (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  und  $B := (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ . Dann folgt:

| Basiswechsel      | Matrix der <b>Basistransform.</b> | Matrix der <b>Koordinatentransform.</b> |
|-------------------|-----------------------------------|---|
| $A \rightarrow B$ | $F = BA^{-1}$                     | $T = B^{-1}A$                           |
| $B \rightarrow A$ | $F^{-1} = AB^{-1}$                | $T^{-1} = A^{-1}B$                      |

**BSP. (5.5.1)** Es sei  $V := \mathbf{R}^4$ . Es sei  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  die *Standardbasis* von  $\mathbf{R}^4$ . Dann gilt  $A := Id_4 = A^{-1}$ . Es sei ferner eine neue Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$  gegeben, so dass die Matrix  $B := (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$  in der folgenden Form vorliegt:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Somit sind  $F := BA^{-1} = B$  und  $T := B^{-1}A = B^{-1}$  die Matrizen der Basistransformation bzw. der Koordinatentransformation zum Basiswechsel  $A \rightarrow B$ . In der Standardbasis hat *zum Beispiel* der Vektor  $\vec{x} := (-50, 25, -8, 1)^T \in \mathbf{R}^4$  die Koordinaten  $\lambda_j = x_j, j = 1, 2, 3, 4$ . Wir berechnen den Koordinatenvektor von  $\vec{x}$  in der neuen Basis  $\vec{b}_j$ :

$$\vec{\mu} = T\vec{\lambda} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -50 \\ 25 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -28 \\ 5 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Hieraus erschließen wir

$$\vec{x} = 19\vec{b}_1 - 28\vec{b}_2 + 5\vec{b}_3 - 18\vec{b}_4,$$

und die *Einsetzprobe*

$$\vec{x} = 19\vec{b}_1 - 28\vec{b}_2 + 5\vec{b}_3 - 18\vec{b}_4 = \begin{bmatrix} 19 - 56 + 5 - 18 \\ 38 - 0 + 5 - 18 \\ 38 - 28 + 0 - 18 \\ 19 - 28 + 10 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 25 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

**BSP. (5.5.2)** Es sei  $V := \mathbf{C}_n[z] := \{P(z) : P \text{ ist Polynom über } \mathbf{C} \text{ mit } \text{Grad } P \leq n\}$ . Wir betrachten speziell  $\mathbf{C}_3[z] = \text{span}\{1, z, z^2, z^3\}$  mit der Basis  $a_j(z) := z^{j-1}, j = 1, 2, 3, 4$ . Das System  $b_1(z) := 1 + z, b_2(z) := 1 - z^2, b_3(z) := z + 2z^3, b_4(z) := z^2 + 3z^3 \in \mathbf{C}_3[z]$  ist **LU**, so dass auch  $\mathbf{C}_3[z] = \text{span}\{b_1(z), b_2(z), b_3(z), b_4(z)\}$  gilt. Die Umrechnungsformeln (5.1) können hier sofort abgeleitet werden:

$$(\alpha_{jk}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow S = (\alpha_{jk})^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten nun die Matrix  $T = S^{-1}$  der Koordinatentransformation zum Basiswechsel von  $a_j(z)$  auf  $b_j(z)$ , nämlich

$$T = S^{-1} = (\beta_{jk})^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (\beta_{jk}) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zum Beispiel hat das Polynom  $P_3(z) := z^3 - 8z^2 + 25z - 50 = \sum_{k=0}^3 \lambda_k z^k$  in der Basis  $a_j(z)$  den Koordinatenvektor  $\vec{\lambda} := (-50, 25, -8, 1)^T \in \mathbf{R}^4$ . Dieser wird auf den folgenden Koordinatenvektor  $\vec{\mu}$  in der Basis  $b_j(z)$  transformiert:

$$\vec{\mu} = T\vec{\lambda} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -50 \\ 25 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ -25 \\ 50 \\ -33 \end{bmatrix}.$$

Hieraus erschließen wir

$$P_3(z) = -25 b_1(z) - 25 b_2(z) + 50 b_3(z) - 33 b_4(z),$$

und die *Einsetzprobe*

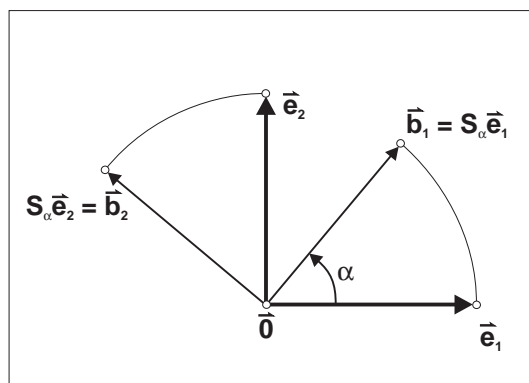
$$\begin{aligned} P_3(z) &= -25 b_1(z) - 25 b_2(z) + 50 b_3(z) - 33 b_4(z) \\ &= -25 - 25z - 25 + 25z^2 + 50z + 100z^3 - 33z^2 - 99z^3 \\ &= z^3 - 8z^2 + 25z - 50 \end{aligned}$$

bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses.

**BSP. (5.5.3)** In  $V := \mathbf{R}^2$  seien für festes  $\alpha \in [0, 2\pi)$  Matrizen

$$S_\alpha := \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad T_\alpha := \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

gegeben. Man verifiziert unmittelbar  $T_\alpha^{-1} = S_\alpha$ , das heißt,  $T_\alpha \in \mathbf{R}^{(2,2)}$  ist ein Isomorphismus. Aus der Standardbasis  $\vec{e}_1 = (1, 0)^T$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)^T$  erhalten wir vermöge  $\vec{b}_j := S_\alpha \vec{e}_j$  eine neue Basis  $\vec{b}_1 := (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$ ,  $\vec{b}_2 := (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$ . Wie die Skizze zeigt, entsteht diese Basis durch **Drehung** der Standardbasis in  $\mathbf{R}^2$  um den Winkel  $\alpha$ :



Drehung der Standardbasis um den Winkel  $\alpha$

Hier sind  $S_\alpha$  und  $T_\alpha$  die Matrizen der **Basistransformation** zum Basiswechsel  $Id_2 \rightarrow B$  bzw.  $B \rightarrow Id_2$ , während  $T_\alpha$  und  $S_\alpha$  die Matrizen der **Koordinatentransformation** zum Basiswechsel  $Id_2 \rightarrow B$  bzw.  $B \rightarrow Id_2$  darstellen. Ganz analog beschreiben in  $\mathbf{R}^3$  die Matrizen

$$S_\alpha := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Drehungen** der Standardbasis um einen Winkel  $\alpha$  mit den Drehachsen in Richtung  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  bzw.  $\vec{e}_3$ . (Die Drehachse ist jeweils der Unterraum Kern  $(S_\alpha - Id_3)$ .)

## 5.6 Matrizen im Skalarprodukt

In diesem Abschnitt gelte  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ , und wir bezeichnen mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$  das **Standardskalarprodukt** in dem Vektorraum  $V := \mathbf{K}^n$  sowie mit  $\|\cdot\|$  die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.

**Definition 5.18** Für eine gegebene Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  heie

- $\bar{A} := (\alpha_{jk}) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  mit  $\alpha_{jk} := \bar{a}_{jk}$  die zu  $A$  **konjugierte Matrix**,
- $A^T := (\beta_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,m)}$  (beachte die vertauschten Zeilen- und Spaltendimensionen  $n$  bzw.  $m$ !) mit  $\beta_{jk} := a_{kj}$  für  $j = 1, 2, \dots, n$  und  $k = 1, 2, \dots, m$  die zu  $A$  **transponierte Matrix**,
- $A^* := (\bar{A})^T = \overline{(A^T)} \in \mathbf{K}^{(n,m)}$  die zu  $A$  **adjungierte Matrix**.

Zum Beispiel gilt für  $A = \begin{bmatrix} 5 + 2i & 3 - 2i & 0 \\ 2 + 5i & 4 + i & i \end{bmatrix}$ :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 5 - 2i & 3 + 2i & 0 \\ 2 - 5i & 4 - i & -i \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 5 + 2i & 2 + 5i \\ 3 - 2i & 4 + i \\ 0 & i \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} 5 - 2i & 2 - 5i \\ 3 + 2i & 4 - i \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

**Bemerkung 5.12** Die zu  $A = (a_{jk})$  transponierte (oder *gestürzte*) Matrix  $A^T$  entsteht durch **Vertauschen der Zeilen mit den Spalten**. Dies entspricht einer Spiegelung an der **Hauptdiagonalen**  $a_{jj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, \min\{n, m\}$ . Sind  $\vec{a}_k \in \mathbf{K}^m$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , die Spaltenvektoren der Matrix  $A$ , das heißt gilt  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ , so folgt:

$$A^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{bmatrix}.$$

Insofern sind Vektortransposition und Matrixtransposition **konsistent**. □

Für  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  gilt stets  $A^* = A^T$ .

Die Bedeutung der adjungierten Matrix wird unter anderem durch das folgende Resultat klar.



**Satz 5.16** Für eine gegebene Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  ist  $A^* \in \mathbf{K}^{(n,m)}$  die einzige Matrix mit

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle_m = \langle \vec{x}, A^*\vec{y} \rangle_n \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{K}^m. \quad (6.1)$$

*Begründung:* Wir haben für jedes feste  $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$  und  $\vec{y} \in \mathbf{K}^m$ :

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle_m = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right) \bar{y}_j = \sum_{k=1}^n x_k \overline{\left( \sum_{j=1}^m \bar{a}_{jk} y_j \right)} = \langle \vec{x}, A^*\vec{y} \rangle_n.$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, es gebe eine weitere Matrix  $B \in \mathbf{K}^{(n,m)}$  mit  $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle_m = \langle \vec{x}, B\vec{y} \rangle_n \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{K}^m$ . Dann folgt

$$0 = \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle_m - \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle_m = \langle \vec{x}, A^*\vec{y} - B\vec{y} \rangle_n \stackrel{\vec{x} := A^*\vec{y} - B\vec{y}}{=} \|(A^* - B)\vec{y}\|^2,$$

also  $A^*\vec{y} = B\vec{y} \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{K}^m$ . Dies gilt nur für  $A^* = B$ .  $\square$

In dem folgenden Satz sind die wichtigsten Rechenregeln für die drei Operationen "Konjugation", "Transposition" und "Adjunktion" zusammengestellt.

**Satz 5.17** (a) Für eine Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und für jede der drei Operationen  $\diamond$  (= **Konjugation** oder **Transposition** oder **Adjunktion**) gilt:

$$(i) (A^\diamond)^\diamond = A, \quad (ii) (A \pm \lambda B)^\diamond = A^\diamond \pm \lambda^\diamond B^\diamond \quad \forall B \in \mathbf{K}^{(m,n)} \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \quad (\text{mit } \lambda^T := \lambda).$$

(b) Für je zwei Matrizen  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und  $B \in \mathbf{K}^{(n,l)}$  gilt:

$$(i) \overline{(AB)} = \bar{A}\bar{B}, \quad (ii) (AB)^T = B^T A^T, \quad (iii) (AB)^* = B^* A^*.$$

(c) Für eine Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  gilt:

$$(i) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \quad (ii) (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

(d) Für jedes Paar von Vektoren  $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$ ,  $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$  und jede Matrix  $A \in \mathbf{R}^{(n,l)}$  gilt:

$$(i) (\vec{a} \otimes \vec{b})^T = \vec{b} \otimes \vec{a}, \quad (ii) (\vec{a} \otimes \vec{b}) A = \vec{a} \otimes (A^T \vec{b}).$$

*Begründungen:* Die Aussagen (a), (b) und (d) erhält man unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen unter Verwendung der Beziehung (6.1). Wir zeigen nun die Aussage (c.ii). Für jedes Paar Vektoren  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n$  gilt:

$$\langle \vec{x}, (A^{-1})^* \vec{y} \rangle_n = \langle A^{-1} \vec{x}, \vec{y} \rangle_n = \langle A^{-1} \vec{x}, A^* (A^*)^{-1} \vec{y} \rangle_n = \langle A A^{-1} \vec{x}, (A^*)^{-1} \vec{y} \rangle_n = \langle \vec{x}, (A^*)^{-1} \vec{y} \rangle_n.$$

Hieraus folgt  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ , sofern  $A^*$  bijektiv ist. Die Bijektivität von  $A^*$  ergibt sich aber aus dem nächsten Satz.  $\square$

**Satz 5.18** (a) Für jede gegebene Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  stehen die Unterräume Kern und Bild von  $A$  und  $A^*$  in der folgenden Relation zueinander:

$$\text{Kern } A^* = (\text{Bild } A)^\perp \quad \text{und} \quad \text{Kern } A = (\text{Bild } A^*)^\perp, \quad (6.2)$$

$$\boxed{(\text{Kern } A^*)^\perp = \text{Bild } A \quad \text{und} \quad (\text{Kern } A)^\perp = \text{Bild } A^*} \quad (6.3)$$

(b) Für die Dimensionen der Unterräume Kern und Bild von  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und  $A^*$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \text{Rang } A = \text{Rang } \bar{A} = \text{Rang } A^* = \text{Spaltenrang } A (= \text{Anzahl der } \mathbf{LU} \text{ Spalten}) \\ & = \text{Zeilenrang } A (= \text{Anzahl der } \mathbf{LU} \text{ Zeilen}) \leq \min\{n, m\}. \\ \text{(ii)} \quad & \dim \text{Kern } A - \dim \text{Kern } A^* = n - m. \\ \text{(iii)} \quad & A \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow A^* \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow \dim \text{Kern } A = n - m. \end{aligned}$$

Begründungen: (a) Wir zeigen zunächst (6.2). Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} \vec{y} \in \text{Kern } A^* & \Leftrightarrow A^* \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, A^* \vec{y} \rangle_n = \langle A \vec{x}, \vec{y} \rangle_m = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n \\ & \Leftrightarrow \vec{y} \perp \text{Bild } A \Leftrightarrow \vec{y} \in (\text{Bild } A)^\perp. \end{aligned}$$

Somit folgt  $\text{Kern } A^* = (\text{Bild } A)^\perp$ , und ganz analog zeigt man  $\text{Kern } A = (\text{Bild } A^*)^\perp$ . Wir zeigen nun (6.3). Dazu verwenden wir die Relation  $U = U^{\perp\perp}$ , die für jeden Unterraum  $U$  eines endlichdimensionalen Prachilbertraumes gilt, vgl. Satz 4.20.(c) und Bemerkung 4.16(a). Wir haben hier gemäß (6.1):  $(\text{Kern } A^*)^\perp = (\text{Bild } A)^{\perp\perp} = \text{Bild } A$  sowie  $(\text{Kern } A)^\perp = (\text{Bild } A^*)^{\perp\perp} = \text{Bild } A^*$ .

(b) Zum Beweis von (i) setzen wir  $\text{Rang } A =: r \leq n$ . Klar, die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$  sind genau dann LU, wenn dies für die konjugierten Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r$  gilt. Also folgt  $\text{Rang } A = \text{Rang } \bar{A}$ . Ferner erhalten wir aus (a) durch orthogonale Zerlegungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^m &= \text{Kern } A^* \oplus \text{Bild } A \Rightarrow m = \dim \text{Kern } A^* + \text{Rang } A \stackrel{\text{Satz 5.6}}{=} \dim \text{Kern } A^* + \text{Rang } A^*, \\ \mathbf{K}^n &= \text{Kern } A \oplus \text{Bild } A^* \Rightarrow n = \dim \text{Kern } A + \text{Rang } A^* \stackrel{\text{Satz 5.6}}{=} \dim \text{Kern } A + \text{Rang } A. \end{aligned}$$

Dies impliziert schon

$$\boxed{\text{Rang } A = \text{Rang } A^* \leq \min\{m, n\}, \quad n - m = \dim \text{Kern } A - \dim \text{Kern } A^*} \quad (6.4)$$

Der Rest ergibt sich aus den Bemerkungen 5.5. Die Aussage (ii) haben wir schon mit (6.4) gezeigt. Schließlich sieht man (iii) wie folgt ein:

$$\begin{aligned} A \text{ surjektiv} & \Leftrightarrow \text{Bild } A = \mathbf{K}^m \Leftrightarrow \{\vec{0}\} = (\text{Bild } A)^\perp \stackrel{(a)}{=} \text{Kern } A^* \\ & \Leftrightarrow A^* \text{ injektiv} \stackrel{(6.4)}{\Leftrightarrow} \dim \text{Kern } A = n - m. \end{aligned}$$

Für die Lösung **linearer Gleichungssysteme** resultiert aus diesen Zusammenhängen:

**Satz 5.19** Gegeben seien eine Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und ein Vektor  $\vec{b} \in \mathbf{K}^m$ . Dann gelten für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$  die folgenden Aussagen:

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b} \text{ ist lösbar} \Leftrightarrow \vec{b} \in (\text{Kern } A^*)^\perp \Leftrightarrow \langle \vec{b}, \vec{v} \rangle_m = 0 \quad \forall \vec{v} \in \text{Kern } A^*} \quad (6.5)$$

Der Vektor  $\vec{b}$  muss also  $m - \text{Rang } A$  Lösbarkeitsbedingungen erfüllen. Ist  $\text{Rang } A = m$ , so folgt

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b} \text{ ist lösbar} \quad \forall \vec{b} \in \mathbf{K}^m \Leftrightarrow \dim \text{Kern } A^* = 0 = \dim \text{Kern } A + m - n} \quad (6.6)$$

*Begründung:* Die Lösbarkeitsbedingungen folgen aus vorstehendem Satz 5.18.(a), wobei wir im Beweis bereits die Dimensionsrelation  $\dim \text{Kern } A^* = m - \text{Rang } A$  gezeigt haben.  $\square$

**BSP. (5.6.1)** Für welche Vektoren  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T \in \mathbf{R}^4$  ist das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  bei gegebener Matrix  $A$  lösbar?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Lösung:* Es muss die Lösbarkeitsbedingung  $\vec{b} \in (\text{Kern } A^T)^\perp$  erfüllt sein. Wir berechnen  $\vec{v} \in \text{Kern } A^T \Leftrightarrow A^T \vec{v} = \vec{0}$ :

$$(A^T \mid \vec{0}) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ \hline Z_1 \Leftrightarrow Z_2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ Z_2 + Z_1 \Rightarrow Z_2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ Z_3 + Z_1 \Rightarrow Z_3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -Z_3 \Leftrightarrow Z_2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ Z_3 + 2Z_2 \Rightarrow Z_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = C_1(1, 0, 1, 0)^T.$$

Wir erhalten hieraus  $\text{Kern } A^* = \text{span} \{(1, 0, 1, 0)^T\}$ , und somit  $\dim \text{Kern } A^* = 1$ . Es ist also **genau eine** Lösbarkeitsbedingung zu erfüllen, und diese lautet:

$$0 = \langle \vec{b}, \vec{v} \rangle_4 = \langle (b_1, b_2, b_3, b_4)^T, (1, 0, 1, 0)^T \rangle_4 = b_1 + b_3.$$

Das heißt, jeder Vektor in der Form  $\vec{b} = (b_1, b_2, -b_1, b_4)^T$  ist Element von Bild  $A$ , und für ein solches  $\vec{b}$  ist  $A\vec{x} = \vec{b}$  lösbar. Wir folgern ferner aus  $m = 4$  und  $n = 3$ , dass  $\text{Rang } A = m - \dim \text{Kern } A^* = 3$  sowie  $\dim \text{Kern } A = \dim \text{Kern } A^* + n - m = 0$  gilt. Das heißt, die Spaltenvektoren der Matrix  $A$  sind **LU**, und das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  ist für jedes  $\vec{b}$  in der obigen Form **eindeutig** lösbar. Man prüft leicht nach, dass die Lösung die folgende Form hat:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - b_4 \\ b_4 - b_2 \\ 2b_4 - b_2 - 2b_1 \end{bmatrix}.$$

## 5.7 Spezielle Matrizen

### (I) Symmetrische und hermitesche Matrizen.

Es gelte nachfolgend  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ .

**Definition 5.19** Eine Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie **symmetrisch** ( $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ ) oder **hermitesch** ( $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ ), wenn gilt:

$$A = A^*, \text{ oder äquivalent } a_{jk} = \bar{a}_{kj} \quad \forall j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Insbesondere muss  $a_{jj} \in \mathbf{R} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$  gelten. Das heißt, die Hauptdiagonalelemente einer hermiteschen Matrix sind stets **reell**.

Zum Beispiel ist die folgende Matrix  $A \in \mathbf{C}^{(3,3)}$  hermitesch:

$$A := \begin{bmatrix} 10 & 2 + 5i & 5 + 2i \\ 2 - 5i & 0 & 3i \\ 5 - 2i & -3i & -7 \end{bmatrix} = A^*.$$

Wir listen nachfolgend Beispiele und Eigenschaften hermitescher Matrizen auf.

**Satz 5.20** (a) Für jede Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  sind folgende Matrizen **hermitesch**:

$$A + A^*, \quad AA^*, \quad A^*A.$$

Es gelten ferner die Beziehungen

$$\begin{array}{ll} \text{Kern } A^*A = \text{Kern } A, & \text{Kern } AA^* = \text{Kern } A^*, \\ \text{Bild } A^*A = \text{Bild } A^*, & \text{Bild } AA^* = \text{Bild } A. \end{array}$$

(b) Jede reelle Diagonalmatrix ist symmetrisch; das Tensorprodukt  $\vec{v} \otimes \vec{v}$  ist symmetrisch für jeden Vektor  $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$ .

(c) Ist  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  hermitesch, so gilt stets

$$\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n \in \mathbf{R} \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n, \quad BAB^* \text{ hermitesch } \forall B \in \mathbf{K}^{(n,n)}.$$

(d)  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  hermitesch  $\Leftrightarrow A^*$  hermitesch  $\Leftrightarrow A^{-1}$  hermitesch, falls  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ .

(e) Sind  $A, B \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  hermitesch, so gilt dies auch für  $A + \lambda B$ , sofern  $\lambda$  reell ist. Das heißt, die symmetrischen Matrizen bilden einen Unterraum von  $\mathbf{R}^{(n,n)}$ , während die hermiteschen Matrizen **keinen** Unterraum von  $\mathbf{C}^{(n,n)}$  bilden.

*Begründungen:* (a) Wir zeigen  $\text{Kern } A^*A \subseteq \text{Kern } A$  und wählen dazu  $\vec{x} \in \text{Kern } A^*A$ . Aus  $A^*A\vec{x} = \vec{0}$  erschließen wir

$$0 = \langle \vec{x}, A^*A\vec{x} \rangle_n = \langle A\vec{x}, A\vec{x} \rangle_n = \|A\vec{x}\|^2,$$

und somit  $\vec{x} \in \text{Kern } A$ . Dies bedeutet  $\text{Kern } A^*A \subseteq \text{Kern } A$ , also auch  $\text{Kern } A^*A = \text{Kern } A$ , da stets die triviale Inklusion  $\text{Kern } A \subseteq \text{Kern } A^*A$  gilt. Wir zeigen nun  $\text{Bild } A^* \subseteq \text{Bild } A^*A$ . Dazu wählen wir  $\vec{v} \in (\text{Bild } A^*A)^\perp$ , so dass folgt:

$$0 = \langle \vec{v}, A^*A\vec{v} \rangle_n = \langle A\vec{v}, A\vec{v} \rangle_n = \|A\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{v} \in \text{Kern } A = (\text{Bild } A^*)^\perp.$$

Wir ersehen hieraus  $(\text{Bild } A^*A)^\perp \subseteq (\text{Bild } A^*)^\perp$ , und durch Übergang zu den Orthogonalkomplementen erhält man die behauptete Inklusion. Da stets  $\text{Bild } A^*A \subseteq \text{Bild } A^*$  gilt, resultiert jetzt die Gleichung  $\text{Bild } A^*A = \text{Bild } A^*$ . Ganz analog geht man bei der Matrix  $AA^*$  vor.

(b) Es ist  $(\vec{v} \otimes \vec{v})^T = (\vec{v} \vec{v}^T)^T = \vec{v}^{TT} \vec{v}^T = \vec{v} \vec{v}^T = \vec{v} \otimes \vec{v}$ .

(c) Für jedes  $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$  haben wir

$$\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n = \langle \vec{x}, A^*\vec{x} \rangle_n = \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle_n = \overline{\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n}.$$

Also muss das Skalarprodukt  $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n$  reell sein. Wir haben ferner für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n$ :

$$\langle BAB^*\vec{x}, \vec{y} \rangle_n = \langle AB^*\vec{x}, B^*\vec{y} \rangle_n = \langle B^*\vec{x}, AB^*\vec{y} \rangle_n = \langle \vec{x}, BAB^*\vec{y} \rangle_n.$$

(d) Diese Behauptung folgt unmittelbar aus den Relationen  $A^{**} = A$  und  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .

(e) Es gilt  $(\lambda B)^* = \bar{\lambda} B^* = \bar{\lambda} B \stackrel{!}{=} \lambda B$  genau für  $\lambda \in \mathbf{R}$ . □

**(II) Antisymmetrische und antihermitesche Matrizen.**

Es gelte nachfolgend wiederum  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ .

**Definition 5.20** Eine Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie **antisymmetrisch** ( $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ ) oder **antihermitesch** ( $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ ), wenn gilt:

$$A = -A^*, \text{ oder äquivalent } a_{jk} = -\bar{a}_{kj} \quad \forall j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Insbesondere muss  $a_{jj} \in i\mathbf{R} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$  gelten. Das heißt, die Hauptdiagonalelemente einer antihermiteschen Matrix sind stets **rein imaginär** oder Null.

Zum Beispiel ist die folgende Matrix  $A \in \mathbf{C}^{(3,3)}$  antihermitesch:

$$A := \begin{bmatrix} 2i & 2 + 5i & 5 + 2i \\ -2 + 5i & 0 & 3i \\ -5 + 2i & 3i & i \end{bmatrix} = -A^*.$$

Wir listen nachfolgend wieder Beispiele und Eigenschaften antihermitescher Matrizen auf.

**Satz 5.21** (a) Für jede Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ist die Matrix  $A - A^*$  **antihermitesch**. Hiermit kann jede Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  in eindeutiger Weise zerlegt werden in einen hermiteschen und einen antihermiteschen Anteil, nämlich:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*).$$

(b) Ist  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  antihermitesch, so gilt stets

$$\operatorname{Re} \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n, \quad BAB^* \text{ antihermitesch } \forall B \in \mathbf{K}^{(n,n)}.$$

Das heißt insbesondere  $\vec{x} \perp A\vec{x}$ , wenn  $A$  antisymmetrisch und  $\vec{x}$  reell ist.

(c)  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  antihermitesch  $\Leftrightarrow A^*$  antihermitesch  $\Leftrightarrow A^{-1}$  antihermitesch, falls  $A \in \operatorname{Inv}(\mathbf{K}^n)$ .

(d) Sind  $A, B \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  antihermitesch, so gilt dies auch für  $A + \lambda B$ , sofern  $\lambda$  **reell** ist. Das heißt, die antisymmetrischen Matrizen bilden einen Unterraum von  $\mathbf{R}^{(n,n)}$ , während die antihermiteschen Matrizen **keinen** Unterraum von  $\mathbf{C}^{(n,n)}$  bilden.

*Begründungen:* Wir zeigen hier nur den ersten Teil der Aussage (b), da alle anderen Aussagen direkt aus den Definitionen folgen. Für jedes  $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$  haben wir nämlich

$$\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n = \langle \vec{x}, A^*\vec{x} \rangle_n = -\langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle_n = -\overline{\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n}.$$

Also muss das Skalarprodukt  $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n$  rein imaginär sein. □

**BSP. (5.7.1)** Wir geben hier ein Beispiel für die Zerlegung einer Matrix in den hermiteschen und den antihermiteschen Anteil:

$$A := \begin{bmatrix} 2 + 4i & 2 - 4i & 4 + 2i \\ 4 - 2i & 4i & 6 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 - i & 3 + i \\ 3 + i & 0 & 5 \\ 3 - i & 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4i & -1 - 3i & 1 + i \\ 1 - 3i & 4i & 1 \\ -1 + i & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**(III) Orthogonale und unitäre Matrizen.**

Es gelte nachfolgend wiederum  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ .

**Definition 5.21** Eine Matrix  $Q = (q_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie **orthogonal** ( $\mathbf{K} := \mathbf{R}$ ) oder **unitär** ( $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ ), wenn gilt

$$Q^{-1} = Q^*, \quad \text{oder quivalent} \quad \langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle_n = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_n \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n.$$

Insbesondere erfüllt eine unitäre Matrix die Relationen  $Q^*Q = Id_n = QQ^*$ .

Zum Beispiel ist die folgende Matrix  $Q \in \mathbf{R}^{(3,3)}$  orthogonal:

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{7}{\sqrt{66}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{4}{\sqrt{66}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{66}} \end{bmatrix}.$$

Man berechnet nämlich  $Q^T Q = Id_3$  oder man prüft das in dem folgenden Satz 5.22.(d) angegebene Kriterium nach.

Wir geben in dem folgenden Satz Beispiele und Eigenschaften unitärer Matrizen an:

**Satz 5.22** (a) Für jedes Paar unitärer Matrizen  $Q, Q_1 \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  sind  $QQ_1$  und  $Q_1Q$  unitär. Ferner ist  $Q^* = Q^{-1}$  unitär, und  $\lambda Q$  ist unitär genau für  $|\lambda| = 1$ .

(b) Ist  $Q \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  unitär, so gilt

$$\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad \text{und} \quad \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_n}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle_n}{\|Q\vec{x}\| \|Q\vec{y}\|} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n.$$

Das heißt, unter einer unitären Abbildung  $Q$  bleibt die euklidische Länge des Vektors  $\vec{x}$  erhalten. Ist  $Q$  orthogonal, so bleiben sogar die Winkel zwischen zwei Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  unter der Abbildung  $Q$  erhalten.

(c) Ist  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^n$  eine **ON-Basis**, so wird diese unter der unitären Matrix  $Q \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  wieder in eine **ON-Basis**  $Q\vec{a}_1, Q\vec{a}_2, \dots, Q\vec{a}_n \in \mathbf{K}^n$  abgebildet.

(d) **Hauptkriterium für unitäre Matrizen:**

Eine Matrix  $Q = (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ist genau dann **unitär**, wenn die Spaltenvektoren  $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$  eine **ON-Basis** des  $\mathbf{K}^n$  bilden.

*Begründungen:* (a) Die Unitarität  $(\lambda Q)^* = \bar{\lambda} Q^* \stackrel{!}{=} (\lambda Q)^{-1} = \frac{1}{\lambda} Q^{-1} = \frac{1}{\lambda} Q^*$  liegt genau dann vor, wenn  $|\lambda|^2 = 1$  gilt.

(b) Es gilt  $\|Q\vec{x}\|^2 = \langle Q\vec{x}, Q\vec{x} \rangle_n = \langle \vec{x}, Q^*Q\vec{x} \rangle_n = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_n = \|\vec{x}\|^2 \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n$ .

(c) Es gilt  $\delta_{jk} = \langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle_n = \langle Q\vec{a}_j, Q\vec{a}_k \rangle_n \quad \forall j, k = 1, 2, \dots, n$ .

(d) Da die Standardbasis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  eine ON-Basis des  $\mathbf{K}^n$  ist, folgt aus (c), dass die Spaltenvektoren  $\vec{q}_j = Q\vec{e}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ebenfalls eine ON-Basis des  $\mathbf{K}^n$  bilden. Ist umgekehrt das Vektorsystem  $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$  eine ON-Basis des  $\mathbf{K}^n$ , so hat die Matrix  $Q := (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n)$  Vollrang  $\text{Rang } Q = n$ . Also ist  $Q$  ein Isomorphismus, und die inverse Matrix  $Q^{-1}$  existiert. Wir zeigen  $Q^* = Q^{-1}$ . In der Tat, mit der Bezeichnung  $\vec{q}_j^* = \vec{q}_j^T$  gilt:

$$Q^*Q = \begin{bmatrix} \vec{q}_1^* \\ \vec{q}_2^* \\ \vdots \\ \vec{q}_n^* \end{bmatrix} (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n) = (\langle \vec{q}_j, \vec{q}_k \rangle_n) = (\delta_{jk}) = Id_n.$$



**Definition 5.23** Eine Matrix  $P \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie eine **Projektion** auf den Unterraum  $\text{Bild } P$ , wenn gilt

$$P^2 = P.$$

Eine Projektion  $P \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie **orthogonal**, wenn gilt

$$\text{Bild } P = (\text{Kern } P)^\perp.$$

In diesem Falle hat man  $\mathbf{K}^n = \text{Kern } P \oplus \text{Bild } P$ . Das heißt, wegen  $\vec{x} = (\vec{x} - P\vec{x}) + P\vec{x}$  mit  $P\vec{x} \in \text{Bild } P \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n$  ist eine Projektion  $P$  genau dann orthogonal, wenn gilt

$$\vec{x} - P\vec{x} \perp \text{Bild } P \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n.$$

Zum Beispiel rechnet man sofort nach, dass die folgende Matrix die Gleichung  $P^2 = P$  erfüllt, also eine Projektion ist.

$$P := \begin{bmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix  $P$  ist aber **keine** orthogonale Projektion. Zum Beispiel wird der Vektor  $\vec{x} := (1, 0, 0)^T$  abgebildet auf  $\vec{y} := \vec{x} - P\vec{x} = (3, -1, -1)^T$ , und dieser Vektor ist zu keinem der Spaltenvektoren von  $P$  orthogonal. Also kann auch nicht  $\vec{y} \perp \text{Bild } P$  gelten.

Die Fragen, wie man mit **einfachen** Kriterien nachprüft, ob eine Projektion orthogonal ist, und wie man bei Vorgabe des Unterraumes  $\text{Bild } P$  die orthogonale Projektion  $P$  bestimmt, werden in dem folgenden Satz beantwortet.

**Satz 5.23** (a) Eine Projektion  $P \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ist genau dann **orthogonal**, wenn  $P$  **hermitesch** ist, das heißt, wenn gilt:

$$P^* = P.$$

(b) Ist  $U \subseteq \mathbf{K}^n$  ein Unterraum, so gibt es genau eine orthogonale Projektion  $P \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  auf  $U = \text{Bild } P$ . Ist  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p$  eine **Basis** von  $U$ , so heie die Matrix  $A := (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p) \in \mathbf{K}^{(n,p)}$  **Fundamentalmatrix** oder **Basismatrix** von  $U$ . Für jede Basismatrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,p)}$  gilt:

(i) Die **GRAMSche Matrix**  $A^*A$  ist invertierbar:  $A^*A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^p)$ .

(ii) Die **orthogonale Projektion**  $P$  auf den Unterraum  $U$  ist die Matrix

$$P := A(A^*A)^{-1}A^*.$$

(c) Ist  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in \mathbf{R}^n$  eine **ON-Basis** des Unterraumes  $U \subseteq \mathbf{R}^n$ , so lässt sich die **orthogonale Projektion**  $P$  auf  $U$  einfacher berechnen durch

$$P = \sum_{k=1}^p \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k.$$

*Begründungen:* (a) Wir haben oben gezeigt, dass eine Projektion  $P \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  genau dann orthogonal ist, wenn  $\vec{x} - P\vec{x} \perp \text{Bild } P \forall \vec{x} \in \mathbf{K}^n$  gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$0 = \langle P\vec{y}, \vec{x} - P\vec{x} \rangle_n = \langle \vec{y}, P^*\vec{x} - P^*P\vec{x} \rangle_n \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^n,$$



oder äquivalent  $P^* = P^*P$ . Da die Matrix  $P^*P$  hermitesch ist, muss dies auch für  $P^*$  gelten.

(b) Wegen  $\mathbf{K}^n = U \oplus U^\perp$  gibt es für jeden Vektor  $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$  genau eine Zerlegung  $\vec{x} = P\vec{x} + (\vec{x} - P\vec{x})$  mit  $P\vec{x} \in U$  und  $\vec{x} - P\vec{x} \in U^\perp$ . Zum Beweis von (i) zeigen wir  $\text{Kern } A^*A = \{\vec{0}\}$ . Dann folgt nämlich bereits  $A^*A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^p)$ . In der Tat, für  $\vec{x} \in \text{Kern } A^*A$  haben wir  $A^*A\vec{x} = \vec{0}$ , und somit

$$0 = \langle \vec{x}, A^*A\vec{x} \rangle_p = \langle A\vec{x}, A\vec{x} \rangle_n = \|A\vec{x}\|^2.$$

Wegen  $\text{Rang } A = p$  folgern wir aus dem Dimensionssatz  $\dim \text{Kern } A = 0$ , und somit muss  $\vec{x} = \vec{0}$  gelten. Zum Beweis von (ii) zeigen wir zunächst  $P^2 = P$ . Dies erkennt man aber sofort an  $P^2 = A(A^*A)^{-1} \underbrace{A^*A(A^*A)^{-1}}_{=Id} A^* = P$ . Wir zeigen jetzt  $P^* = P$ :

$$P^* = [A(A^*A)^{-1}A^*]^* = A[(A^*A)^{-1}]^*A^* = A[(A^*A)^*]^{-1}A^* = A(A^*A)^{-1}A^* = P.$$

Schließlich müssen wir noch  $\text{Bild } P = \text{Bild } A (= U)$  zeigen. Da  $(A^*A)^{-1} : \mathbf{K}^p \rightarrow \mathbf{K}^p$  ein Isomorphismus ist, gilt  $\text{Bild } A^* = \text{Bild } (A^*A)^{-1}A^*$ . Somit folgt aus Satz 5.20.(a) auch  $\text{Bild } P = \text{Bild } A(A^*A)^{-1}A^* = \text{Bild } AA^* = \text{Bild } A$ .

(c) Der Vektor  $P\vec{x} \in U$  hat gemäß Bemerkung 4.15(b), S.188, in der ON-Basis  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$  die Darstellung

$$P\vec{x} = \sum_{k=1}^p \langle P\vec{x}, \vec{u}_k \rangle_n \vec{u}_k, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Wegen  $\langle \vec{x}, \vec{u}_k \rangle_n = \langle \underbrace{(\vec{x} - P\vec{x})}_{\perp U} + P\vec{x}, \vec{u}_k \rangle_n = \langle P\vec{x}, \vec{u}_k \rangle_n$  folgt daraus schon die behauptete Darstellung:

$$P\vec{x} = \sum_{k=1}^p \langle \vec{x}, \vec{u}_k \rangle_n \vec{u}_k = \left( \sum_{k=1}^p \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k \right) \vec{x}.$$

**Merke:** (i) Eine **orthogonale** Projektion  $P \neq Id$  kann **nie** auch eine **orthogonale** (oder **unitäre**) Matrix sein. Andernfalls hätten wir  $P = P^2 = P^*P = P^{-1}P = Id$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) Ist die orthogonale Projektion  $P$  auf einen Unterraum  $U \subseteq \mathbf{R}^n$  zu bestimmen, so gehe man nie den Weg über die GRAMSche Matrix. Dieser ist aufwendiger als der Weg über das Auffinden einer ON-Basis von  $U$  und der Verwendung der Darstellung

$$P = \sum_{k=1}^p \vec{u}_k \otimes \vec{u}_k.$$

**BSP. (5.7.4)** Wir demonstrieren beide Wege an dem Beispiel der  $\perp$ -Projektion auf den Unterraum  $U := \text{span} \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \subset \mathbf{R}^3$  mit  $\vec{a}_1 := (1, 0, 1)^T$ ,  $\vec{a}_2 := (1, 2, 1)^T$  und  $\vec{a}_3 := (2, 2, 2)^T$ . Man erkennt sogleich, dass  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  LU sind, während  $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$  gilt. Das heißt, wir haben  $U = \text{span} \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ .

**1.Methode:** Wir verwenden die GRAMSche Matrix.

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad (A^*A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hiermit berechnet man die gesuchte  $\perp$ -Projektion

$$P = A(A^*A)^{-1}A^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es ist nicht schwer, die Bedingungen  $P^2 = P$  und  $P^T = P$  nachzuprüfen. Man erkennt auch sofort,  $\text{Bild } P = \text{span} \{(1, 0, 1)^T, (0, 2, 0)^T\} = \text{span} \{\vec{a}_1, \vec{a}_2 - \vec{a}_1\} = \text{span} \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = U$ .

**2. Methode:** Die Vektoren  $\vec{a}_1 / \|\vec{a}_1\| = (1, 0, 1)^T / \sqrt{2} =: \vec{u}_1$  und  $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) / \|\vec{a}_2 - \vec{a}_1\| = (0, 1, 0)^T =: \vec{u}_2$  bilden eine ON-Basis von  $U$ . Also haben wir:

$$P = \vec{u}_1 \otimes \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \otimes \vec{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Lineare Ausgleichsprobleme:**

In den Anwendungen spielt die in Satz 4.21 angegebene **Extremaleigenschaft** der orthogonalen Projektion eine wichtige Rolle. Wir formulieren die Relation (9.1) aus Abschnitt 4.9 hier für eine orthogonale Projektion  $P \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ :

$$\|\vec{x} - P\vec{x}\| = \min_{\vec{v} \in \mathbf{K}^n} \|\vec{x} - P\vec{v}\| \leq \|\vec{x} - P\vec{y}\| \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{K}^n. \quad (7.1)$$

Ist zum Beispiel ein **lineares Gleichungssystem**  $A\vec{x} = \vec{b}$  bei gegebener Koeffizientenmatrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und gegebener rechter Seite  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbf{K}^m$  **unlösbar**, so bestimmt man häufig anstelle der fehlenden **exakten** Lösung eine **beste Lösung**  $\vec{x}_0 \in \mathbf{K}^n$  **im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate**: der Fehler

$$\|F(\vec{x})\| := \|A\vec{x} - \vec{b}\| = \left( \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k - b_j \right|^2 \right)^{1/2}$$

soll für  $\vec{x} = \vec{x}_0$  am kleinsten werden:

$$\|A\vec{x}_0 - \vec{b}\| = \min_{\vec{x} \in \mathbf{K}^n} \|A\vec{x} - \vec{b}\|.$$

Die Lösung dieser Aufgabe beschreiben wir in dem folgenden

**Satz 5.24** Gegeben seien eine Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$  und ein Vektor  $\vec{b} \in \mathbf{K}^m$ . Es sei  $P \in \mathbf{K}^{(m,m)}$  die orthogonale Projektion auf den Unterraum  $\text{Bild } A \subseteq \mathbf{K}^m$ . Genau dann ist  $\vec{x}_0 \in \mathbf{K}^n$  eine **beste Lösung** (im Sinne kleinster Fehlerquadrate) des linearen Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$ , wenn  $A\vec{x}_0 = P\vec{b}$  gilt, oder äquivalent, wenn die **GAUSSSchen Normalgleichungen**

$$A^* A \vec{x}_0 = A^* \vec{b} \quad (7.2)$$

erfüllt sind. Diese sind für jede Vorgabe  $\vec{b} \in \mathbf{K}^m$  (i.a. mehrdeutig) lösbar.

*Begründung:* Wir erschließen aus (7.1): Es gilt  $\|\vec{b} - A\vec{x}_0\| = \min_{\vec{x} \in \mathbf{K}^n} \|\vec{b} - A\vec{x}\|$  genau für  $A\vec{x}_0 = P\vec{b} = \vec{b} + (P\vec{b} - \vec{b})$ , wobei wir  $P\vec{b} - \vec{b} \perp \text{Bild } P = \text{Bild } A$  haben. Also ist diese Bedingung genau dann wahr, wenn für alle  $\vec{y} \in \mathbf{K}^n$  gilt:

$$0 = \langle A\vec{x}_0 - \vec{b}, A\vec{y} \rangle_m = \langle A^* A \vec{x}_0 - A^* \vec{b}, \vec{y} \rangle_n,$$

oder äquivalent  $A^* A \vec{x}_0 = A^* \vec{b}$ . In Satz 5.20.(a) haben wir die Relation  $\text{Bild } A^* A = \text{Bild } A^*$  gezeigt, so dass stets  $A^* \vec{b} \in \text{Bild } A^* A$  gilt. Also sind die GAUSSSchen Normalgleichungen lösbar.  $\square$

**BSP. (5.7.5)**Das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit der Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ist für die rechte Seite  $\vec{b} := (1, 2, 3, 4)^T$  **unlösbar**, man vgl. BSP. (5.6.1) in Abschnitt 5.6. Wir bestimmen eine **beste Lösung**  $\vec{x}_0$  im Sinne kleinster Fehlerquadrate durch Lösen der GAUSSschen Normalgleichungen  $A^*A\vec{x}_0 = A^*\vec{b}$ :

$$A^*A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 3 & -3 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^*\vec{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Man berechnet aus diesen Daten ohne Schwierigkeiten die in diesem Beispiel **eindeutig** bestimmte beste Lösung  $\vec{x}_0 := (-5, 2, 8)^T$ .

**Bemerkung 5.13** Die zwei Gleichungen  $A^*A\vec{x} = A^*\vec{b}$  und  $A\vec{x} = P\vec{b}$  haben wegen  $\text{Bild } A^*A = \text{Bild } A^*$  und  $\text{Kern } A^*A = \text{Kern } A$  dieselbe Lösungsmenge, sofern  $P$  die orthogonale Projektion auf  $\text{Bild } A$  ist. Ist insbesondere  $A\vec{x} = \vec{b}$  lösbar, so muss  $\vec{b} = P\vec{b}$  erfüllt sein. In diesem Falle haben die Gleichungen  $A^*A\vec{x} = A^*\vec{b}$  und  $A\vec{x} = \vec{b}$  dieselbe Lösungsmenge. Es ist aber **numerisch nicht ratsam**, anstelle des linearen Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$  die GAUSSschen Normalgleichungen zu lösen, da ihre numerische Lösung weitaus empfindlicher gegenüber Rundungsfehlern ist.  $\square$

## (V) Dreiecksmatrizen, Permutationsmatrizen.

Es sei  $\mathbf{K}$  ein beliebiger Körper.

**Definition 5.24** (a) *Matrizen in der speziellen Form*



$= R := (r_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  mit  $r_{jk} = 0$  für  $j > k$  heißen **Rechtsdreiecksmatrizen**;



$= L := (l_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  mit  $l_{jk} = 0$  für  $j < k$  heißen **Linksdreiecksmatrizen**.

Wir setzen

$$\begin{aligned} U_R(\mathbf{K}^n) &:= \{R \in \mathbf{K}^{(n,n)} : R \text{ ist Rechtsdreiecksmatrix}\}, \\ U_L(\mathbf{K}^n) &:= \{L \in \mathbf{K}^{(n,n)} : L \text{ ist Linksdreiecksmatrix}\}. \end{aligned}$$

(b) Eine Matrix  $P_{jk} \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ , die durch Vertauschung der Zeilen  $Z_j \Leftrightarrow Z_k$  aus der Einheitsmatrix  $Id_n \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  hervorgeht, heie **elementare Permutation**. Eine Matrix  $P \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie **Permutationsmatrix**, wenn sie das Produkt einer endlichen Anzahl von elementaren Permutationen ist:  $P = P_p P_{p-1} \cdots P_1$ .

**BSP. (5.7.6)** Sei  $n = 4$ :

$$R := \begin{bmatrix} 2i & 5-i & 0 & -3i \\ 0 & 1 & 2+5i & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in U_R(\mathbf{C}^4), \quad L := \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 2+3i & 2 & 0 & 0 \\ 1-i & 4i & 0 & 0 \\ 0 & 3-2i & 0 & -4i \end{bmatrix} \in U_L(\mathbf{C}^4),$$

$$Id_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{Z_1 \leftrightarrow Z_3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: P_{13} \xleftarrow{\boxed{S_1 \leftrightarrow S_3}} Id_4,$$

$$\downarrow \boxed{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \\ P_{23} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P := P_{13}P_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^T = P_{23}P_{13}.$$

**Satz 5.25** (a) Die Unterräume  $U_L(\mathbf{K}^n), U_R(\mathbf{K}^n) \subset \mathbf{K}^{(n,n)}$  der Links- bzw. Rechtsdreiecksmatrizen sind **abgeschlossen** bezüglich des Matrizenproduktes:

$$\boxed{\begin{aligned} L_1L_2, L_2L_1 &\in U_L(\mathbf{K}^n) \quad \forall L_1, L_2 \in U_L(\mathbf{K}^n), \\ R_1R_2, R_2R_1 &\in U_R(\mathbf{K}^n) \quad \forall R_1, R_2 \in U_R(\mathbf{K}^n). \end{aligned}}$$

Ferner ist  $U_L(\mathbf{K}^n) \cap U_R(\mathbf{K}^n) =: U_\Delta \subset \mathbf{K}^{(n,n)}$  der Unterraum der **Diagonalmatrizen**.

(b) Zeilenvertauschungen  $Z_j \leftrightarrow Z_k$  und Spaltenvertauschungen  $S_j \leftrightarrow S_k$  in  $Id_n \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  liefern jeweils dieselbe elementare Permutation  $P_{jk}$ .

(c) Elementare Permutationen  $P_{jk}$  sind über  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  und  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$  **symmetrisch und orthogonal**; jede Permutationsmatrix  $P$  ist **orthogonal**:  $P^T = P^{-1}$ .

(d) Sind  $P_r \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  die elementaren Permutationen  $Z_{j_r} \leftrightarrow Z_{k_r}$ ,  $r = 1, 2, \dots, p$ , und ist  $P = P_p P_{p-1} \cdots P_1$ , so geht  $PA$  für beliebig gegebenes  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  aus  $A$  durch die **nacheinander** ausgeführten Zeilenvertauschungen  $Z_{j_1} \leftrightarrow Z_{k_1}, Z_{j_2} \leftrightarrow Z_{k_2}, \dots, Z_{j_p} \leftrightarrow Z_{k_p}$  hervor.

*Begründungen:* (a) folgt durch einfaches Nachprüfen, und (b) folgt aus der vollständigen Symmetrie von  $Id_n \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ .

(c) Gelte  $Id_n \xrightarrow{Z_j \leftrightarrow Z_k} P_{jk}$ . Dann folgt  $Id_n = Id_n^T \xrightarrow{S_j \leftrightarrow S_k} P_{jk}^T$ . Gemäß (b) ergibt sich also  $P_{jk} = P_{jk}^T$ . Ferner bestehen die Spaltenvektoren von  $P_{jk}$  und von  $P$  aus den Vektoren  $\vec{e}_j$  der Standardbasis des  $\mathbf{K}^n$ . Da das System  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  eine ON-Basis bildet, müssen  $P_{jk}$  und  $P$  gemäß Satz 5.22.(d) orthogonal sein.

(d) Gegeben sei  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Hat  $A$  die **Zeilenvektoren**  $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_n \in (\mathbf{K}^n)^T$ , so besteht  $A^*$  aus den **Spaltenvektoren**  $\vec{z}_1^*, \vec{z}_2^*, \dots, \vec{z}_n^* \in \mathbf{K}^n$ ,  $A^* = (\vec{z}_1^*, \vec{z}_2^*, \dots, \vec{z}_n^*)$ ;  $\vec{z}_j^* := \vec{z}_j^T$ . Wir betrachten  $P = P_p P_{p-1} \cdots P_1$ :

$$(PA)^* = A^* P^T = A^* P_1 P_2 \cdots P_p = (A^* P_1) P_2 \cdots P_p.$$

Wegen  $P_1 = P_{j_1 k_1} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k_1}, \dots, \vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_n)$  (entsprechend der Zeilenvertauschung  $Z_{j_1} \leftrightarrow Z_{k_1}$ !) folgt dann:

$$A^* P_1 = (A^* \vec{e}_1, \dots, A^* \vec{e}_{k_1}, \dots, A^* \vec{e}_{j_1}, \dots, A^* \vec{e}_n) = (\vec{z}_1^*, \dots, \vec{z}_{k_1}^*, \dots, \vec{z}_{j_1}^*, \dots, \vec{z}_n^*).$$

Mithin bewirkt  $A^* P_1$  in  $A$  die Zeilenvertauschung  $Z_{j_1} \leftrightarrow Z_{k_1}$ , und danach bewirkt  $(A^* P_1) P_2$  in  $A$  die Zeilenvertauschung  $Z_{j_2} \leftrightarrow Z_{k_2}$ , usw.  $\square$

**Satz 5.26** (a) Seien  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  und  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$  gegeben. Dann haben die linearen Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{und} \quad PA\vec{x} = P\vec{b}$$

für jede Permutationsmatrix  $P$  stets dieselbe Lösungsmenge bzw. dasselbe Lösungsverhalten.

(b) Für Matrizen  $L \in U_L(\mathbf{K}^n)$  und  $R \in U_R(\mathbf{K}^n)$  gilt genau dann  $L, R \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ , wenn kein Hauptdiagonalelement verschwindet:

$$l_{jj} \neq 0 \neq r_{jj} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

In diesem Falle gilt für die inversen Matrizen:  $L^{-1} \in U_L(\mathbf{K}^n)$  und  $R^{-1} \in U_R(\mathbf{K}^n)$ .

(c) Zu jeder Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  existieren eine (i.a. nicht eindeutig bestimmte) Permutationsmatrix  $P$  und Dreiecksmatrizen  $L \in U_L(\mathbf{K}^n) \cap \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ ,  $R \in U_R(\mathbf{K}^n) \cap \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  mit

$$PA = LR. \tag{7.3}$$

Diese Zerlegung heißt eine **LR-Zerlegung der Matrix  $A$** . Die Zerlegung ist **nicht eindeutig**: Für jede Diagonalmatrix  $\Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  mit  $\lambda_j \neq 0$  gilt  $\Lambda \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ . Es existiert die inverse Matrix  $\Lambda^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ , und mit den Matrizen  $\tilde{L} := (L\Lambda^{-1}) \in U_L(\mathbf{K}^n)$  sowie  $\tilde{R} := (\Lambda R) \in U_R(\mathbf{K}^n)$  hat man eine neue Zerlegung

$$PA = LR = L(\Lambda^{-1}\Lambda)R = (L\Lambda^{-1})(\Lambda R) = \tilde{L}\tilde{R}.$$

Für gegebenes  $P$  sind die Matrizen  $L$  und  $R$  jedoch durch die folgende Zusatzbedingung eindeutig bestimmt:

$$l_{jj} = 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \tag{7.4}$$

*Begründungen:* (a) Die Permutationsmatrix  $P$  bewirkt in dem linearen Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  lediglich Zeilenvertauschungen.

(b) Die Matrizen  $R, L^T \in U_R(\mathbf{K}^n)$  sind bereits Staffel-Matrizen und vom Typ (I) genau dann, wenn die Hauptdiagonalelemente nicht verschwinden.

(c) Durch den GAUSS-Algorithmus wird das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  in ein Staffel-System vom Typ (I) übergeführt:

$$(A \mid \vec{b}) \xrightarrow{\text{Gauss-Schritte}} \left. \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} * & & & \\ * & & & \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \\ O & & & \end{array} & \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{array} \end{array} \right\} = (R \mid B\vec{b}) \quad \boxed{\text{S-System, Typ (I)}}$$

Werden dabei nacheinander die Zeilenvertauschungen  $Z_{j_1} \Leftrightarrow Z_{k_1}, Z_{j_2} \Leftrightarrow Z_{k_2}, \dots, Z_{j_p} \Leftrightarrow Z_{k_p}$  durchgeführt, so fassen wir diese zur Permutationsmatrix  $P := P_p P_{p-1} \cdots P_1$  zusammen. Wir denken uns zuerst **alle** Permutationen ausgeführt:

$$(A \mid \vec{b}) \xrightarrow{\text{Zeilenvert.}} (PA \mid P\vec{b}) \xrightarrow{\text{GAUSS ohne Zeilenvert.}} (R \mid MP\vec{b}).$$

Hierin ist  $R \in U_R(\mathbf{K}^n)$  eine invertierbare Matrix. Es muss  $R = MPA$  gelten mit einer Matrix  $M \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Wir folgern  $M = RA^{-1}P^T \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ . Setzen wir  $L := M^{-1}$ , so folgt jetzt die behauptete Zerlegung  $PA = LR$ . Dass  $L \in U_L(\mathbf{K}^n)$  gilt, ergibt sich aus der Konstruktion, die wir

weiter unten näher beschreiben wollen. An dieser Stellen verzichten wir auf Details. Schließlich wird durch die Bedingung (7.4) genau eine Diagonalmatrix  $\Lambda \in U_\Lambda(\mathbf{K}^n)$  festgelegt, für die gilt:

$$\tilde{L}\Lambda^{-1} = L = (l_{jk}) \quad \text{mit} \quad l_{jj} = 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Hat nämlich die Matrix  $\tilde{L} = (\tilde{l}_{jk}) \in U_L(\mathbf{K}^n)$  Diagonalelemente  $\tilde{l}_{jj} \neq 0$ , so setze man  $\Lambda = \text{diag}(\tilde{l}_{11}, \tilde{l}_{22}, \dots, \tilde{l}_{nn})$ .  $\square$

**Bemerkung 5.14** (a) Eine **direkte** Zerlegung  $A = LR$  ist im allgemeinen **nicht** möglich, selbst nicht für Matrizen  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ .

Wir betrachten zum Beispiel  $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Inv}(\mathbf{R}^2)$ . Wären  $L := \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} \in U_L(\mathbf{R}^2)$  und  $R := \begin{bmatrix} d & f \\ 0 & e \end{bmatrix} \in U_R(\mathbf{R}^2)$  die gesuchten Dreiecksmatrizen, so hätte man

$$LR = \begin{bmatrix} ad & af \\ cd & cf + eb \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zu erfüllen, was die widersprüchlichen Bedingungen  $d = 0, cd = 1$  lieferte. (b) Hat man in einem **1. Schritt** für eine Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  die LR-Zerlegung (7.3) mit Dreiecksmatrizen  $L, R \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  unter der Nebenbedingung (7.4) erzeugt, so kann danach das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  bei gegebener rechter Seite  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$  sehr einfach gelöst werden, indem man nämlich in einem **2. Schritt** einen Hilfsvektor  $\vec{c}$  aus dem Staffel-System  $L\vec{c} = P\vec{b} := \vec{d}$  bestimmt, und in einem **3. Schritt** das Staffel-System  $R\vec{x} = \vec{c}$  löst. Für den 2. Schritt verwendet man das **Verfahren des Vorwärtseinsetzens**:

$$c_j = d_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} c_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (7.5)$$

und den 3. Schritt bewältigt man durch das **Verfahren des Rückwärtseinsetzens**:

$$x_j = \frac{1}{r_{jj}} \left( c_j - \sum_{k=j+1}^n r_{jk} x_k \right), \quad j = n, n-1, \dots, 1. \quad (7.6)$$

Der Vorteil dieser Vorgehensweise gegenüber dem herkömmlichen GAUSS-Algorithmus ist **rein numerischer Art**. Bei Verwendung des Rechenschemas

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ Schritt: } & PA = LR \quad (\mathbf{LR}\text{-Zerlegung von } PA) \\ 2. \text{ Schritt: } & L\vec{c} = P\vec{b} \quad (\mathbf{Vorwärtseinsetzen zur Berechn. von } \vec{c}) \\ 3. \text{ Schritt: } & R\vec{x} = \vec{c} \quad (\mathbf{Rückwärtseinsetzen zur Berechn. von } \vec{x}). \end{array} \quad (7.7)$$

hat man ein gegen Rundungsfehler äußerst unempfindliches numerisches Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrizen  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ .  $\square$

**BSP. (5.7.7)** Wir nehmen an, es gelte

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dann erhalten wir

$$PA = LR = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = P^T(PA) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wir lösen zu gegebener rechter Seite  $\vec{b} := (2, -2, 3, 5)^T$  das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  wie oben skizziert: **2. Schritt:**

$$L\vec{c} = P\vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**3. Schritt:**

$$R\vec{x} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 34 \\ 7 \\ -36 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

**(VI) Untermatrizen, Hauptuntermatrizen, Streichungsmatrizen.**

Es sei  $\mathbf{K}$  ein beliebiger Körper.

**Definition 5.25** Gegeben sei eine Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(m,n)}$ .

(a) Eine Matrix  $\tilde{A} := (a_{rs}) \in \mathbf{K}^{(p,q)}$  mit  $1 \leq p \leq m$ ,  $1 \leq q \leq n$ , die durch Herausnahme eines zusammenhängenden  $(p \times q)$ -Zahlenblocks aus der Matrix  $A$  entstanden ist, heie eine **Untermatrix** von  $A$ .

(b) Ist  $\tilde{A} = (a_{rs})$  eine **quadratische**  $(p \times p)$ -Untermatrix von  $A$ , deren **Hauptdiagonalelemente**  $a_{rr}$ ,  $1 \leq r \leq p$ , **sämtlich Hauptdiagonalelemente** von  $A$  sind, so heie  $\tilde{A}$  eine **Hauptuntermatrix**.

(c) Eine Matrix  $A_{jk} \in \mathbf{K}^{(m-1, n-1)}$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq k \leq n$ , die aus der Matrix  $A$  durch **Streichung** der  $j$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte entsteht, heie eine **Streichungsmatrix** von  $A$ .

**BSP. (5.7.8)** Hauptuntermatrizen von  $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  sind die folgenden Matrizen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, (1), (3), (2).$$

**Streichungsmatrizen** sind zum Beispiel

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Andere Beispiele von **Untermatrizen** von  $A$  sind durch folgende Feldeinteilung gekennzeichnet:

$$A := \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right].$$

Die allgemeine Form der **Streichungsmatrix** ist:

$$A_{jk} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \text{---} & a_{jk} & \text{---} & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} j\text{-te Zeile.} \\ \\ \\ k\text{-te Spalte} \end{array}$$

**Bemerkung 5.15** Man könnte annehmen, dass die **Hauptuntermatrizen** der Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  selbst **invertierbare Matrizen** sind. Dies ist aber **falsch**, wie folgendes Beispiel zeigt (vergleiche BSP. (5.7.7)):

$$A := \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ \hline 2 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right] \in \text{Inv}(\mathbf{R}^4) \quad \text{jedoch} \quad \tilde{A} := \left[ \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{array} \right] \notin \text{Inv}(\mathbf{R}^2).$$

Wir werden im nächsten Unterabschnitt eine Klasse von Matrizen kennenlernen, die die Invertierbarkeit auf ihre Hauptuntermatrizen vererbt.  $\square$

(VII) **Positiv definite Matrizen.**

Es gelte hier  $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ .

**Definition 5.26** Eine Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie **positiv definit**, wenn  $A$  hermitesch ist:  $A = A^*$ , und wenn gilt:

$$\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n > 0 \quad \forall \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{K}^n. \quad (7.8)$$

**BSP. (5.7.9)** (a) Für  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  ist  $A^*A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  stets positiv definit:

$$\langle A^*A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n = \langle A\vec{x}, A\vec{x} \rangle_n = \|A\vec{x}\|^2 > 0 \quad \forall \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{K}^n.$$

(b) Die folgende Matrix  $A$  ist ebenfalls positiv definit:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = A^T \quad \text{und} \quad \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n = \left\langle \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ 4x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\rangle \\ = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 > 0. \end{array} \right.$$

**Satz 5.27** Gegeben sei die **positiv definite Matrix**  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Dann gelten:

(a)  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ , und  $A^{-1}$  ist wieder positiv definit.

(b) Alle Hauptuntermatrizen von  $A$  sind positiv definit.

(c)  $a_{jj} > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$

*Begründungen:* (a) Die homogene Gleichung  $A\vec{x} = \vec{0}$  hat nur die triviale Lösung  $\vec{x} = \vec{0}$ , so dass  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  folgt. Andernfalls gäbe es nämlich ein  $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{K}^n$  mit  $A\vec{x} = \vec{0}$ , und folglich  $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n = 0$ , im Widerspruch zu (7.8). Setzen wir  $\vec{y} := A\vec{x}$ , so gilt  $\vec{y} \neq \vec{0} \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$ , und somit

$$0 < \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n = \langle \vec{y}, A^{-1}\vec{y} \rangle_n = \overline{\langle \vec{y}, A^{-1}\vec{y} \rangle_n} = \langle A^{-1}\vec{y}, \vec{y} \rangle_n.$$



Somit ist  $A^{-1}$  nach obiger Charakterisierung positiv definit.

(b) Es sei  $\tilde{A}$  eine Hauptuntermatrix von  $A = (a_{jk})$ :

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} a_{jj} & \cdots & a_{jr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{rj} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^{(p,p)}; \quad p := r - j.$$

Wegen  $A^* = A$  gilt offensichtlich  $\tilde{A}^* = \tilde{A}$ . Wir erweitern jeden Vektor  $\vec{0} \neq \vec{x} := (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p)^T \in \mathbf{K}^p$  zu einem Vektor

$$\vec{x} = (0, \dots, 0, \underbrace{\tilde{x}_1}_{j\text{-te Stelle}}, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{K}^n.$$

Es gilt  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , und wegen (7.8) folgt:

$$0 < \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n = \langle \tilde{A}\vec{x}, \vec{x} \rangle_p \quad \forall \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{K}^p.$$

(c) Wir setzen  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  und haben mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_j$  der Standardbasis des  $\mathbf{K}^n$  wegen (7.8):

$$0 < \langle A\vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle_n = \langle \vec{a}_j, \vec{e}_j \rangle_n = a_{jj} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

**Bemerkung 5.16** Man erkennt an dem Beweis der Aussage (b), dass die positive Definitheit aller Hauptuntermatrizen auch **hinreichend** ist für die positive Definitheit einer Matrix  $A = A^* \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Ein Nachprüfen dieses Kriteriums ist aber wenig praktikabel. Häufig kommt man mit dem folgenden einfacheren (aber nur hinreichenden) Kriterium aus.  $\square$

**Satz 5.28** Eine Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie **stark (zeilen-) diagonaldominant**, wenn gilt:

$$\boxed{|a_{jj}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.} \quad (7.9)$$

Eine stark diagonaldominante hermitesche Matrix  $A = A^*$  mit positiven Diagonalelementen  $a_{jj} > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$  ist positiv definit.

*Begründung:* Wegen  $A^* = A = (a_{jk})$  ist das Skalarprodukt  $Q(\vec{x}) := \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle_n$  für alle  $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$  reell, und es gilt  $|a_{jk}| = |a_{kj}|$ . Sei nun  $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{K}^n$  gegeben. Wir verwenden die Ungleichung  $2|x_k \bar{x}_j| \leq |x_k|^2 + |x_j|^2$ :

$$\begin{aligned} Q(\vec{x}) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \bar{x}_j \geq \sum_{j=1}^n a_{jj} |x_j|^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| (|x_k|^2 + |x_j|^2) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left( a_{jj} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| \right) |x_j|^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n a_{kk} |x_k|^2 - \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{kj}| |x_k|^2 \right). \end{aligned}$$

Wird in der letzten Doppelsumme die Summationsreihenfolge vertauscht, so resultiert schließlich auf Grund der starken Diagonaldominanz:

$$Q(\vec{x}) \geq \sum_{j=1}^n \left( a_{jj} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| \right) |x_j|^2 > 0 \quad \forall \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbf{K}^n,$$

also die positive Definitheit.  $\square$

**BSP. (5.7.10)**

Die folgende Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 1+i & 3i \\ 1-i & 6 & 2-3i \\ -3i & 2+3i & 7 \end{bmatrix} = A^*$$

ist stark diagonaldominant und somit positiv definit, da die Hauptdiagonalelemente positiv sind.

**(VIII) Die numerische Behandlung des GAUSSschen Algorithmus.**

Wir zeigen hier, wie man den GAUSS-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{LG}$$

in eine **numerisch verwertbare** Form bringen kann.

Dazu setzen wir stets voraus, dass das System (LG) für gegebenes  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  und jede rechte Seite  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$  **genau eine Lösung**  $\vec{x}$  besitzt. Dies ist für  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  der Fall. Wir zeigen zunächst unter geeigneten Zusatzannahmen, dass durch **elementare Umformungen** in höchstens  $n - 1$  Eliminationsschritten **ohne Zeilenvertauschungen** der Übergang von (LG) auf die Form  $R\vec{x} = \vec{c}$  mit einer Rechtsdreiecksmatrix  $R \in U_R(\mathbf{K}^n)$  bewerkstelligt werden kann.

**1. Eliminationsschritt**

(Ausräumen der 1. Spalte): **Annahme:**  $a_{11} \neq 0$ . Durch die elementaren Zeilenumformungen vom Typ (B)

$$l_{j1} := \frac{a_{j1}}{a_{11}}, \quad j = 2, 3, \dots, n; \tag{7.10}$$

$$a_{jk}^{(1)} := a_{jk} - l_{j1}a_{1k}; \quad b_j^{(1)} := b_j - l_{j1}b_1, \quad j, k = 2, 3, \dots, n, \tag{7.11}$$

geht (LG) über in die neue Form

|          |                |          |                |             |                     |
|----------|----------------|----------|----------------|-------------|---------------------|
| $x_1$    | $x_2$          | $\cdots$ | $x_n$          | $1$         | (LG) <sup>(1)</sup> |
| $a_{11}$ | $a_{12}$       | $\cdots$ | $a_{1n}$       | $b_1$       |                     |
| $0$      | $a_{22}^{(1)}$ | $\cdots$ | $a_{2n}^{(1)}$ | $b_2^{(1)}$ |                     |
| $\vdots$ | $\vdots$       | $\ddots$ | $\vdots$       | $\vdots$    |                     |
| $0$      | $a_{n2}^{(1)}$ | $\cdots$ | $a_{nn}^{(1)}$ | $b_n^{(1)}$ |                     |

Gemäß Satz 4.1 haben (LG) und (LG)<sup>(1)</sup> dieselbe Lösungsmenge. In (LG)<sup>(1)</sup> kann jedoch  $x_1$  durch die übrigen Unbekannten  $x_2, x_3, \dots, x_n$  ausgedrückt werden:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left( b_1 - \sum_{k=2}^n a_{1k} x_k \right). \tag{7.12}$$

Die Unbekannten  $x_2, x_3, \dots, x_n$  sind allein durch das reduzierte  $(n - 1) \times (n - 1)$ -System im oben gekennzeichneten Teilfeld bestimmt. In diesem System wird der Eliminationsvorgang wiederholt.

**2. Eliminationsschritt**

(Ausräumen der 2. Spalte): **Annahme:**  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ . Setze

$$l_{j2} := a_{j2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}, \quad j = 3, 4, \dots, n; \tag{7.13}$$

$$a_{jk}^{(2)} := a_{jk}^{(1)} - l_{j2}a_{2k}^{(1)}; \quad b_j^{(2)} := b_j^{(1)} - l_{j2}b_2^{(1)}, \quad j, k = 3, 4, \dots, n. \tag{7.14}$$

Ähnlich wie im 1. Schritt erhält man nach Durchführung von (7.13) und (7.14) ein zu (LG) äquivalentes System (LG)<sup>(2)</sup>, aus welchem die Unbekannte  $x_2$  gemäß

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}^{(1)}} \left( b_2^{(1)} - \sum_{k=3}^n a_{2k}^{(1)} x_k \right) \quad (7.15)$$

berechnet werden kann. In konsequenter Fortsetzung dieser Strategie resultiert im

**$m$ -ten Eliminationsschritt** (Ausräumen der  $m$ -ten Spalte): **Annahme:**  $a_{mm}^{(m-1)} \neq 0$ . Setze

$$l_{jm} := a_{jm}^{(m-1)} / a_{mm}^{(m-1)}, \quad j = m+1, m+2, \dots, n; \quad (7.16)$$

$$a_{jk}^{(m)} := a_{jk}^{(m-1)} - l_{jm} a_{mk}^{(m-1)}; \quad b_j^{(m)} := b_j^{(m-1)} - l_{jm} b_m^{(m-1)}, \quad j, k = m+1, \dots, n. \quad (7.17)$$

Nach  $n-1$  Schritten ist die gewünschte Form  $R\vec{x} = \vec{c}$  erreicht mit

$$a_{jk}^{(0)} := a_{jk}, \quad b_j^{(0)} := b_j, \quad j, k = 1, 2, \dots, n; \quad (7.18)$$

$$r_{jk} := a_{jk}^{(j-1)}, \quad k = j, j+1, \dots, n; \quad c_j := b_j^{(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.19)$$

**Definition 5.27** Das hier dargestellte Verfahren heißt der **GAUSSsche Algorithmus ohne Pivotisierung**. Die Divisoren  $a_{jj}^{(j-1)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , für die die Bedingung

$$\boxed{a_{jj}^{(j-1)} \neq 0} \quad (7.20)$$

vorausgesetzt wurde, heißen **Pivotelemente**.

Es lassen sich nun sehr einfache Beziehungen zwischen den Koeffizienten  $a_{jk}$ ,  $r_{jk}$ ,  $l_{jk}$ ,  $b_j$  und  $c_j$  aufstellen:

**Folgerung A.** Gegeben sei die Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ . Dann gelten beim GAUSSschen Algorithmus **ohne Pivotisierung** die Relationen

$$\boxed{a_{jk} = r_{jk} + \sum_{m=1}^{j-1} l_{jm} r_{mk}, \quad k \geq j \geq 1,} \quad (7.21)$$

$$\boxed{a_{jk} = \sum_{m=1}^k l_{jm} r_{mk}, \quad j > k \geq 1,} \quad (7.22)$$

$$\boxed{b_j = c_j + \sum_{m=1}^{j-1} l_{jm} c_m, \quad j = 1, 2, \dots, n.} \quad (7.23)$$

*Begründung:* Für  $j \geq 2$  und  $k \geq j$  folgt aus (7.11), (7.14) etc. und aus (7.19):

$$\begin{aligned} r_{jk} = a_{jk}^{(j-1)} &= a_{jk} - l_{j1} a_{1k}^{(0)} - l_{j2} a_{2k}^{(1)} - \dots - l_{j,j-1} a_{j-1,k}^{(j-2)} \\ &= a_{jk} - l_{j1} r_{1k} - l_{j2} r_{2k} - \dots - l_{j,j-1} r_{j-1,k}, \end{aligned}$$

oder in anderer Schreibweise:

$$a_{jk} = r_{jk} + \sum_{m=1}^{j-1} l_{jm} r_{mk}, \quad k \geq j \geq 2,$$

und diese Relation liefert auch für  $j = 1$  das richtige Resultat. Also gilt (7.21). Für  $k \geq 2$  und  $j > k$  erhalten wir ganz analog aus (7.10), (7.13) etc.:

$$\begin{aligned} l_{jk} &= \frac{a_{jk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left( a_{jk} - l_{j1}a_{1k}^{(0)} - l_{j2}a_{2k}^{(1)} - \cdots - l_{j,k-1}a_{k-1,k}^{(k-2)} \right) \\ &= \frac{1}{r_{kk}} \left( a_{jk} - l_{j1}r_{1k} - l_{j2}r_{2k} - \cdots - l_{j,k-1}r_{k-1,k} \right). \end{aligned}$$

Durch Auflösen dieser Beziehung nach  $a_{jk}$  resultiert (7.22) zunächst für  $j > k \geq 2$ . Wegen (7.10) ist (7.22) aber auch für  $k = 1$  richtig. Schließlich zeigen wir noch (7.23) unter Verwendung von (7.11), (7.14) etc. und von (7.19):

$$\begin{aligned} c_j &= b_j^{(j-1)} = b_j - l_{j1}b_1 - l_{j2}b_2^{(1)} - \cdots - l_{j,j-1}b_{j-1}^{(j-1)} \\ &= b_j - l_{j1}c_1 - l_{j2}c_2 - \cdots - l_{j,j-1}c_{j-1} \end{aligned}$$

für alle  $j \geq 2$ . Auflösen nach  $b_j$  liefert zunächst (7.23) für  $j \geq 2$ . Wegen (7.19) gilt dieses Resultat auch noch für  $j = 1$ .  $\square$

**Folgerung B.** Wird die Matrix  $L \in U_L(\mathbf{K}^n)$  gemäß

$$L := (l_{jk}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & l_{n-1,3} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{n-1,n} & 1 \end{bmatrix}$$

erklärt, so läßt sich (7.23) offenbar in der Matrixform

$$\boxed{L\vec{c} = \vec{b}} \tag{7.24}$$

schreiben. Das heißt, die neue rechte Seite  $\vec{c}$  kann in der Reihenfolge  $c_1, c_2, \dots, c_n$  durch den **Prozess des Vorwärtseinsetzens** aus den Gleichungen

$$\boxed{c_j = b_j - \sum_{m=1}^{j-1} l_{jm}c_m, \quad j = 1, 2, \dots, n} \tag{7.25}$$

gewonnen werden.

**Bemerkung 5.17** (a) Vergleicht man das Matrixprodukt (MP) mit (7.21) und (7.22), so erkennt man die Äquivalenz von (7.21) und (7.22) mit der Matrixgleichung

$$\boxed{A = LR, \quad L \in U_L(\mathbf{K}^n), \quad R \in U_R(\mathbf{K}^n).} \tag{7.26}$$

Die Relation (7.26) ist die **LR-Zerlegung der Matrix A**, die wir hier konstruktiv unter der Bedingung (7.20) ermittelt haben. Damit kann die Lösung  $\vec{x}$  von  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit Hilfe des GAUSSschen Algorithmus grundsätzlich in den drei folgenden Teilschritten berechnet werden.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1. \text{ Schritt: } A = LR \quad (\mathbf{LR-Zerlegung von } A) \\ 2. \text{ Schritt: } L\vec{c} = \vec{b} \quad (\mathbf{Vorwärtseinsetzen zur Berechn. von } \vec{c}) \\ 3. \text{ Schritt: } R\vec{x} = \vec{c} \quad (\mathbf{Rückwärtseinsetzen zur Berechn. von } \vec{x}) \end{array}} \tag{7.27}$$

(b) Nach dem  $m$ -ten Eliminationsschritt ( $m = 1, 2, \dots, n-1$ ) hat die  $m$ -te Spalte in  $(LG)^{(m)}$  unterhalb der Diagonalen Nulleinträge. Es empfiehlt sich, nicht diese Nullen einzutragen, sondern aus Gründen der Platzersparnis die Elemente der Matrix  $L$ . Man verfähre also nach folgender Strategie:

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$    | $x_2$    | $\cdots$ | $x_n$    | $1$      |
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $b_1$    |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $b_2$    |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $\cdots$ | $a_{3n}$ | $b_3$    |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | $\cdots$ | $a_{nn}$ | $b_n$    |

$\rightsquigarrow$  Gauss-Schritte  $\rightarrow$

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $x_1$    | $x_2$    | $\cdots$ | $x_n$    | $1$      |
| $r_{11}$ | $r_{12}$ | $\cdots$ | $r_{1n}$ | $c_1$    |
| $l_{21}$ | $r_{22}$ | $\cdots$ | $r_{2n}$ | $c_2$    |
| $l_{31}$ | $l_{32}$ | $\cdots$ | $r_{3n}$ | $c_3$    |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $l_{n1}$ | $l_{n2}$ | $\cdots$ | $r_{nn}$ | $c_n$    |

**Kritik:** Das Verfahren (7.27) lebt ganz wesentlich von der Bedingung (7.20). Wie wir in (V) gezeigt haben, wird jedoch selbst für  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  nicht immer  $a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$  für alle  $j = 1, 2, \dots, n$  zu erwarten sein. In diesem Fall bricht der soeben beschriebene Eliminationsalgorithmus zusammen. Wir zeigen jedoch:  $\square$

**Folgerung C.** Gegeben sei die Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ . Dann gibt es vor dem  $m$ -ten Eliminationsschritt des GAUSSschen Algorithmus eine elementare Permutation  $P_m$  derart, dass das Diagonalelement  $a_{mm}^{(m-1)}$  der Matrix  $P_m A^{(m-1)}$  der folgenden Bedingung genügt:

$$\boxed{a_{mm}^{(m-1)} \neq 0} \tag{7.20}$$

*Begründung:* Angenommen, es wäre  $a_{11} = 0$ . Wegen  $\text{Rang } A = n$  gibt es mindestens einen Zeilenindex  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  mit  $a_{j1} \neq 0$ . Es sei  $P_{1j}$  die elementare Permutation, die die Zeilenvertauschung  $Z_1 \Leftrightarrow Z_j$  bewirkt. In der Matrix  $P_{1j}A$  gilt dann für das Diagonalelement  $a_{11}^{(0)}$  die Bedingung (7.20). Den Rest zeigt man durch vollständige Induktion.  $\square$

**Bemerkung 5.18** (a)  $P_m$  ist nicht eindeutig festgelegt, da man in der Regel mehrere Möglichkeiten hat, in der  $m$ -ten Spalte Elemente  $a_{jm}^{(m-1)} \neq 0$  zu finden.

(b) Wir nehmen an, dass in der Folge der GAUSS-Eliminationsschritte nach dem oben beschriebenen Verfahren die elementaren Permutationen  $P_1, P_2, \dots, P_p$ ,  $p \leq n-1$ , durchgeführt wurden. Man kann sich vorstellen, dass alle Permutationen schon vor Beginn des Eliminationsprozesses bekannt sind und auf  $A$  angewendet werden. Das heißt, man geht anstelle von  $A$  von der Matrix  $PA$  mit  $P := P_p P_{p-1} \cdots P_1$  aus. In dieser Matrix läßt sich dann der GAUSS-Algorithmus wie oben angegeben durchführen.  $\square$

**Definition 5.28** Der gemäß den Formeln (7.10)–(7.17) durchgeführte GAUSS-Algorithmus unter Beachtung der Zeilenpermutationen  $P_1, P_2, \dots, P_p$  heißt **GAUSS-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung**.

Fassen wir diese Betrachtungen zusammen, so gelangen wir auf **konstruktivem Wege** zur Aussage von Satz 5.26.(c) über die Existenz einer LR-Zerlegung (7.3) der Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Vom theoretischen Standpunkt aus ist nun alles über den GAUSS-Algorithmus gesagt. Wir haben oben darauf hingewiesen, dass wir in der **Pivotwahl** noch eine gewisse Freiheit haben, so dass die konkrete Wahl noch offen bleibt. Für die Numerik ist aber die zweckmäßige Wahl der Pivots von ganz entscheidender Bedeutung.

**Definition 5.29** (a) Werden im GAUSS-Algorithmus die Pivotelemente sukzessive in der Diagonalen gewählt, so spricht man von einer **Diagonalstrategie**. (Vorteil: Keine Zeilenvertauschungen erforderlich. Nachteil: Nicht jede Matrix gestattet die Anwendung der Diagonalstrategie. Ausserdem besteht die Gefahr falscher Resultate durch Rundungsfehler.)

(b) **Spaltenmaximumstrategie:** Es wird vor dem  $m$ -ten Eliminationsschritt das betragsgrößte Element in der  $m$ -ten Spalte gesucht:

$$\boxed{\text{Finde } p \text{ so, dass } \max_{j \geq m} |a_{jm}^{(m-1)}| = |a_{pm}^{(m-1)}|.} \quad (7.28)$$

(Vorteil: Gefahr der Verfälschung durch Rundungsfehler wird gemindert, jedoch nicht gänzlich beseitigt. Nachteil: Zeilenvertauschungen lassen sich nicht vermeiden.)

(c) **Vollständige Maximumstrategie:** Es wird vor dem  $m$ -ten Eliminationsschritt das betragsgrößte Element insgesamt gesucht:

$$\boxed{\text{Finde } p, q \text{ so, dass } \max_{j \geq m, k \geq m} |a_{jk}^{(m-1)}| = |a_{pq}^{(m-1)}|.} \quad (7.29)$$

(Vorteil: Verfälschung durch Rundungsfehler wird auf ein Minimum reduziert. Nachteil: Erheblicher Buchhaltungsaufwand, da sowohl Zeilen als auch Spalten vertauscht werden müssen. Bei großen Systemen wird deshalb diese Strategie kaum verwendet.)

Die Diagonalstrategie läßt sich bei Systemen mit stark (zeilen-) diagonaldominanter Matrix sinnvoll anwenden. Es gilt nämlich:

**Folgerung D.** Gegeben sei die stark (zeilen-) diagonaldominante Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Dann führt der GAUSS-Algorithmus mit der **Diagonalstrategie** zur Lösung von  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

*Begründung:* Gemäß (7.9) ist  $a_{11} \neq 0$ , also zulässiges Pivotelement. Damit ist der 1. Eliminationsschritt zulässig. Zu zeigen hat man, dass sich die Diagonaldominanz auf die reduzierte Matrix  $(a_{jk}^{(1)})$  vererbt. Aus (7.10) und (7.11) folgt:

$$|a_{jk}| - \left| \frac{a_{j1}a_{1k}}{a_{11}} \right| \leq \left| a_{jk} - \frac{a_{j1}a_{1k}}{a_{11}} \right| = |a_{jk}^{(1)}| \leq |a_{jk}| + \left| \frac{a_{j1}a_{1k}}{a_{11}} \right|,$$

und hiermit resultiert:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}^{(1)}| &\leq \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^n \left\{ |a_{jk}| + \left| \frac{a_{j1}}{a_{11}} \right| |a_{1k}| \right\} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| - |a_{j1}| + \left| \frac{a_{j1}}{a_{11}} \right| \left\{ \sum_{k=2}^n |a_{1k}| - |a_{1j}| \right\} \\ &\stackrel{(7.9)}{<} |a_{jj}| - |a_{j1}| + \left| \frac{a_{j1}}{a_{11}} \right| \left\{ |a_{11}| - |a_{1j}| \right\} = |a_{jj}| - \left| \frac{a_{j1}a_{1j}}{a_{11}} \right| \leq |a_{jj}^{(1)}|. \end{aligned}$$

Wegen  $|a_{22}^{(1)}| > \sum_{k=3}^n |a_{2k}^{(1)}| \geq 0$  ist also  $a_{22}^{(1)}$  zulässiges Pivotelement.  $\square$

**Bemerkung 5.19** Wir haben hier **nicht**  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  vorausgesetzt. Dies ergibt sich von selbst aus der Diagonaldominanz. Die Diagonalstrategie sollte **immer** bei diagonaldominanter Matrix angewendet werden.  $\square$

Die Schwäche der **Spaltenmaximumstrategie** besteht darin, dass bei starken Unterschieden in der Größenordnung der Koeffizienten verschiedener Zeilen erhebliche Rundungsfehler durch Stellenauslöschung auftreten können. Die Matrix  $A$  ist dann nicht **equilibriert**. Eine Equilibrierung wird erreicht durch

**Definition 5.30 (Skalieren des Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$ )**

Für  $j = 1, 2, \dots, n$  wird die  $j$ -te Zeile mit dem Faktor  $\alpha := \left( \sum_{k=1}^n |a_{jk}| \right)^{-1}$  multipliziert. Für

das so entstehende neue System  $\tilde{A}\vec{x} = \vec{b}$  gilt dann

$$\sum_{k=1}^n |\tilde{a}_{jk}| = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad |\tilde{a}_{jk}| \leq 1.$$

Leider geht die Skalierung des Systems  $A\vec{x} = \vec{b}$  nach jedem Eliminationsschritt des GAUSS-Algorithmus wieder verloren. Eine Neuskalierung nach jedem Eliminationsschritt verdoppelt aber den Gesamtaufwand. Zur Vermeidung eines zu hohen Aufwands bei Sicherstellung eines numerisch stabilen Verfahrens wählt man den folgenden

**Ausweg:** Man wendet die vollständige Skalierung nur **implizit** an, führt sie aber **explizit** nicht aus. Dies geschieht durch die

**Definition 5.31 (Relative Spaltenmaximumstrategie)**

Es wird **vor** dem  $m$ -ten Eliminationsschritt das **relativ** betragsgrößte Element in der  $m$ -ten Spalte gesucht:

$$\left. \begin{array}{l} s_j := \sum_{l=m}^n |a_{jl}^{(m-1)}|; \quad q_j := |a_{jm}^{(m-1)}|/s_j. \\ \text{Finde } p \text{ so, daß } \max_{j \geq m} q_j = q_p. \end{array} \right\} \quad (7.30)$$

**I. LR-Zerlegung nach GAUSS mit relativer Spaltenmaximumstrategie.**

```

1: det := 1;
2: für k := 1, 2, ..., n - 1 :
3:   max := 0; p_k := 0;
4:   für j := k, k + 1, ..., n :
5:     s := 0;
6:     für l := k, k + 1, ..., n :
7:       s := s + |a_{jl}|; (Ende l)
8:     q := |a_{jk}|/s;
9:     falls q > max :
10:      max := q; p_k := j; (Ende j)
11:   falls max = 0 : STOP;
12:   falls p_k ≠ k :
13:     det := - det;
14:     für l := 1, 2, ..., n :
15:       h := a_{kl}; a_{kl} := a_{p_k, l}; a_{p_k, l} := h; (Ende l)
16:   det := det * a_{kk};
17:   für j := k + 1, k + 2, ..., n :
18:     a_{jk} := a_{jk}/a_{kk};
19:     für l := k + 1, k + 2, ..., n :
20:       a_{jl} := a_{jl} - a_{jk} * a_{kl}; (Ende l, j, k)
21: det := det * a_{nn}.

```

**Erläuterungen.** Die Variable *det* enthält nach Abschluss aller Rechnungen die **Determinante** von  $A$ , siehe nächsten Abschnitt 5.8. Die Zeilen 2–10 enthalten den Algorithmus der relativen Spaltenmaximumstrategie gemäß den Formeln (7.30). Der Vektor  $\vec{p} := (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$  enthält die Information über zu bewerkstellende Zeilenvertauschungen;  $p_k$  ist gleich dem Index derjenigen Zeile, welche vor

dem  $k$ -ten Eliminationsschritt mit der  $k$ -ten Zeile vertauscht wird. Für  $p_k = k$  erfolgt keine Vertauschung. Die erforderliche Vertauschung wird in den Zeilen 12–15 durchgeführt. Die Zeilen 17–20 enthalten die Berechnung der Elemente  $l_{jm}$  und  $a_{jk}^{(m)}$  gemäß den Formeln (7.16) und (7.17). Dabei werden die Elemente  $l_{jk}$  in der Matrix  $A$  unterhalb der Diagonalen an die Stelle der  $a_{jk}$  gesetzt. Nach Beendigung der Zerlegung gilt also

$$a_{jk} = l_{jk} \quad \forall j > k \quad \text{und} \quad a_{jk} = r_{jk} \quad \forall j \leq k.$$

Mit der relativen Spaltenmaximumstrategie haben wir jetzt den GAUSS-Algorithmus in eine brauchbare Form gebracht, die weitestgehend unempfindlich gegenüber Rundungsfehlerfortpflanzung ist. Gemäß der Zerlegung (7.7) des gesamten Rechenschemas in drei Teilschritte können wir ein Computer-Programm aufbauen, welches die drei Rechenschritte:

- LR-Zerlegung,
- Vorwärtseinsetzen,
- Rückwärtseinsetzen

in dieser Reihenfolge enthält.

### II. Vorwärtseinsetzen zur Berechnung von $\vec{c}$ .

|    |  |        |
|----|--|--------|
| 1: | für $k := 1, 2, \dots, n-1$ :                                | (7.32) |
| 2: | falls $p_k \neq k$ :   |        |
| 3: | $h := b_k$ ; $b_k := b_{p_k}$ ; $b_{p_k} := h$ ; (Ende $k$ ) |        |
| 4: | für $j := 1, 2, \dots, n$ :                                  |        |
| 5: | $c_j := b_j$ ;   |        |
| 6: | für $l := 1, 2, \dots, j-1$ :                                |        |
| 7: | $c_j := c_j - a_{jl} * c_l$ . (Ende $l, j$ )                 |        |

**Erläuterungen.** Vor dem Vorwärtseinsetzen sind die in der Matrix  $A$  durchgeführten Zeilenvertauschungen auch im Vektor  $\vec{b}$  nachzuvollziehen. Dies wird in den Zeilen 1–3 bewerkstelligt. In den Zeilen 4–7 wird der Vektor  $\vec{c}$  gemäß (7.5) berechnet.

### III. Rückwärtseinsetzen zur Berechnung von $\vec{x}$ .

|    |                                       |        |
|----|---------------------------------------|--------|
| 1: | für $j := n, n-1, \dots, 1$ :         | (7.33) |
| 2: | $s := c_j$ ;                          |        |
| 3: | für $k := j+1, j+2, \dots, n$ :       |        |
| 4: | $s := s - a_{jk} * x_k$ ; (Ende $k$ ) |        |
| 5: | $x_j := s/a_{jj}$ . (Ende $j$ )       |        |

**Erläuterung.** In den Zeilen 1–5 wird der Lösungsvektor  $\vec{x}$  nach den Formeln (7.6) berechnet.

**Speicherplatzminimierung:** Da der Vektor  $\vec{b}$  nach der Berechnung von  $\vec{c}$  nicht mehr benötigt wird, kann in (7.32) die Zahl  $c_j$  sofort nach ihrer Berechnung auf den Speicherplatz  $b_j$  gesetzt werden. Ebenso kann in (7.33) die Zahl  $x_j$  sofort nach ihrer Berechnung auf den Speicherplatz  $c_j$  gesetzt werden. Nach Durchführung dieser beiden Schritte steht an der Stelle des Vektors  $\vec{b}$  der Lösungsvektor  $\vec{x}$ .



## 5.8 Determinanten und Anwendungen

In diesem Abschnitt ist  $\mathbf{K}$  ein beliebiger Körper. Es bezeichnet 1 das neutrale Element der Multiplikation.

**Definition 5.32** Mit  $\det : \mathbf{K}^{(n,n)} \rightarrow \mathbf{K}$  sei diejenige Abbildung bezeichnet, die jeder **quadratischen Matrix**  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ein Element  $\det A \in \mathbf{K}$  (sprich: **Determinante von A**) gemäß folgender Vorschrift zuordnet. Es werde **induktiv** definiert:

$$\begin{aligned}
 n = 1 : & \quad \det A = \det(a) := a, \\
 n = 2 : & \quad \det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cc} a & \boxed{b} = A_{21} \end{array} \right) \\ \times \\ \left( \begin{array}{cc} c & \boxed{d} = A_{11} \end{array} \right) \end{array} \right], \\
 n \geq 3 : & \quad \boxed{\det A := \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}}, \tag{8.1}
 \end{aligned}$$

worin  $A_{j1}$  diejenige **Streichungsmatrix** von  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ist, die durch Streichung der  $j$ -ten Zeile und der 1. Spalte entstanden ist.

Zum Beispiel gelten für  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ :

$$\det(2 - 5i) = 2 - 5i, \quad \det \begin{bmatrix} 4i & 5 - 2i \\ 2 + 5i & -6 \end{bmatrix} = -24i - (5 - 2i)(2 + 5i) = -20 - 45i.$$

**Merke:** Determinanten für allgemeine **nichtquadratische** Matrizen  $A \in \mathbf{K}^{(m,n)}$ ,  $n \neq m$ , sind **nicht** erklärt!

Im konkreten Fall einer gegebenen Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  schreibt man auch:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

zum Beispiel:  $A := \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -2i & 0 & 5 \\ 6 & 14i & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{(3,3)} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -2i & 0 & 5 \\ 6 & 14i & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}.$

**Bemerkung 5.20** (a) In jeder Streichungsmatrix  $A_{j1}$  von  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  fehlt das Element  $a_{j2}$  aus der Matrix  $A$ :

$$A_{j1} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ -a_{j2} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{j3} & \cdots & -a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{=: B_j} \quad \text{--- } j\text{-te Zeile gestrichen!}$$

Für einen festen Index  $j$  führen wir die Matrix  $B_j \in \mathbf{K}^{(n-1, n-2)}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , wie oben skizziert ein. Es bezeichne  $B_{jk} \in \mathbf{K}^{(n-2, n-2)}$  die aus  $B_j$  entstehende Streichungsmatrix, wenn

in  $A$  neben der  $j$ -ten Zeile auch noch die  $k$ -te Zeile gestrichen wird. Mit anderen Worten,  $B_{jk}$  ist aus  $A$  durch Streichung der  $j$ -ten und der  $k$ -ten Zeile sowie der 1. und der 2. Spalte entstanden. Es gilt ganz offensichtlich  $B_{jk} = B_{kj}$ ,  $j \neq k$  sowie  $B_{jj} = B_j$ . Setzen wir hier vereinbarungsgemäß  $\det B_{jj} := 0$ , und wenden wir die Definitionsvorschrift (8.1) auf  $\det A_{j1}$  an, so erhalten wir:

$$\boxed{\det A_{j1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k2} \operatorname{sign}(j-k) \det B_{jk} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n; \quad \det B_{jj} := 0.} \quad (8.2)$$

Der **Vorzeichenwechsel** bei  $j = k$  kommt deshalb zustande, weil die Matrizen  $B_{j,j-1}$  und  $B_{j,j+1}$  in  $A_{j1}$  **aufeinanderfolgende** Streichungsmatrizen sind, während der Faktor  $(-1)^{k+1}$  in (8.2) einen **doppelten** Vorzeichenwechsel zählt.

(b) Für die praktische Berechnung von  $\det A$  nach der Vorschrift (8.1) müssen alle Determinanten  $\det A_{j1}$  auf  $2 \times 2$ -Determinanten zurückgeführt werden, die dann einfach berechnet werden können.

(c) Für  $n = 3$  berechnen wir nach der Vorschrift (8.1): □

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1). \end{aligned}$$

**Merke:** In  $\mathbf{K}^{(3,3)}$  gilt die **Merkregel von SARRUS**:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & | & a_1 & b_1 \\ & \searrow & \otimes & \otimes & \nearrow & \\ a_2 & b_2 & c_2 & | & a_2 & b_2 \\ & \nearrow & \otimes & \otimes & \searrow & \\ a_3 & b_3 & c_3 & | & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \sum \searrow - \sum \nearrow.$$

**BSP. (5.8.1)** Wir verwenden die Regel von SARRUS zur Berechnung der folgenden Determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -2i & 0 & 5 \\ 6 & 14i & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & | & 2 & -4 \\ & \searrow & \otimes & \otimes & \nearrow & \\ -2i & 0 & 5 & | & -2i & 0 \\ & \nearrow & \otimes & \otimes & \searrow & \\ 6 & 14i & -\frac{1}{4} & | & 6 & 14i \end{vmatrix} \\ &= 0 - 120 + 84 - 0 - 140i + 2i = -(36 + 138i). \end{aligned}$$

Berechnet man hingegen  $\det A$  nach der Vorschrift (8.1), so hat man:

$$\det A = 2 A_{11} + 2i A_{21} + 6 A_{31} = 2 \cdot (-70i) + 2i \cdot (1 - 42i) + 6 \cdot (-20) = -(36 + 138i).$$

Für  $n > 3$  gibt es keine der Regel von SARRUS entsprechende Berechnungsvorschrift. Nötigenfalls muss in (8.1) die Berechnung der Determinanten  $\det A_{j1}$  auf die Berechnung von  $3 \times 3$ -Determinanten zurückgeführt werden, die dann unter Verwendung der Regel von SARRUS ausgewertet werden können. Diese Vorgehensweise ist sehr aufwendig; wir überlegen uns

einige Schritte zu ihrer Vereinfachung. Zu diesem Zweck geben wir die folgende

**Interpretation von  $\det : \mathbf{K}^{(n,n)} \rightarrow \mathbf{K}$ :** Die Determinante  $\det$  ist eine Funktion der Spaltenvektoren der Matrix  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$ :

$$\det : \underbrace{\mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n \times \dots \times \mathbf{K}^n}_{n\text{-mal}} \rightarrow \mathbf{K} \text{ mit } \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}, \quad \vec{a}_j \in \mathbf{K}^n.$$

**Satz 5.29** Durch Vertauschung von zwei benachbarten Spalten ändert sich das Vorzeichen von  $\det A$ , nicht aber  $|\det A|$ :

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n) = -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j+1}, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n).$$

*Begründung:* Für  $n = 2$  kann die Behauptung direkt durch Ausrechnen bestätigt werden. Für  $n \geq 3$  unterscheiden wir zwei Fälle gemäß den Vertauschungen  $S_1 \Leftrightarrow S_2$  und  $S_j \Leftrightarrow S_{j+1}$ ,  $j \neq 1$ .

(a) Durch die Vertauschung  $S_1 \Leftrightarrow S_2$  werde die Matrix  $A$  in die Matrix  $\tilde{A}$  abgebildet. Vor der Vertauschung haben wir gemäß (8.1):

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1} \stackrel{(8.2)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{j1} a_{k2} \text{sign}(j-k) \det B_{jk}.$$

Nach der Vertauschung gilt hingegen:

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{j2} \det \tilde{A}_{j1} \stackrel{(8.2)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{j2} a_{k1} \text{sign}(j-k) \det B_{jk} \\ &\stackrel{j \Leftrightarrow k}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{j1} a_{k2} \underbrace{\text{sign}(k-j)}_{=-\text{sign}(j-k)} \det \underbrace{B_{kj}}_{=B_{jk}} = -\det A. \end{aligned}$$

(b) Durch die Vertauschung  $S_j \Leftrightarrow S_{j+1}$  werde die Matrix  $A$  in die Matrix  $\tilde{A}$  abgebildet. Zum Beweis von  $\det A = -\det \tilde{A}$  führen wir **vollständige Induktion** nach der Raumdimension  $n$  durch.

- *Verankerung:* Für  $n = 3$  ist nur noch der Fall  $S_2 \Leftrightarrow S_3$  zu kontrollieren. Diesen bestätigt man aber leicht durch Nachrechnen mittels der Regel von SARRUS.
- *Vererbung:* Gelte nun die Behauptung bereits für  $n - 1 \geq 3$ , und sei  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ :

$$\det \tilde{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{j1} \det \left( \underbrace{\tilde{A}_{j1}}_{\in \mathbf{K}^{(n-1,n-1)}} \right) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{j1} (-\det A_{j1}) = -\det A.$$

Mit diesem Ergebnis erhält man sofort einige weitere Berechnungsmöglichkeiten für die Determinante  $\det A$ .

**Satz 5.30 (Entwicklungssatz von LAPLACE)**

Für die Determinante einer Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  gilt die folgende Entwicklung nach der  $k$ -ten Spalte:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} \det A_{jk} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \tag{8.3}$$

*Begründung:* Bringt man in der Matrix  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  den Spaltenvektor  $\vec{a}_k$  vor den Spaltenvektor  $\vec{a}_1$ :

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n) \rightarrow (\vec{a}_k, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n) =: \tilde{A},$$

so sind dazu genau  $k - 1$  benachbarte Spaltenvertauschungen erforderlich. Also gilt gemäß Satz 5.29:

$$\det A = (-1)^{k-1} \det \tilde{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1+k-1} a_{jk} \det \underbrace{\tilde{A}_{j1}}_{=A_{jk}}.$$

**BSP. (5.8.2)** In der folgenden Determinante wird nach der 3. Spalte entwickelt. Da diese nur ein einziges von Null verschiedenes Element enthält, besteht die Summe (8.3) aus nur einem Summanden:

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} k = 3 \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ \dots 3 \dots & \dots 4 \dots & \dots 2 \dots & \dots 2 \dots \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array} \quad j = 3 \\ & = 2(-1)^{3+3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ & \searrow & \times & \times & \nearrow \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ & \nearrow & \times & \times & \searrow \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \\ = 2(3 + 12 + 8 - 48 - 3 - 2) = -60. \end{array} \end{aligned}$$

**Merke:** Das Vorzeichen  $(-1)^{j+k}$  vor dem Element  $a_{jk}$  im Entwicklungssatz (8.3) entnimmt man dem folgenden **Vorzeichenparkett**:

$$\det \left( (-1)^{j+k} \right) = \begin{array}{c} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}.$$

Mit dem LAPLACE-Entwicklungssatz kann jetzt die Determinante der *adjungierten* Matrix leicht berechnet werden:

**Satz 5.31** Für jede Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  gelten:

$$\det A^* = \det \bar{A} = \overline{\det A}, \quad \det A^T = \det A, \tag{8.4}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} \det A_{jk} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \tag{8.5}$$

(Entwicklung nach der  $j$ -ten Zeile.)

*Begründungen:* Da die Aussage  $\det \bar{A} = \overline{\det A}$  sofort aus den Regeln der Konjugation komplexer Zahlen folgt, brauchen wir wegen  $A^* = \bar{A}^T$  nur die Gleichung  $\det A^T = \det A$  zu zeigen. Es gilt  $A^T = (a_{kj})$ , das heißt, das Element  $a_{jk}$  in der  $j$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte wandert durch Transposition in die  $k$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte. Dies hat für die Streichungsmatrizen die Relation  $(A^T)_{jk} = (A_{kj})^T$  zur Folge. Zum Beweis von (8.4) führen wir nun **vollständige Induktion** nach der Raumdimension  $n$  durch.

- *Verankerung:* Für  $n = 2$  zeigt man  $\det A^T = \det A$  direkt durch Ausrechnen. Gelte dies nun bereits für  $n - 1 \geq 2$ .

- Vererbung:

$$\begin{aligned}
 n \cdot \det A^T &\stackrel{(8.3)}{=} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \underbrace{\det(A^T)_{jk}}_{=\det(A_{kj})^T = \det A_{kj}} \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj} \right) \stackrel{(8.3)}{=} n \cdot \det A.
 \end{aligned}$$

Nach Division durch  $n$  hat man die Behauptung (8.4). Zum Beweis von (8.5) verwenden wir (8.4):

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A^T)_{jk} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \underbrace{\det(A_{jk})^T}_{=\det A_{kj}}.$$

Vertauscht man hier die Indizes  $j$  und  $k$ , so hat man (8.5). □

**BSP. (5.8.3)**

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} i & 3 & -1 & -i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots 1 \dots & \dots 0 \dots & \dots 0 \dots & \dots 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2i & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots i \dots & \dots 1 \dots & \dots 1 \dots & \dots 2 \dots \end{bmatrix}, & \det A &= (-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 & -i \\ 2i & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 2i, \\
 A^T &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 0 & 2i & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots -i \dots & \dots 1 \dots & \dots 1 \dots & \dots 2 \dots \end{bmatrix}, & \det A^T &= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 2i & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ -i & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 2i, \\
 A^* &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 0 & -2i & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots -i \dots & \dots 1 \dots & \dots 1 \dots & \dots 2 \dots \end{bmatrix}, & \det A^* &= (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2i & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ i & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 - 2i.
 \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt die Wirkung von beliebigen Spalten- und Zeilenvertauschungen in  $\det A$ .

**Satz 5.32** Gegeben sei die Matrix  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Dann gilt:

(D1)  $\det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_k, \dots) = -\det(\dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_j, \dots)$ .

Das heißt, jede Spaltenvertauschung verursacht einen **Vorzeichenwechsel**.

(D2)  $\det(\dots, \lambda \vec{a}_j, \dots) = \lambda \det(\dots, \vec{a}_j, \dots) \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}$ .

(D3)  $\det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_k, \dots) = \det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_k + \lambda \vec{a}_j, \dots) \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, k \neq j$ .

Das heißt, der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte das Vielfache einer anderen (davon verschiedenen) Spalte addiert.

Die Aussagen (D1), (D2), (D3) bleiben auch für entsprechende **Zeilenoperationen** in  $A$  richtig.

*Begründungen:* (a) Wir nehmen die folgenden **benachbarten** Spaltenvertauschungen vor:

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_k, \dots) \Rightarrow (\vec{a}_k, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_{k-1}, \dots) \Rightarrow (\vec{a}_k, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \dots, \vec{a}_j, \dots) =: \tilde{A}.$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{---} & & \text{---} \\ \text{---} & & \text{---} \\ \uparrow & & \uparrow \\ k-1 & & j-1 \\ \text{Vertausch.} & & \text{Vertausch.} \end{array}$

Insgesamt haben wir  $(k-1) + (k-j-1) + (j-1) = 2k-3$  benachbarte Spaltenvertauschungen durchgeführt. Aus Satz 5.29 resultiert deshalb  $\det A = (-1)^{2k-3} \det \tilde{A} = -\det \tilde{A}$ , und somit (D1).

(b) Die Behauptung (D2) folgt sofort aus (8.3). Ebenso ist (D3) eine Folge von (8.3), nämlich:

$$\begin{aligned} \det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_k + \lambda \vec{a}_j, \dots) &= \sum_{l=1}^n (-1)^{l+k} (a_{lk} + \lambda a_{lj}) \det A_{lk} \\ &= \det A + \lambda \det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \underbrace{\vec{a}_j}_{k\text{-te Stelle}}, \dots) =: \det A + \lambda \det \tilde{A}. \end{aligned}$$

Der letzte Summand  $\det \tilde{A}$  verschwindet wegen (D1). Denn durch Vertauschen der  $j$ -ten und der  $k$ -ten Spalte hat sich die Matrix  $\tilde{A}$  nicht verändert, wohl aber das Vorzeichen ihrer Determinante. Deshalb muss  $\det \tilde{A} = 0$  gelten.

(c) **Zeilenoperationen** vom Typ (D1)–(D3) in der Matrix  $A$  bewirken dasselbe wie **Spaltenoperationen** vom selben Typ (D1)–(D3) in der transponierten Matrix  $A^T$ . Wegen  $\det A = \det A^T$  ist somit alles gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 5.21** Im Gegensatz zu (D3) gilt

$$\det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \lambda \vec{a}_k + \vec{a}_j, \dots) = \lambda \det(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_k, \dots) \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, k \neq j.$$

Weitere Rechenregeln für Determinanten listen wir in dem folgenden Satz auf.

**Satz 5.33** *Es sei stets  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  vorausgesetzt.*

(D4)  $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) = 0.$

*Das heißt, sind zwei Spalten (oder Zeilen) in  $A$  gleich, so gilt stets  $\det A = 0$ .*

(D5)  $\det(\dots, \vec{0}, \dots) = 0.$

(D6)  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}.$

(D7)  $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j + \vec{b}, \dots, \vec{a}_n) = \det A + \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}, \dots, \vec{a}_n) \quad \forall \vec{b} \in \mathbf{K}^n.$

*Aber,  $\det(A+B) \neq \det A + \det B$  für allgemeine Matrizen  $B \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ .*

(D8)  $\det \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ * & \lambda_2 & & \\ * & * & \ddots & \\ * & * & * & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \det Id_n = 1.$

(D9)  $\det \left[ \begin{array}{c|ccc} \lambda & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right] = \det \left[ \begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \hline * & & & \\ * & & B & \\ * & & & \end{array} \right] = \lambda \cdot \det B.$

$$(D10) \quad \det \left[ \begin{array}{c|c} B & O \\ \hline * & * \\ * & * \\ * & * \end{array} \right] = \det \left[ \begin{array}{c|c} B & * \ * \\ \hline O & C \end{array} \right] = \det B \cdot \det C.$$

*Begründungen:* Die Aussage (D4) wurde schon im Beweis von Satz 5.32 gezeigt. Die Eigenschaft (D5) folgt aus (D2) mit  $\lambda = 0$ . Die Eigenschaft (D6) folgt durch  $n$ -fache Anwendung von (D2). Die Aussage (D7) folgt aus dem LAPLACE-Entwicklungssatz (8.3). Wir zeigen (D8):

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n \end{array} \right| & \stackrel{(8.1)}{=} \lambda_1 \left| \begin{array}{cccc} \lambda_2 & * & * & * \\ 0 & \lambda_3 & * & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n \end{array} \right| & \stackrel{(8.1)}{=} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \left| \begin{array}{cccc} \lambda_3 & * & * & * \\ 0 & \lambda_4 & * & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n \end{array} \right| \\ & = \dots = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \end{aligned}$$

Verwendet man den LAPLACE-Entwicklungssatz (8.5) für die 1.**Zeile**, so resultiert ein analoges Ergebnis für Linksdreiecksmatrizen. Schließlich ergeben sich (D9) und (D10) aus (D8) und den Entwicklungssätzen von LAPLACE.  $\square$

**Zusammenfassung:** Die Berechnung **großer** Determinanten wird vereinfacht, indem man die Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  mit Hilfe der **Spaltenumformungen** (D1)<sub>S</sub> (unter Merken des Vorzeichenwechsels) und (D3)<sub>S</sub> (und/oder durch entsprechende **Zeilenumformungen** (D1)<sub>Z</sub>, (D3)<sub>Z</sub>) auf eine der Formen (D4), (D5), (D8) bringt, zum Beispiel:

$$\det A \xrightarrow{\text{Zeilenop. (D1)}_Z, \text{(D3)}_Z} \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

**BSP. (5.8.4)**

$$A \Leftrightarrow \begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 3 & 2 & 5 & 4 \\ & 5 & 4 & 3 & 2 \\ & 4 & 5 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & 0 \\ S_4 - S_1 - S_2 \Rightarrow S_4 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ S_3 - 2S_1 \Rightarrow S_3 & 5 & 4 & -7 & -7 \\ & 4 & 5 & -6 & -6 \end{array} \Rightarrow \det A = 0 \text{ wegen } S_3 = S_4.$$

**BSP. (5.8.5)**

Wir berechnen  $\det A$ :

$$A \Leftrightarrow \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 1 & 3 & 7 & 18 & -7 \\ & 0 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ & -2 & 2 & 8 & 4 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array} \xrightarrow{Z_1 \Leftrightarrow Z_4} (-1) \left\{ \begin{array}{c|ccc} & -2 & 2 & 8 & 4 & 2 \\ & 1 & 3 & 7 & 18 & -7 \\ \hline & 0 & 0 & -5 & 0 & 3 \\ & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array} \right\} =: C.$$

Es gilt nun:

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad \det C = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

und somit  $\det A = -\det B \cdot \det C = 48$ .

**BSP. (5.8.6)** In der folgenden Determinante  $\det A$  nehmen wir zuerst die Zeilenumformungen

$Z_j - aZ_5 \Rightarrow Z_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , vor:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 1 \\ a & b & c & 1 & d \\ a & b & 1 & c & d \\ a & 1 & b & c & d \\ 1 & a & b & c & d \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & b - a^2 & c - ab & d - ac & 1 - ad \\ 0 & b - a^2 & c - ab & 1 - ac & d(1 - a) \\ 0 & b - a^2 & 1 - ab & c(1 - a) & d(1 - a) \\ 0 & 1 - a^2 & b(1 - a) & c(1 - a) & d(1 - a) \\ 1 & a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

Wir entwickeln nach der ersten Spalte und nehmen in der resultierenden Determinante die Zeilenumformungen  $Z_j - Z_2 \Rightarrow Z_j$ ,  $j = 3, 4$  vor. Danach wird die Zeilenumformung  $Z_2 - Z_1 \Rightarrow Z_2$  durchgeführt:

$$\begin{vmatrix} b - a^2 & c - ab & d - ac & 1 - ad \\ b - a^2 & c - ab & 1 - ac & d(1 - a) \\ 0 & 1 - c & c - 1 & 0 \\ 1 - b & b - c & c - 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b - a^2 & c - ab & d - ac & 1 - ad \\ 0 & 0 & 1 - d & d - 1 \\ 0 & 1 - c & c - 1 & 0 \\ 1 - b & b - c & c - 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir führen in der letzten Determinante die Spaltenumformungen  $S_3 + S_4 + S_2 \Rightarrow S_3$  durch und entwickeln die resultierende Determinante nach der 2. Zeile:

$$\begin{vmatrix} b - a^2 & c - ab & (d + c)(1 - a) + 1 - ab & 1 - ad \\ 0 & 0 & 0 & d - 1 \\ 0 & 1 - c & 0 & 0 \\ 1 - b & b - c & b - 1 & 0 \end{vmatrix} \\ = (d - 1) \begin{vmatrix} b - a^2 & c - ab & (d + c)(1 - a) + 1 - ab \\ 0 & 1 - c & 0 \\ 1 - b & b - c & b - 1 \end{vmatrix} \\ = (d - 1)(1 - c)(b - 1)[b - a^2 + (d + c)(1 - a) + 1 - ab] \\ = (a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1)(1 + a + b + c + d).$$

### Anwendungen von Determinanten; Volumina

**Definition 5.33** Es seien  $n$  linear unabhängige Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{R}^n$  gegeben. Dann heie die Menge

$$\text{PF}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) := \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^n : \vec{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k \text{ mit } 0 \leq \lambda_k \leq 1 \forall 1 \leq k \leq n \right\}$$

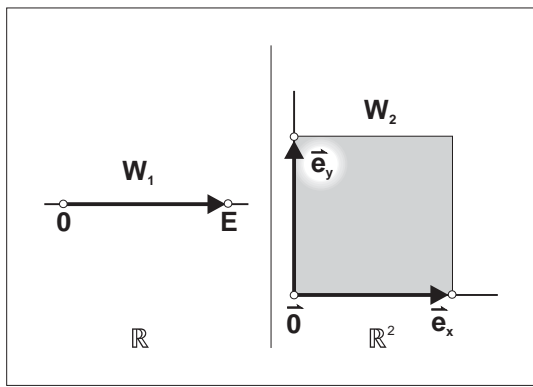
das von den **Kantenvektoren**  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  **aufgespannte  $n$ -Parallelepiped** (auch **Spat** oder  **$n$ -Parallelotop** genannt).

**BSP. (5.8.7)** Ist  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \in \mathbf{R}^n$  die Standardbasis des  $\mathbf{R}^n$ , so liegt mit

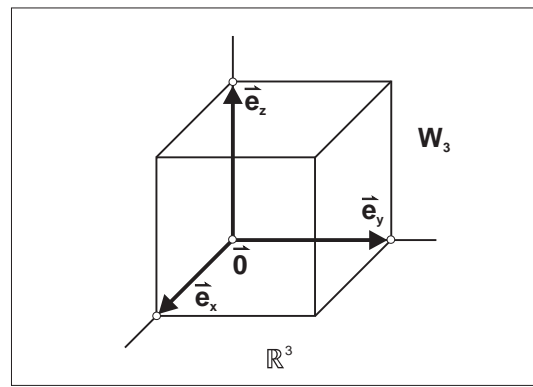
$$W_n := \text{PF}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

der  $n$ -dimensionale **Würfel** vor.





Ein- und zweidimensionaler Würfel



Dreidimensionaler Würfel

Es ist klar, dass  $\det(Id_n) = \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1$  das **Volumen** des Würfels  $W_n$  angibt. Allgemeiner wird man an einen Volumenbegriff für das von den Kantenvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  aufgespannte  $n$ -Parallelepiped folgende **Minimalforderungen** stellen:

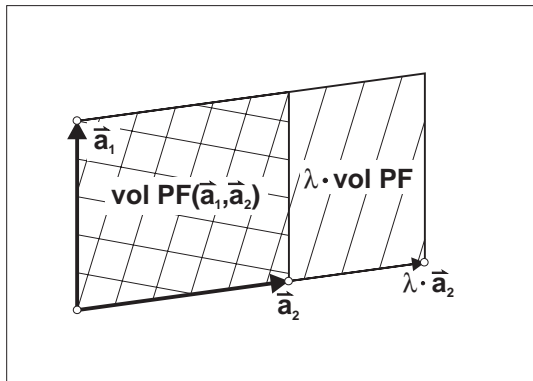
(V1) **Additivität:**

$$\text{vol PF}(\vec{a}_1, \dots, \lambda \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) = |\lambda| \text{vol PF}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \quad \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

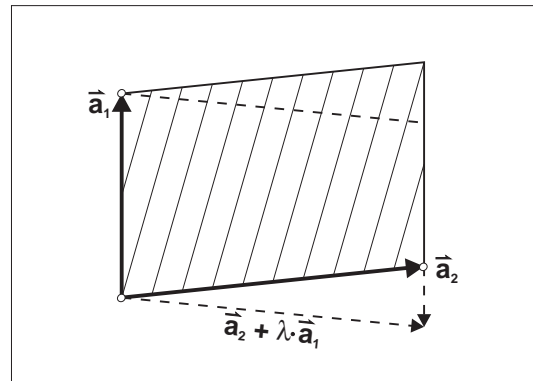
(V2) **Invarianz gegenüber Scherung:**

$$\text{vol PF}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n) = \text{vol PF}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k + \lambda \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \quad \forall j \neq k, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

(V3) **Normierung:**  $\text{vol } W_n = 1$ .



Additivität des Volumens



Invarianz gegenüber Scherung

Offensichtlich werden die Eigenschaften (V1), (V2), (V3) wegen (D2), (D3), (D8) von

$$|\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)|$$

erfüllt. Dies macht die folgende Definition sinnvoll.

**Definition 5.34** *Es seien  $n$  linear unabhängige Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{R}^n$  gegeben. Dann heiÙe*

$$V_{\text{PF}} := \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$$

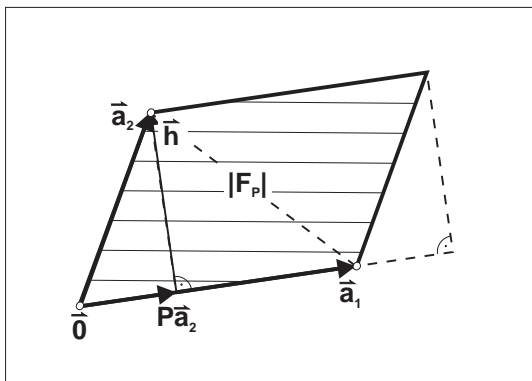
**orientiertes ( $n$ -dimensionales) Volumen** des von den Kantenvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  aufgespannten  $n$ -Parallelepiped. Hingegen heiÙe

$$|V_{\text{PF}}| = |\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)|$$

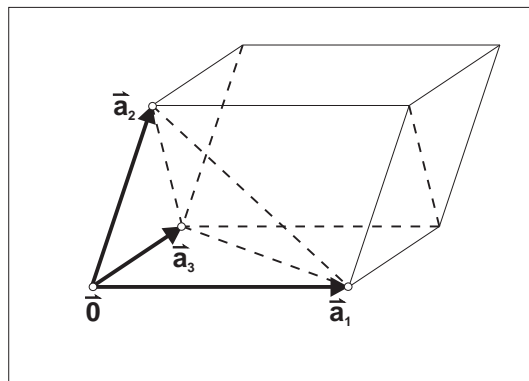
**nichtorientiertes Volumen** des  $n$ -Parallelepiped.

**BSP. (5.8.8)** **Flächeninhalt eines Parallelogramms.** Gegeben seien die **linear unabhängigen** Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbf{R}^2$ . Dann entnimmt man der folgenden Skizze elementargeometrisch den Flächeninhalt  $|F_P| = \|\vec{h}\| \|\vec{a}_1\|$  mit  $\vec{h} := \vec{a}_2 - P\vec{a}_2$ , wobei die  $\perp$ -Projektion  $P\vec{a}_2$  von  $\vec{a}_2$  auf die Richtung  $\vec{a}_1$  ja durch  $P\vec{a}_2 = \vec{a}_1 \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle / \|\vec{a}_1\|^2$  bestimmt ist. Folglich gilt

$$|F_P| = \left\| \vec{a}_2 \|\vec{a}_1\| - \frac{\vec{a}_1 \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{\|\vec{a}_1\|} \right\| =: \|\vec{p}\|.$$



Flächeninhalt eines Parallelogramms



3-Parallelotop, Prisma und Tetraeder

Wir zeigen jetzt, dass der oben bestimmte Flächeninhalt  $|F_P|$  auch durch die Determinante  $|\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|$  ausgedrückt werden kann. Dazu rechnen wir in Komponenten  $\vec{a}_1 := (a, b)^T$ ,  $\vec{a}_2 := (c, d)^T$ :  
 $F_P^2 = \langle \vec{p}, \vec{p} \rangle = \|\vec{a}_1\|^2 \|\vec{a}_2\|^2 - \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2 = [\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)]^2$ .

| Flächeninhalt des von<br>$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbf{R}^2$ aufgespannten |  |
|--|--|
| Parallelogramms  | Dreiecks   |
| $ F_P  =  \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) $   | $ F_D  = \frac{1}{2}  \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2) $ |

**BSP. (5.8.9)** **3-Parallelotop, Prisma, Tetraeder.**

Es seien drei **linear unabhängige** Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbf{R}^3$  gegeben. Gemäß obiger Skizze spannen diese Vektoren in  $\mathbf{R}^3$  ein **3-Parallelotop**, ein **Prisma** und einen **Tetraeder** auf. Die zugeordneten Volumina sind in der folgenden Tabelle angegeben:

| Volumina des von<br>$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbf{R}^3$ aufgespannten |  |   |
|--|--|---|
| 3-Parallelotops  | Prismas  | Tetraeders  |
| $ V_{PF}  =  \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) $                                 | $ V_{Pr}  = \frac{1}{2}  \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) $ | $ V_T  = \frac{1}{6}  \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) $ |

**BSP. (5.8.10)** **Orientierung der Vektorräume  $\mathbf{R}^n$ .**

**Definition 5.35** Zwei Basen  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{R}^n$  und  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in \mathbf{R}^n$  heißen **gleichorientiert genau dann, wenn gilt**

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \cdot \det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) > 0.$$

**Bemerkung 5.22** Es gibt genau zwei Klassen **gleichorientierter** Basen. Gehört nämlich die Basis  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n$  zu der einen Klasse, so gehört jede der Basen  $\vec{a}_1, \dots, -\vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , zur anderen Klasse. Jede dieser Klassen heiße eine **Orientierung  $O$**  von  $\mathbf{R}^n$ , und das Paar  $(\mathbf{R}^n, O)$  heiße **orientierter Vektorraum  $\mathbf{R}^n$** .  $\square$

**Definition 5.36** Eine Basis  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbf{R}^n$  des orientierten Vektorraumes  $(\mathbf{R}^n, O)$  heie **positiv orientiert** oder **Rechtssystem**, wenn gilt:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) > 0.$$

Andernfalls heie die Basis **negativ orientiert** oder **Linkssystem**.

Zum Beispiel ist die Standardbasis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  des  $\mathbf{R}^n$  ein **Rechtssystem**, denn es gilt ja

$$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = \det(\text{Id}_n) = 1 > 0.$$

Man nennt die Orientierung der Standardbasis auch die **Standardorientierung** des  $\mathbf{R}^n$ . (In  $\mathbf{R}^3$  prüft man mit Hilfe der **Rechte-Hand-Regel** in einfacher Weise nach, ob ein Rechtssystem vorliegt.)

Weitere Eigenschaften der Abbildung  $\det : \mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n \times \dots \times \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}$  listen wir in dem folgenden Satz auf:

**Satz 5.34** Für eine Matrix  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  gelten folgende Aussagen:

- (a) Das Vektorsystem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ist **LA**  $\Leftrightarrow \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0$ .
- (b) Das Vektorsystem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  ist **LU**  $\Leftrightarrow \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \neq 0$ .
- (c)  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang } A = n \Leftrightarrow A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$ .

*Begründungen:* (a) Das Vektorsystem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  sei **LA**. Dann gibt es einen Index  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\vec{a}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda_k \vec{a}_k$ . Aus (D7) folgern wir deshalb:

$$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \lambda_k \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, \vec{a}_n) \stackrel{(D4)}{=} 0,$$

da der Vektor  $\vec{a}_k$  zweimal als Spaltenvektor auftritt. Also haben wir die Implikation " $\Rightarrow$ " gezeigt. Zum Beweis der Implikation " $\Leftarrow$ " sei nun  $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = 0$  angenommen. Wir können durch die Zeilenumformungen (D1)<sub>Z</sub> und (D3)<sub>Z</sub> die Matrix  $A^T := (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)^T$  auf obere Dreiecksform transformieren:

$$A^T = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_2^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilenumf. (D1)}_Z, \text{(D3)}_Z} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} =: R.$$

Es folgt  $\det A = 0 = \det A^T = \pm \det R = \pm \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ . Das heißt, mindestens eine der Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  muss verschwinden. Die Matrix  $R$  liegt in der Staffelform vom Typ (II) vor, und somit ist das Vektorsystem  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  **LA**.

(b) Diese Aussage folgt direkt aus (a), und die Aussage (c) folgt aus (b), da die Spaltenvektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  der Matrix  $A$  genau dann **LU** sind, wenn  $\text{Rang } A = n$  gilt. □

## Lineare Gleichungssysteme: Die CRAMERSche Regel

Für eine Koeffizientenmatrix  $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ist das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  genau dann für jede rechte Seite  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$  eindeutig lösbar, wenn  $\text{Rang } A = n$  gilt, und dies ist nach der soeben bewiesenen Aussage genau dann der Fall, wenn  $\det A \neq 0$  gilt. Die Lösung ist dann in der Form  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$  darstellbar. Setzt man für einen festen Vektor  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$

$$A_j(\vec{b}) := (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad (8.6)$$

und verwendet man die Darstellung des linearen Gleichungssystems in der Form

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = b_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n, \quad \text{äquivalent} \quad \vec{b} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{a}_k,$$

so folgt jetzt aus (8.6) die Beziehung

$$\begin{aligned} \det A_j(\vec{b}) &= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \sum_{k=1}^n x_k \vec{a}_k, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ &\stackrel{(D7)}{=} \sum_{k=1}^n x_k \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n) \\ &\stackrel{(D4)}{=} x_j \cdot \det A \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Hieraus läßt sich der Lösungsvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  direkt berechnen. Das Resultat wurde bereits 1750 von GABRIEL CRAMER (1704–1752) gefunden.

### Satz 5.35 (CRAMERSche Regel)

Gegeben sei die Koeffizientenmatrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Genau dann ist das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  für jede rechte Seite  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$  eindeutig lösbar, wenn gilt:

$$\det A \neq 0.$$

Werden zu festem  $\vec{b} \in \mathbf{K}^n$  die Matrizen  $A_j(\vec{b})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , nach der Vorschrift (8.6) erklärt, so ist der Lösungsvektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{K}^n$  in der folgenden Form darstellbar:

$$x_j = (\det A)^{-1} \cdot \det A_j(\vec{b}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

**Merke:** Die CRAMERSche Regel gilt ausschließlich für **reguläre quadratische** Matrizen  $A$  (d.h. für  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  mit  $\det A \neq 0$ ). Für lineare Gleichungssysteme mit  $n \geq 3$  Unbekannten ist sie praktisch nutzlos, da der Rechenaufwand unverhältnismäßig hoch ist. Die CRAMERSche Regel ist mehr oder minder von theoretischem Interesse.

**BSP. (5.8.11)** Es seien  $A := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(2,2)}$  und  $\vec{b} := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$  gegeben. Zu berechnen ist mit Hilfe der CRAMERSchen Regel die Lösung  $\vec{x}$  des linearen Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Es gilt

$$\Delta := \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0.$$

Es existiert also eine eindeutig bestimmte Lösung  $\vec{x}$ . Wir berechnen ferner:

$$\Delta_1 := \det A_1(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23, \quad \Delta_2 := \det A_2(\vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14.$$

Wir haben also  $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 23$ ,  $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 14$ , und somit  $\vec{x} = (23, 14)^T$ .

Abschließend wollen wir uns noch mit der Frage auseinandersetzen, wie die Determinanten von  $A, B \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  und  $AB \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  miteinander verknüpft sind. Zur Vorbereitung einer Antwort führen wir den Begriff der Elementarmatrix ein:

**Definition 5.37** Eine Matrix  $E \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  heie eine **Elementarmatrix**, wenn sie aus der Einheitsmatrix  $Id_n = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  durch eine der drei folgenden **Spaltenumformungen** entstanden ist:

(A) Vertauschung zweier Spalten:  $S_j \Leftrightarrow S_k$ .

(B) Multiplikation einer Spalte mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$ :  $\lambda S_j \Rightarrow S_j$ .

(C) Zur Spalte  $S_j$  wird ein Vielfaches der Spalte  $S_k$  addiert:  $S_j + \lambda S_k \Rightarrow S_j, j \neq k$ .

Elementarmatrizen  $E$  sind stets invertierbar; dies zeigt die folgende Tabelle. Außerdem kann die Determinante  $\det E$  sehr einfach mit Hilfe der Regeln (D1), (D2) und (D3) berechnet werden. Dazu ist lediglich  $\det Id_n = 1$  zu beachten. Fur  $A := (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  bewirkt das Matrizenprodukt  $AE$  genau diejenige elementare Spaltenumformung vom Typ (A), (B) oder (C), durch die die Elementarmatrix  $E$  definiert ist.

### Elementarmatrizen

|   | $Id_n = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_n)$   | $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n)$  |
|---|--|--|
| $S_j \Leftrightarrow S_k$                         | $E := (\dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_j, \dots)$<br>$E^{-1} = E$<br>$\det E = -1 = \det E^{-1}$  | $AE = (\dots, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_j, \dots)$<br><br>$\det AE = -\det A = \det A \det E$                    |
| $\lambda S_j \Rightarrow S_j$<br>$\lambda \neq 0$ | $E := (\dots, \lambda \vec{e}_j, \dots)$<br>$E^{-1} = (\dots, \frac{1}{\lambda} \vec{e}_j, \dots)$<br>$\det E = \lambda, \quad \det E^{-1} = \frac{1}{\lambda}$                    | $AE = (\dots, \lambda \vec{a}_j, \dots)$<br><br>$\det AE = \lambda \det A = \det A \det E$                       |
| $S_j + \lambda S_k \Rightarrow S_j$<br>$j \neq k$ | $E := (\dots, \vec{e}_j + \lambda \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_k, \dots)$<br>$E^{-1} = (\dots, \vec{e}_j - \lambda \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_k, \dots)$<br>$\det E = 1 = \det E^{-1}$ | $AE = (\dots, \vec{a}_j + \lambda \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_k, \dots)$<br><br>$\det AE = \det A = \det A \det E$ |

Ganz offensichtlich gilt nun fur jede Elementarmatrix  $E \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  und jede Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  die Multiplikationsregel  $\det AE = \det A \det E$ . Diese Regel kann induktiv auf **endliche** Produkte von Elementarmatrizen ubertragen werden:

$$\det \left( A \prod_{j=1}^p E_j \right) = \det A \prod_{j=1}^p \det E_j = \det A \det \left( \prod_{j=1}^p E_j \right). \quad (8.7)$$

Mit dieser Beziehung beweisen wir den folgenden

**Satz 5.36 (Determinantenmultiplikationssatz)**

Es seien  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  und ein Vektorsystem  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \in \mathbf{K}^n$  gegeben. Dann gilt:

(a)  $\det(A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_n) = \det A \cdot \det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n).$

(b)  $\det AB = \det A \cdot \det B \quad \forall B \in \mathbf{K}^{(n,n)}.$

*Begründungen:* Setzt man  $B := (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ , so ist es klar, dass (a) und (b) dieselbe Aussage beinhalten. Wir zeigen hier (b) und nehmen dazu  $\text{Rang } B = n$  an. Andernfalls gilt  $\det B = 0$  (wegen Satz 5.34(c)), und wegen  $\text{Rang } AB \leq \text{Rang } B$  folgt auch  $\det AB = 0$ . Für  $\text{Rang } B = n$  ist die Matrix  $B$  invertierbar. Der in Abschnitt 5.4 dargestellte Algorithmus zur Berechnung von  $B^{-1}$  bleibt in gleicher Weise gültig, wenn anstelle der elementaren Zeilenumformungen die Spaltenumformungen vom Typ (A), (B) oder (C) verwendet werden. Das heißt, man erreicht mit einer endlichen Anzahl  $p$  von Elementarmatrizen  $E_j$  eine Transformation

$$Id_n = B \prod_{j=1}^p E_j.$$

Wegen  $E_j \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  gilt  $B = E_p^{-1} E_{p-1}^{-1} \dots E_1^{-1}$ . Da die Inversen  $E_j^{-1}$  wieder Elementarmatrizen sind, kann folglich jede Matrix  $B \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  durch ein Produkt von Elementarmatrizen dargestellt werden:

$$B = \prod_{j=1}^p \tilde{E}_j.$$

Aus der Relation (8.7) erhalten wir nun den behaupteten Determinantenmultiplikationssatz.  $\square$

**Bemerkung 5.23** (a) Wir haben  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  genau dann, wenn  $\det A \neq 0$  gilt. Wegen  $1 = \det(Id_n) = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$  folgt deshalb:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \quad \forall A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n).$$

(b) Ist  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  gegeben, so folgern wir sofort aus (a):

$$\det(ABA^{-1}) = \det B \quad \forall B \in \mathbf{K}^{(n,n)}.$$

(c) Eine unitäre Matrix  $Q \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ( $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ ) erfüllt ja  $Q^* = Q^{-1}$ . Deshalb folgern wir aus der Identität  $1 = \det(Id_n) = \det(Q^*Q) = \det Q^* \cdot \det Q = \overline{\det Q} \cdot \det Q = |\det Q|^2$ :

$$\det Q = \begin{cases} \pm 1 & : Q \text{ orthogonal,} \\ e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbf{R} & : Q \text{ unitär.} \end{cases}$$

**Anwendung von Determinanten: Kofaktoren**

**Definition 5.38** Gegeben sei eine Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Die jeder Streichungsmatrix  $A_{jk}$  von  $A$  zugeordnete Zahl

$$K_{jk} := (-1)^{j+k} \det A_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

heiße **Kofaktor zum Platz**  $(j, k)$  (oder zum Element  $a_{jk}$ ).

**Satz 5.37** (a) Für jede Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  und jedes Indexpaar  $j, k = 1, 2, \dots, n$  gilt:

$$K_{jk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0- & - & -1- & - & -0- \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ k\text{-te Spalte} \\ \\ \end{matrix} \quad (8.8)$$

(b) Für jede Matrix  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  gilt:

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \cdots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \cdots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}.$$

**(Achtung: Spalten- und Zeilenindizes sind vertauscht!)**

*Begründungen:* (a) Ausgehend von den Determinanten in (8.8) erhält man unter Verwendung des LAPLACESchen Entwicklungssatzes für die  $j$ -te Zeile (bzw. für die  $k$ -te Spalte) jeweils den Determinantenwert  $(-1)^{j+k} \cdot 1 \cdot \det A_{jk}$ , und dies ist genau der Kofaktor  $K_{jk}$ .

(b) Wir bezeichnen die Inverse von  $A \in \text{Inv}(\mathbf{K}^n)$  mit  $A^{-1} = (\alpha_{jk}) =: (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Zur Berechnung der Spaltenvektoren  $\vec{\alpha}_j$  lösen wir die  $n$  linearen Gleichungssysteme

$$AA^{-1} = (A\vec{\alpha}_1, A\vec{\alpha}_2, \dots, A\vec{\alpha}_n) \stackrel{!}{=} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = Id_n,$$

und zwar mit der CRAMERSchen Regel. Diese liefert nämlich gerade bei Berücksichtigung der Darstellung (8.8) die Lösung

$$\alpha_{jk} = (\det A)^{-1} \cdot K_{kj} \quad \forall j, k = 1, 2, \dots, n.$$

**BSP. (5.8.12)** Wir berechnen die Inverse der Matrix  $A := \begin{bmatrix} 4 & 8 & -9 \\ -2 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 84$ , mit

Hilfe der Kofaktoren:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{84} \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ -\det \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 9 & -39 & -6 \\ -3 & 69 & 30 \\ -8 & 44 & 24 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## Das CHOLESKY–Verfahren

Wir zeigen hier, dass für **positiv definite** Matrizen  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$  ( $\mathbf{K} := \mathbf{R}$  oder  $\mathbf{K} := \mathbf{C}$ ) stets eine LR–Zerlegung von  $A$  in der speziellen Form  $A = LL^*$  mit einer Linksdreiecksmatrix  $L \in U_L(\mathbf{K}^n)$  existiert. Dazu ergänzen wir als erstes die Aussagen von Satz 5.27 über positiv definite Matrizen in der folgenden Weise:

**Satz 5.38** *Gegeben sei die positiv definite Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Dann gilt  $\det A > 0$ , und alle Hauptuntermatrizen von  $A$  haben ebenfalls eine positive Determinante.*

*Begründung:* Da jede Hauptuntermatrix von  $A$  gemäß Satz 5.27.(b) positiv definit ist, braucht man nur  $\det A > 0$  für positiv definites  $A \in \mathbf{K}^{(m,m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , zu zeigen. Wir führen **vollständige Induktion** nach  $m$  durch.

- *Verankerung:* Für  $m = 1$  gilt  $A = (a_{11}) = a_{11} = \det A > 0$  gemäß Satz 5.27.(c).
- *Vererbung:* Die Aussage sei nun für  $m = 1, 2, \dots, n - 1 \geq 1$  bewiesen. Wir betrachten  $A^{-1} := (\alpha_{jk}) \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ ; diese Matrix ist wegen Satz 5.27.(a) positiv definit, so dass  $\alpha_{jj} > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$  folgt. Wie wir im vorangegangenen Satz 5.37 gezeigt haben, können wir  $\alpha_{11}$  mit Hilfe der CRAMERSchen Regel berechnen:

$$\alpha_{11} = \frac{\det A_{11}}{\det A}.$$

Da  $A_{11} \in \mathbf{K}^{(n-1,n-1)}$  eine Hauptuntermatrix von  $A$  ist, folgt  $\det A_{11} > 0$  aus Satz 5.27.(b) und der Induktionsannahme, also  $\det A = \frac{1}{\alpha_{11}} \cdot \det A_{11} > 0$ . □

**Satz 5.39** *Gegeben sei die positiv definite Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Dann gibt es genau eine Linksdreiecksmatrix  $L \in U_L(\mathbf{K}^n)$  mit  $l_{jj} > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$ , so dass gilt:*

$$\boxed{A = LL^*} \tag{8.9}$$

Für reelles  $A$  ist auch  $L$  reell. (Beachte, dass  $L^* \in U_R(\mathbf{K}^n)$  eine Rechtsdreiecksmatrix ist!)

*Begründung:* Wir führen vollständige Induktion nach der Raumdimension  $n$  durch. Für  $n = 1$  gilt  $A = (a_{11}) = a_{11} > 0$ , und der Ansatz  $L = (l_{11})$  liefert  $LL^* = l_{11}\bar{l}_{11} \stackrel{!}{=} a_{11}$ , also eine eindeutige Lösung  $l_{11} = +\sqrt{a_{11}} > 0$ . Nun gelte der Satz bereits für die Dimensionen  $1, 2, \dots, n - 1 \geq 1$ . *Vererbung:* Wir schreiben  $A$  in der Form

$$A = \begin{bmatrix} A_{nn} & \vec{b} \\ \vec{b}^* & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mit  $A_{nn} \in \mathbf{K}^{(n-1,n-1)}$ ,  $\vec{b} \in \mathbf{K}^{n-1}$  und  $\vec{b}^* := \vec{b}^T$  sowie  $a_{nn} > 0$ . Nach Induktionsannahme gelte die eindeutige Zerlegung  $A_{nn} = L_{n-1}L_{n-1}^*$  mit  $L_{n-1} \in U_L(\mathbf{K}^{n-1})$ . Mit dem Ansatz

$$L := \begin{bmatrix} L_{n-1} & \vec{0} \\ \vec{c}^* & \alpha \end{bmatrix}, \quad L^* = \begin{bmatrix} L_{n-1}^* & \vec{c} \\ \vec{0}^* & \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{c} \in \mathbf{K}^{n-1}, \quad \alpha > 0,$$

erhalten wir

$$LL^* = \begin{bmatrix} L_{n-1}L_{n-1}^* & L_{n-1}\vec{c} \\ (L_{n-1}\vec{c})^* & \|\vec{c}\|^2 + \alpha^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} A_{nn} & \vec{b} \\ \vec{b}^* & a_{nn} \end{bmatrix}.$$



Zum Abgleich beider Seiten müssen wir fordern:

$$(i) \quad L_{n-1}\vec{c} = \vec{b}, \quad (ii) \quad \|\vec{c}\|^2 + \alpha^2 = a_{nn}.$$

Wegen  $L_{n-1} \in \text{Inv}(\mathbf{K}^{n-1})$  hat die Gleichung (i) genau eine Lösung, nämlich  $\vec{c} = L_{n-1}^{-1}\vec{b}$ . Es gilt ferner  $\det L_{n-1} = l_{11}l_{22} \cdots l_{n-1,n-1} > 0$ . Wäre  $\|\vec{c}\|^2 \geq a_{nn}$ , also  $\alpha^2 < 0$ , so hätten wir

$$\det A = \det(LL^*) = \det L \cdot \det L^* = \alpha^2 |\det L_{n-1}|^2 < 0,$$

im Widerspruch zum vorangegangenen Satz. Damit hat die Gleichung (ii) genau eine Lösung mit der geforderten Eigenschaft  $\alpha := l_{nn} := \sqrt{a_{nn} - \|\vec{c}\|^2} > 0$ .  $\square$

Wir geben nachfolgend die Vorschrift an, mit deren Hilfe die Linksdreiecksmatrix  $L$  konstruiert werden kann. Bezüglich eines Beweises verweisen auf die Literatur.

### Satz 5.40 (Verfahren von CHOLESKY)

Gegeben sei die positiv definite Matrix  $A \in \mathbf{K}^{(n,n)}$ . Dann wird die Linksdreiecksmatrix  $L = (l_{jk}) \in U_L(\mathbf{K}^n)$  der CHOLESKY-Zerlegung  $A = LL^*$  mit  $l_{jj} > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$  nach den folgenden Formeln iterativ aus den Elementen  $a_{jk}$  der Matrix  $A$  berechnet:

1. Schritt: Berechne  $l_{11} := \sqrt{a_{11}} > 0$ ;
2. Schritt: für  $j := 1, 2, \dots, n$  :
3. Schritt: für  $k := j + 1, j + 2, \dots, n$  :
4. Schritt: berechne  $l_{kj} := \frac{1}{l_{jj}} \left( \bar{a}_{jk} - \sum_{m=1}^{j-1} \bar{l}_{jm} * l_{km} \right)$ ;
5. Schritt: berechne  $l_{jj} := \left\{ a_{jj} - \sum_{m=1}^{j-1} |l_{jm}|^2 \right\}^{1/2}$ .

**BSP. (5.8.13)** Für die folgende Matrix  $A \in \mathbf{R}^{(3,3)}$  ist die CHOLESKY-Zerlegung zu berechnen:

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & -3 \\ -1 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$$

1. Schritt:  $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5}$ .

2. Schritt:  $l_{k1} = \frac{1}{l_{11}}(a_{1k} - 0) = \frac{a_{1k}}{\sqrt{5}} \Rightarrow l_{21} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad l_{31} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

3. Schritt:  $l_{22} = (a_{22} - l_{21}^2)^{1/2} = \left(8 - \frac{4}{5}\right)^{1/2} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ .

4. Schritt:  $l_{k2} = \frac{1}{l_{22}}(a_{2k} - \sum_{m=1}^1 l_{2m}l_{km}) \Rightarrow l_{32} = (a_{23} - l_{21}l_{31})/l_{22} = -\frac{17}{6\sqrt{5}}$ .

5. Schritt:  $l_{33} = (a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2)^{1/2} = \frac{\sqrt{935}}{6\sqrt{5}}$ .

Ergebnis:

$$L = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ -1 & -\frac{17}{6} & \frac{\sqrt{935}}{6} \end{bmatrix}; \quad L^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -\frac{17}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{935}}{6} \end{bmatrix}.$$

Einsetzprobe ergibt korrekt  $LL^T = A$ .

Mit Hilfe der CHOLESKY-Zerlegung (8.9) kann jetzt die Lösung des linearen Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b} = LL^*\vec{x}$  nach der **Methode von CHOLESKY** in den folgenden drei Schritten

vorgenommen werden:

|  |        |
|--|--------|
| 1. Schritt: $A = LL^*$ (CHOLESKY-Zerlegung von $A$ ),<br>2. Schritt: $L\vec{c} = \vec{b}$ (Vorwärtseinsetzen zur Berechn. von $\vec{c}$ ),<br>3. Schritt: $L^*\vec{x} = \vec{c}$ (Rückwärtseinsetzen zur Berechn. von $\vec{x}$ ). | (8.10) |
|--|--------|

In der Praxis wird man am häufigsten auf reelle symmetrische Matrizen stossen. Sind diese positiv definit, so ist es angezeigt, die CHOLESKY-Zerlegung durchzuführen. Wir geben nachfolgend effektive Computer-Algorithmen an, die die drei Schritte (8.10) vollziehen:

**I. CHOLESKY-Zerlegung für reelle positiv definite Matrizen**

|   |        |
|---|--------|
| 1: für $m := 1, 2, \dots, n$ :<br>2: falls $a_{mm} \leq 0$ : STOP;<br>3: $l_{mm} := \sqrt{a_{mm}}$ ;<br>4: für $j := m + 1, m + 2, \dots, n$ :<br>5: $l_{jm} := a_{jm}/l_{mm}$ ;<br>6: für $k := m + 1, m + 2, \dots, j$ :<br>7: $a_{jk} := a_{jk} - l_{jm} * l_{km}$ . (Ende $m, j, k$ ) | (8.11) |
|---|--------|

**II. Vorwärtseinsetzen zur Berechnung von  $\vec{c}$ .**

|   |        |
|---|--------|
| 1: für $j := 1, 2, \dots, n$ :<br>2: $s := b_j$ ;<br>3: für $k := 1, 2, \dots, j - 1$ :<br>4: $s := s - l_{jk} * c_k$ ; (Ende $k$ )<br>5: $c_j := s/l_{jj}$ . (Ende $j$ ) | (8.12) |
|---|--------|

**III. Rückwärtseinsetzen zur Berechnung von  $\vec{x}$ .**

|   |        |
|---|--------|
| 1: für $j := n, n - 1, \dots, 1$ :<br>2: $s := c_j$ ;<br>3: für $k := j + 1, j + 2, \dots, n$ :<br>4: $s := s - l_{kj} * x_k$ ; (Ende $k$ )<br>5: $x_j := s/l_{jj}$ . (Ende $j$ ) | (8.13) |
|---|--------|

**Bemerkung 5.24 Speicherplatzreduzierung:** Der Wert von  $a_{jk}$  wird zuletzt bei der Berechnung von  $l_{jk}$  benötigt. Deshalb kann die Matrix  $L$  an der Stelle von  $A$  aufgebaut werden. Dazu genügt es, in (8.11) die Variable  $l$  mit  $a$  zu identifizieren. Desgleichen sind in (8.12) die Variable  $c$  mit  $b$  und in (8.13) die Variable  $x$  mit  $c$  identifizierbar. Am Schluss steht also die Lösung  $\vec{x}$  an der Stelle des Vektors  $\vec{b}$ . □

**BSP. (5.8.14)** Man erkennt sofort, dass die  $n \times n$ -Bandmatrix

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & & & & & & \\ -2 & 6 & -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 7 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 7 & -2 & 1 & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & -2 & 7 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 & 6 & -2 \\ & & & & & & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

positiv definit ist. Sie ist nämlich stark diagonaldominant, symmetrisch und erfüllt  $a_{jj} > 0 \forall j = 1, 2, \dots, n$ . Also trifft Satz 5.28 zu. Wir lösen jetzt das System  $A\vec{x} = \vec{b}$  für  $n = 10$  unter Verwendung des CHOLESKY–Verfahrens (8.10) zu vorgegebener rechter Seite

$$\vec{b} := (4, 8, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 25, 40)^T \in \mathbf{R}^{10}.$$

Mit dem Algorithmus (8.11) berechnen wir zunächst die Linksdreiecksmatrix  $L$  der CHOLESKY–Zerlegung  $A = LL^*$ :

**Linksdreiecksmatrix  $L$  der CHOLESKY–Zerlegung: Dimension  $n = 10$ .**

$$\begin{bmatrix} 2.236\ 067\text{E}^{+00} & & & & & & & & & \\ -8.944\ 271\text{E}^{-01} & 2.280\ 350\text{E}^{+00} & & & & & & & & \\ 4.472\ 135\text{E}^{-01} & -7.016\ 464\text{E}^{-01} & 2.511\ 511\text{E}^{+00} & & & & & & & \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 4.385\ 290\text{E}^{-01} & -6.738\ 202\text{E}^{-01} & 2.520\ 646\text{E}^{+00} & & & & & & \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 3.981\ 665\text{E}^{-01} & -6.870\ 092\text{E}^{-01} & 2.523\ 783\text{E}^{+00} & & & & & \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 3.967\ 236\text{E}^{-01} & -6.844\ 673\text{E}^{-01} & & & & & \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 3.962\ 305\text{E}^{-01} & & & & & \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & & & & & \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & & & & & \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & & & & & \\ & & & & & & & & & O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.524\ 700\text{E}^{+00} \\ -6.847\ 516\text{E}^{-01} & 2.524\ 701\text{E}^{+00} \\ 3.960\ 865\text{E}^{-01} & -6.847\ 460\text{E}^{-01} & 2.524\ 725\text{E}^{+00} \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 3.960\ 864\text{E}^{-01} & -6.847\ 403\text{E}^{-01} & 2.318\ 242\text{E}^{+00} \\ 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 0.000\ 000\text{E}^{+00} & 3.960\ 826\text{E}^{-01} & -7.457\ 315\text{E}^{-01} & 2.070\ 507\text{E}^{+00} \end{bmatrix}.$$

Mit den beiden Algorithmen (8.12) (Vorwärtseinsetzen) und (8.13) (Rückwärtseinsetzen) berechnen wir jetzt den Hilfsvektor  $\vec{c}$  durch Lösen der Gleichung  $L\vec{c} = \vec{b}$  und danach den Lösungsvektor  $\vec{x}$  aus  $L^T\vec{x} = \vec{c}$ :

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 1.788\ 854\text{E}^{+00} \\ 4.209\ 878\text{E}^{+00} \\ 6.830\ 087\text{E}^{+00} \\ 9.027\ 881\text{E}^{+00} \\ 1.128\ 572\text{E}^{+01} \\ 1.352\ 363\text{E}^{+01} \\ 1.575\ 971\text{E}^{+01} \\ 1.799\ 596\text{E}^{+01} \\ 1.340\ 686\text{E}^{+01} \\ 2.070\ 507\text{E}^{+01} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 2.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 3.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 4.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 5.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 6.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 7.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 8.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 9.000\ 000\text{E}^{+00} \\ 1.000\ 000\text{E}^{+01} \end{bmatrix}.$$

## 5.9 Das Vektorprodukt

Im Vektorraum  $\mathbf{R}^3$  führt man aus geometrisch–physikalischen Gründen ein weiteres Produkt " $\times$ " :  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  als "äußere" binäre Verknüpfung zweier Vektoren ein, welche wiederum einen **Vektor** liefert.

**Definition 5.39** Das **Vektorprodukt** " $\times$ " :  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  sei diejenige Verknüpfung, die jedem Paar von Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$  einen Vektor  $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbf{R}^3$  gemäß folgender Vorschrift zuordnet:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3. \quad (9.1)$$

(Manchmal setzt man auch  $\vec{a} \times \vec{b} \equiv [\vec{a}, \vec{b}]$  und spricht dann vom **äußeren Produkt** oder **Kreuzprodukt**.)

**Satz 5.41** (a) Das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbf{R}^3$  ist für jedes Vektorpaar  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$  durch die Definitionsvorschrift (9.1) eindeutig festgelegt.

(b) In den Komponenten der Standardbasis  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  und  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$  hat das Vektorprodukt die Komponentendarstellung

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3.$$

*Begründungen:* (a) Es sei  $\vec{c} \in \mathbf{R}^3$  so gegeben, dass  $\langle \vec{c}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3$  gilt. Wir erschließen hieraus:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b} - \vec{c}, \vec{x} \rangle = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{c} \in (\mathbf{R}^3)^\perp = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}.$$

(b) Wir berechnen  $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x})$  unter Verwendung der Regel von SARRUS:

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 & | & a_1 & b_1 \\ & \searrow & \times & \times & \nearrow & \\ a_2 & b_2 & x_2 & | & a_2 & b_2 \\ & \nearrow & \times & \times & \searrow & \\ a_3 & b_3 & x_3 & | & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} (a_2 b_3 - a_3 b_2) x_1 \\ + (a_3 b_1 - a_1 b_3) x_2 \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_3 \end{cases} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{x} \rangle \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

**Merkregel:** Ist  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  die Standardbasis des  $\mathbf{R}^3$ , so kann man sich das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  leicht durch folgende **formale Determinante** merken:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ + \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{cases}.$$

Man beachte die **zyklische Indexvertauschung!**

Zum Beispiel gelten:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 3 \\ \vec{e}_2 & 2 & 2 \\ \vec{e}_3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 (2 - 6) + \vec{e}_2 (9 - 1) + \vec{e}_3 (2 - 6) = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & -2 \\ \vec{e}_2 & -2 & 4 \\ \vec{e}_3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 (12 - 12) + \vec{e}_2 (-6 + 6) + \vec{e}_3 (4 - 4) = \vec{0}.$$

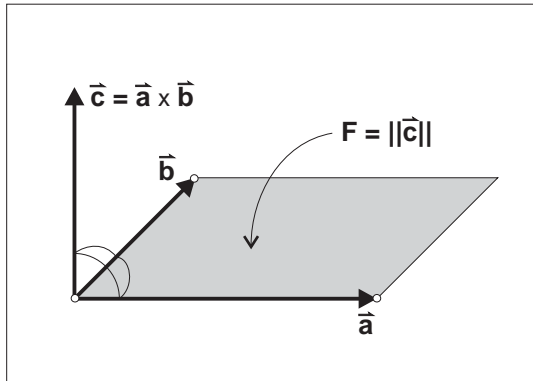
Als Motivation für die Einführung des Vektorproduktes  $\vec{a} \times \vec{b}$  diene ursprünglich die Suche nach einem Vektor  $\vec{c}$  mit den Eigenschaften

(VP1)  $\vec{c} \perp \vec{a}$  und  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ,

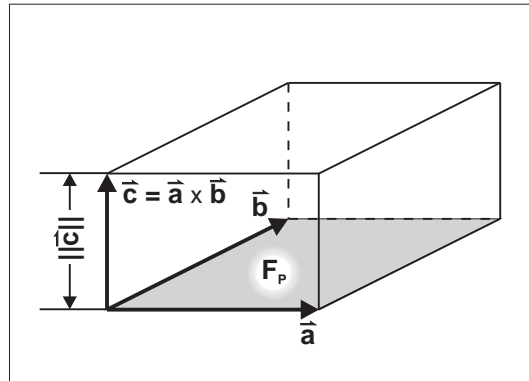
(VP2)  $\|\vec{c}\|$  ist der Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms,

(VP3) die Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bilden ein Rechtssystem.

Wir zeigen nachfolgend, dass diese Forderungen gerade vom Vektorprodukt erfüllt werden.



Eigenschaften des Vektorprodukts  $\vec{a} \times \vec{b}$



Volumen des von  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$  aufgespannten Parallelepipedes

Wir diskutieren nun eine Reihe von Eigenschaften und Rechenregeln für das Vektorprodukt.

(V1) 
$$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}.$$

Denn es gilt ja wegen (9.1)

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0 = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle.$$

(V2) 
$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = F_P.$$

Hierin bezeichnet  $F_P$  den Flächeninhalt des von den Kantenvektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms.

In der Tat, mit  $\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b}$  entnehmen wir der obigen Skizze:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{c}\|^2 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = |\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |V_{PF}| = F_P \cdot \|\vec{c}\|.$$

Nach Division durch  $\|\vec{c}\|$  erhält man nun das behauptete Resultat  $F_P = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$ .

**Bemerkung 5.25** Das Volumen  $V_{PF}$  des von den drei Kantenvektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$  aufgespannten Parallelepipedes hatten wir ja bereits durch  $V_{PF} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  definiert. In der älteren Literatur wird ein Parallelepiped auch als **Spat** bezeichnet. Dies liefert eine Rechtfertigung für die folgende □

**Definition 5.40** Das Produkt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

heiße **Spatprodukt** der Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ .

$$(V3) \quad \boxed{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \text{ bilden } \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3 \text{ ein Rechtssystem.}}$$

Denn es gilt ja mit  $\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b}$ , wie wir oben gezeigt haben:

$$0 \leq \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

$$(V4) \quad \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3 \text{ und } \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \quad \forall \vec{a} \in \mathbf{R}^3.}$$

Das Vektorprodukt ist **nicht** kommutativ, denn es gilt:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{x}) = -\langle \vec{b} \times \vec{a}, \vec{x} \rangle \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3.$$

$$(V5) \quad \boxed{(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{c}) + \mu(\vec{b} \times \vec{c}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}.}$$

Das Vektorprodukt ist **linear** im ersten Argument, und zusammen mit (V4) erhält man auch die Linearität im zweiten Argument.

*Begründung* von (V5):

$$\begin{aligned} \langle (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \times \vec{c}, \vec{x} \rangle &= \det(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}) = \lambda \det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{x}) + \mu \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{x}) \\ &= \lambda \langle \vec{a} \times \vec{c}, \vec{x} \rangle + \mu \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{x} \rangle \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

$$(V6) \quad \boxed{\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3, \forall \lambda \in \mathbf{R}.}$$

*Begründung* von (V6):

$$\langle \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \vec{x} \rangle = \lambda \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = \det(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = \det(\vec{a}, \lambda \vec{b}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3.$$

$$(V7) \quad \boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind LA.}}$$

*Begründung* von (V7):

$$0 = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{x} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ LA.}$$

$$(V8) \quad \boxed{\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c} \times \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3.}$$

Durch **zyklische Vertauschung** ändert sich das Spatprodukt nicht.

*Begründung* von (V8):

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \det(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}), \quad \text{d.h. } [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}].$$

Für die **Mehrfachausführung** des Vektorproduktes gibt es spezielle Formeln:

**Satz 5.42 (GRASSMANN'SCHER ENTWICKLUNGSSATZ)**

*Es gilt*

$$(V9) \quad \boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3.}$$

**Merke: bac minus cab, Klammern hinten!**

*Begründung:* Durch explizites Ausrechnen unter Definitionsverwendung zeigt man:

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle. \tag{9.2}$$

*1. Fall:* Gilt  $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ , so sind die Vektoren  $\vec{b}, \vec{c}$  LA, und es verschwinden beide Seiten in (V9).

2. Fall: Gilt  $\vec{b} \times \vec{c} \neq \vec{0}$ , so sind die Vektoren  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}$  eine Basis des  $\mathbf{R}^3$ . Es gilt  $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 (\vec{b} \times \vec{c})$ , und hiermit resultiert:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \lambda_1 \vec{b} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \lambda_2 \vec{c} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &\stackrel{(9.2)}{=} \lambda_1 [\vec{b} \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle] - \lambda_2 [\vec{c} \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle - \vec{b} \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle] \\ &= \vec{b} \langle \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c})}_{\perp \vec{c}}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c})}_{\perp \vec{b}}, \vec{b} \rangle \\ &= \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

**Bemerkung 5.26** Das Vektorprodukt ist **nicht assoziativ**. In der Tat, aus dem GRASSMANNschen Entwicklungssatz erhält man mit der Beziehung (V4):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{a} \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

**Satz 5.43 (LAGRANGE Identität)**

Es gilt

$$(V10) \quad \boxed{\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbf{R}^3.}$$

*Begründung:* Wir setzen  $\vec{y} := \vec{c} \times \vec{d}$  und verwenden den GRASSMANNschen Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{y} \rangle &= \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{y}) = \det(\vec{b}, \vec{y}, \vec{a}) = \langle \vec{b} \times \vec{y}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}), \vec{a} \rangle \\ &\stackrel{(V9)}{=} \langle \vec{c} \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \vec{d} \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle, \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle. \end{aligned}$$

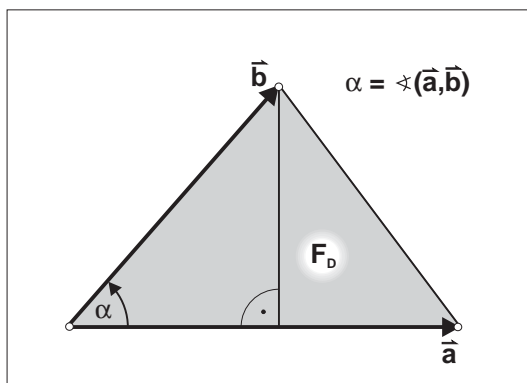
$$(V11) \quad \boxed{\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cdot |\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})| = 2 F_D \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3,}$$

worin  $F_D$  der Flächeninhalt des von den Kantenvektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  aufgespannten Dreiecks ist.

*Begründung* für (V11): Wir setzen in (V10)  $\vec{a} = \vec{c}$  und  $\vec{d} = \vec{b}$ . Dann folgt unter Beachtung von  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ :

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cdot |\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|.$$

Die folgende Skizze zeigt, dass dieser Ausdruck den zweifachen Flächeninhalt des von den Kantenvektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  aufgespannten Dreiecks angibt.



Die Höhe des Dreiecks beträgt  $\|\vec{b}\| \cdot |\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|$

## Anwendungen des Vektorprodukts

Wir stellen hier Anwendungen des Vektorproduktes aus dem Bereich der geometrischen Problemstellungen im  $\mathbf{R}^3$  vor.

**BSP. (5.9.1)** Die Standardaufgabe, zu zwei gegebenen Richtungen  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$  eine **orthogonale Richtung**  $\vec{c}$ ,  $\vec{a} \perp \vec{c} \perp \vec{b}$ , zu bestimmen, wird gemäß (V1) durch  $\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b}$  gelöst. Sind  $\vec{a} \perp \vec{b}$  **Einheitsvektoren**, so folgt aus (V11), dass auch  $\|\vec{c}\| = 1$  gilt. *Zum Beispiel* stehen die Einheitsvektoren  $\vec{e}_j \in \mathbf{R}^3$  der Standardbasis in folgender Relation:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 0 \\ \vec{e}_2 & 0 & 1 \\ \vec{e}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 0 & 0 \\ \vec{e}_2 & 1 & 0 \\ \vec{e}_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 0 & 1 \\ \vec{e}_2 & 0 & 0 \\ \vec{e}_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_2.$$

Spannen  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$  die Richtung  $U := \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$  einer Ebene

$$E := \vec{p} + U = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$$

auf, so wird das Orthogonalkomplement  $U^\perp$  von der **Einheitsnormalen**  $\vec{n}_0$  aufgespannt, mit deren Hilfe man die HESSE-Normalform (HNF) der Ebene  $E$  bestimmt:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} \Rightarrow E = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \langle \vec{n}_0, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}_0, \vec{p} \rangle\}. \quad (\text{HNF})$$

Das Gegenstück zur HESSE-Normalform der **Ebenengleichung** bildet in  $\mathbf{R}^3$  die PLÜCKER-Normalform der **Geradengleichung** (PNF):

**Satz 5.44** Gegeben seien ein Aufhängepunkt  $\vec{p} \in \mathbf{R}^3$  und eine Richtung  $\vec{0} \neq \vec{u} \in \mathbf{R}^3$ , die eine **Gerade**  $G \subset \mathbf{R}^3$  bestimmen:

$$G = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Dann gestattet  $G$  die folgende Darstellung in der PLÜCKERSchen Normalform:

$$G = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : (\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 : \vec{x} \times \vec{u} = \vec{p} \times \vec{u} =: \vec{d} = \text{const}\}. \quad (9.3)$$

*Begründung:* Es ist klar, wegen (V7) gilt:

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{p}), \vec{u} \text{ sind LA} \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{p} = \lambda \vec{u}.$$

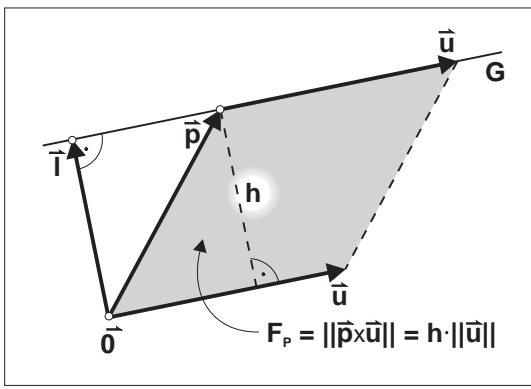
Also beschreibt (9.3) genau die Menge aller Punkte auf der Geraden  $G : \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$ . □

**Bemerkung 5.27** Die Darstellung  $G : \vec{x} \times \vec{u} = \vec{p} \times \vec{u} =: \vec{d} = \text{const}$  heißt auch **Momentengleichung** einer Geraden  $G$ . Dieser Begriff ist der Physik entlehnt. Bezeichnet  $\vec{v}$  ein *ortsabhängiges Vektorfeld*, welches im Punkte  $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$  angreift, so nennt man  $\vec{m} := \vec{x} \times \vec{v}$  das  **$\vec{v}$ -Moment im Punkte  $\vec{x}$** . Spezielle Momente sind das **Drehmoment**  $\vec{m} = \vec{x} \times \vec{v}$ , welches ein **Kraftfeld**  $\vec{v}$  im Punkte  $\vec{x}$  ausübt. Ferner der **Drehimpuls (Drall)**  $m(\vec{x} \times \vec{v})$  einer Masse  $m$  in einem *Geschwindigkeitsfeld*  $\vec{v}$ . □

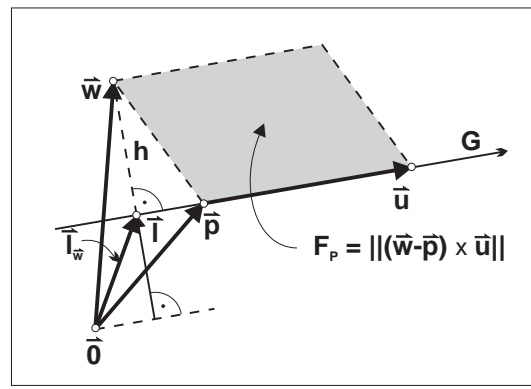
**BSP. (5.9.2)** **Abstand und Lotvektor des Punktes  $\vec{0}$  auf  $G$ .** Im folgenden bezeichne stets

$$\vec{d} := \vec{p} \times \vec{u}, \quad \vec{d} \perp \vec{u}.$$





Abstand und Lotvektor von  $\vec{0}$  auf die Gerade  $G$



Abstand und Lotfußpunkt von  $\vec{w}$  auf die Gerade  $G$

An der linken Skizze liest man sofort ab:

$$\text{Abstand vom Ursprung: } d(\vec{0}, G) = \frac{\|\vec{p} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{d}\|}{\|\vec{u}\|}. \quad (9.4)$$

Der Lotvektor  $\vec{\ell}$  von  $\vec{0}$  auf  $G$  unterliegt offenbar den Bedingungen  $\vec{u} \perp \vec{\ell} \perp \vec{d}$ . Dieser Bedingung wird der Ansatz

$$\vec{\ell} := \lambda (\vec{u} \times \vec{d}) = \lambda \vec{u} \times (\vec{p} \times \vec{u}) \stackrel{(V9)}{=} \lambda [\vec{p} \|\vec{u}\|^2 - \vec{u} \langle \vec{p}, \vec{u} \rangle]$$

gerech. Wegen (9.3) erschließen wir  $\vec{p} \times \vec{u} = \vec{\ell} \times \vec{u} = \lambda (\vec{p} \times \vec{u}) \|\vec{u}\|^2$ , woraus  $\lambda = 1/\|\vec{u}\|^2$  folgt.

$$\text{Lotvektor von } \vec{0} \text{ auf } G: \quad \vec{\ell} = \frac{\vec{u} \times (\vec{p} \times \vec{u})}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{\vec{u} \times \vec{d}}{\|\vec{u}\|^2}. \quad (9.5)$$

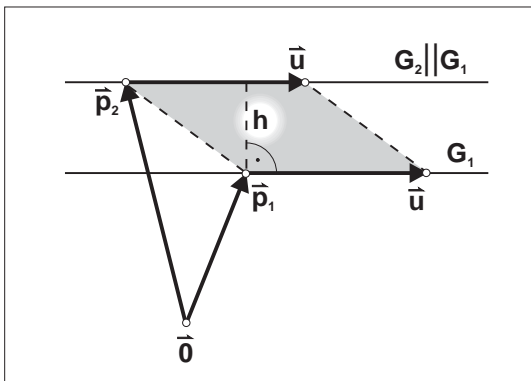
**Bemerkung 5.28** Wie wir oben gesehen haben, führt die Parameterdarstellung  $G: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$  unmittelbar auf die PNF  $G: \vec{x} \times \vec{u} = \vec{p} \times \vec{u} = \vec{d}$ . Liegt umgekehrt die PNF  $G: \vec{x} \times \vec{u} = \vec{d}$  einer Geraden vor, so gewinnt man mit (9.5) sofort die Parameterdarstellung  $G: \vec{x} = \vec{\ell} + \lambda \vec{u}$ .  $\square$

**BSP. (5.9.3)** Abstand und Lotfußpunkt des Punktes  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  auf  $G$ . Der obigen Skizze ist unmittelbar zu entnehmen:

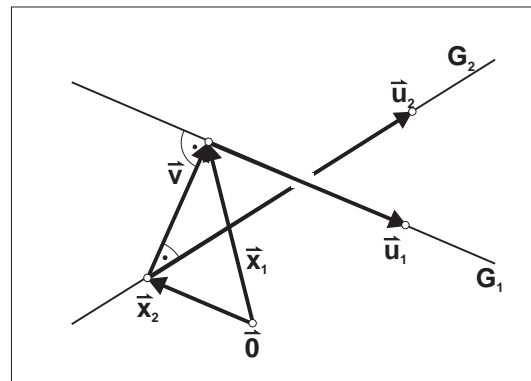
$$\text{Abstand des Punktes } \vec{w} \text{ von } G: \quad d(\vec{w}, G) = \frac{\|(\vec{w} - \vec{p}) \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|(\vec{w} \times \vec{u}) - \vec{d}\|}{\|\vec{u}\|}. \quad (9.6)$$

$$\text{Lotfußpunkt von } \vec{w} \text{ auf } G: \quad \vec{\ell}_w = \vec{\ell} + \frac{\vec{u} \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}. \quad (9.7)$$

**BSP. (5.9.4)** Abstand zweier Geraden. Wir orientieren uns an den folgenden Skizzen:



Abstand paralleler Geraden



Abstand windschiefer Geraden

$$\boxed{\text{Abstand paralleler Geraden: } d(G_1, G_2) = \frac{\|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|\vec{d}_2 - \vec{d}_1\|}{\|\vec{u}\|}.} \quad (9.8)$$

Bei **windschiefen** Geraden muss die Lotrichtung  $\vec{v}$  die Bedingung  $\vec{u}_1 \perp \vec{v} \perp \vec{u}_2$  erfüllen, was auf die Gleichung  $\vec{v} = \pm d(G_1, G_2)(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) / \|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|$  führt. Aus der Parameterdarstellung  $G_j : \vec{x}_j = \vec{\ell}_j + \lambda_j \vec{u}_j = \vec{p}_j + \lambda_j \vec{u}_j$  erhalten wir andererseits  $\vec{v} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 - \lambda_1 \vec{u}_1$ . Wird diese Gleichung skalar mit  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$  multipliziert, so folgt nun  $\pm d(G_1, G_2) \|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\| = \langle \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \rangle = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1)$ .

$$\boxed{\text{Abstand zweier Geraden: } d(G_1, G_2) = \frac{|\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{\ell}_2 - \vec{\ell}_1)|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|} = \frac{|\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{p}_2 - \vec{p}_1)|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}.} \quad (9.9)$$

Wird die Identität

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{p}_2 - \vec{p}_1) = -\det(\vec{p}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2) - \det(\vec{p}_2, \vec{u}_2, \vec{u}_1) = -\langle \vec{p}_1 \times \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle - \langle \vec{p}_2 \times \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle$$

verwendet, so erhält man gleichwertig mit (9.9):

$$\boxed{\text{Abstand zweier Geraden: } d(G_1, G_2) = \frac{|\langle \vec{d}_1, \vec{u}_2 \rangle + \langle \vec{d}_2, \vec{u}_1 \rangle|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}.} \quad (9.10)$$

**BSP. (5.9.5)** **Schnittmenge zweier Ebenen.** Liegen Ebenengleichungen der Ebenen  $E_j \subset \mathbf{R}^3$  in der HNF  $\langle \vec{x}, \vec{n}_j \rangle = \alpha_j$ ,  $j = 1, 2$ , vor, so ist die Schnittmannigfaltigkeit  $E_1 \cap E_2$  genau dann eine Gerade  $G$ , wenn die Normalenvektoren  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  **LU** sind. Die Richtung  $\vec{u}$  von  $G$  muss  $\vec{n}_1 \perp \vec{u} \perp \vec{n}_2$  erfüllen, was durch  $\vec{u} := \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  sichergestellt ist. Es sei  $G : \vec{x} \times \vec{u} = \vec{d}$  die PNF der Schnittgeraden. Unter Verwendung von (V9) resultiert nun  $\vec{x} \times (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = \vec{n}_1 \langle \vec{x}, \vec{n}_2 \rangle - \vec{n}_2 \langle \vec{x}, \vec{n}_1 \rangle = \vec{n}_1 \alpha_2 - \vec{n}_2 \alpha_1$ .

$$\boxed{\text{Schnittgerade } E_1 \cap E_2 = G : \vec{x} \times (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = \alpha_2 \vec{n}_1 - \alpha_1 \vec{n}_2.} \quad (9.11)$$

**BSP. (5.9.6)** **Schnittmenge einer Geraden und einer Ebene.** Es seien  $G : \vec{x} \times \vec{u} = \vec{d}$  und  $E : \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \alpha$  die Normalformen von Geraden- bzw. Ebenengleichung. Für jeden Punkt  $\vec{x} \in E \cap G$  muss dann gelten:

$$\vec{n} \times \vec{d} = \vec{n} \times (\vec{x} \times \vec{u}) \stackrel{(V9)}{=} \vec{x} \langle \vec{n}, \vec{u} \rangle - \underbrace{\vec{u} \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle}_{=\alpha}$$

Gilt  $\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle \neq 0$ , so kann diese Gleichung nach  $\vec{x}$  aufgelöst werden. Andernfalls gilt  $G \parallel E$ . Wir erhalten:

$$\boxed{\text{Schnittpunkt } G \cap E = \{\vec{x}\} : \vec{x} = \frac{(\vec{n} \times \vec{d}) + \alpha \vec{u}}{\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle}.} \quad (9.12)$$

**BSP. (5.9.7)** **Schnittmenge zweier Geraden in  $\mathbf{R}^3$ .** Aus der PNF können keine **einfachen** Formeln für den Schnittpunkt zweier windschiefer Geraden  $G_1, G_2 \subset \mathbf{R}^3$  hergeleitet werden. Geht man von der Parameterdarstellung  $G_j : \vec{x} = \vec{p}_j + \lambda_j \vec{u}_j$ ,  $j = 1, 2$ , aus, so können sich  $G_1$  und  $G_2$  höchstens dann schneiden, wenn

$$d(G_1, G_2) = 0 = \langle \vec{d}_1, \vec{u}_2 \rangle + \langle \vec{d}_2, \vec{u}_1 \rangle$$

gilt, vgl. BSP. (5.9.4). Man berechnet am schnellsten den Schnittpunkt  $\vec{x}_S = \vec{p}_1 + \lambda_1 \vec{u}_1 = \vec{p}_2 + \lambda_2 \vec{u}_2$  durch Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\boxed{\lambda_1 \vec{u}_1 - \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

nach einem der Parameter  $\lambda_1$  oder  $\lambda_2$ .

# Index

- Abbildung, 9, 11
  - antilineare, 186
  - bijektive, 12, 182
  - eindeutige, 12, 182
  - injektive, 12, 182
  - lineare bijektive, 206
  - natürliche, 16
  - surjektive, 12, 182
  - triviale, 185
- Abbildungen
  - K**-wertige, 142
- abbrechender Dezimalbruch, 6
- Abel, N.H., 21, 81
- abelsche Gruppe, 21
- Abschätzverfahren, 33
  - Fehlerabschätzung, 120
- absolute Konvergenz, 111
- Abstand, 37
  - orientierter, 175
  - Punkt – Ebene, 178
  - Punkt – Gerade, 262
  - Punkt – Untermannigfaltigkeit, 173
  - Ursprung – Gerade, 261
  - Ursprung – Hyperebene, 175
  - zweier Ebenen, 173
  - zweier Geraden, 262
  - zweier Untermannigfaltigkeiten, 173
- abzählbare
  - Menge, 183
- Addition
  - von Vektoren, 138
- adjungiert, 200
- adjungierte
  - Matrix, 213
- Äquivalenzklasse, 10
  - Vertreter einer, 10
- Äquivalenzrelation, 10
- äußeres Produkt, 257
- affiner
  - Unterraum, 195
- Algebra, 14
  - $\sigma$ -, 4
  - Fundamentalsatz der, 81
- algebraische Operation
  - binäre, 13
  - unäre, 14
- algebraische Struktur, 14
- algebraischer
  - Dual, 187
- allgemeine
  - Ebenengleichung, 176
- alternierende Reihe, 117
- Anschauungsraum, 140
- antihermitesche
  - Matrizen, 218
- antilineare Abbildung, 186
- antisymmetrische
  - Matrizen, 218
- Approximation, 41
- Archimedes, 41
  - Satz des, 41
- arithmetisches Mittel, 43
- Assoziativgesetz, 3
  - verallgemeinertes, 30
- aufgespannter Unterraum, 146
- Aufhängepunkt, 158
- Ausgleichsproblem
  - lineares, 223
- Austauschsatz, 151
- Auswahlsatz
  - von Bolzano–Weierstrass, 100
- Automorphismus, 15
- Axiom
  - Vollständigkeits-, 38
- Axiome
  - der Addition in **R**, 29
  - der Multiplikation, 29
- Axiomensystem
  - der reellen Zahlen, 29
  - eines Körpers, 25
  - für die natürlichen Zahlen, 26
- babylonisches Wurzelziehen, 86

Bandmatrix, 255  
 Basen  
   gleichorientierte, 247  
   negativ orientierte, 248  
   positiv orientierte, 248  
 Basis, 221  
   –ergänzungssatz, 154  
   –matrix, 221  
   –transformation  
     zum Basiswechsel, 210  
   –vektor, 191  
   Cartesische, 152  
   für Bild, 191  
   für Kern, 191  
   Standard–, 152  
 bedingte Konvergenz, 111  
 Bernoulli, J., 51  
 Bernoulli–Ungleichung, 33  
 beschränkt, 92  
 beständige  
   Lösbarkeit, 195  
 Betrag, 36  
   eines Vektors, 161  
   komplexer Zahlen, 61  
 Beweis  
   indirekter, 1  
 bijektiv, 193  
 Bild, 11, 189  
   –raum, 189  
 Bildmenge, 12, 181  
 Binomialkoeffizienten, 44  
 binomische  
   Reihe, 116  
 Binomischer Lehrsatz, 45  
 Binompotenzen, 44  
 Bogenmaß, 65  
 Bolzano  
   Auswahlsatz von, 100  
 Bolzano, B., 100  
  
 Cantor, G., 1  
 Cardanische Formeln, 81  
 Cardano, G., 81  
 Cartesische  
   Basis, 152  
 Cartesisches Produkt, 4, 49  
 Cauchy  
   Folge, 97  
   Konvergenzkriterium, 96, 109  
   Produkt, 125  
 Cauchy, A., 96  
 Cauchy–Schwarzsche Ungleichung, 34  
 Cholesky  
   –Verfahren, 253  
   –Zerlegung, 254  
 Cramersche Regel, 249  
  
 Darstellung des Nullvektors  
   nichttriviale, 148  
   triviale, 148  
 de Morgansche Formeln, 3  
 Dedekind, R., 38  
 Dedekindscher Schnitt, 38  
 Definition  
   Produkt–, 28  
   rekursive, 89  
   Summen–, 27  
 Definitionsbereich, 183  
   maximaler, 183  
 Deflation  
   implizite, 105  
   sukzessive, 105  
 Determinanten  
   –multiplikationssatz, 251  
   Rechenregeln, 242  
   Volumina, 245  
 Dezimalbruch  
   abbrechender, 6  
   nichtperiodischer, 8  
   periodischer, 6  
 Diagonal  
   –elemente, 130  
   –matrix, 199, 225  
   –strategie, 234  
 diagonaldominant, 230  
 Diagonale, 9  
 Differenzmenge, 2  
 Dimension  
   endliche, 152  
 dimensional  
   unendlich, 153  
 Dimensions  
   –formel, 192  
   –satz  
     für Unterräume, 154  
 direkte  
   Zerlegung, 145  
 Distanz, 37, 164

- Distributivgesetz, 3
  - verallgemeinertes, 30
- divergent, 89, 108
- Divergenzkriterium, 110
- Division
  - mit Rest, 76
- Division mit Rest, 6
- Divisionsalgorithmus
  - Euklidischer, 19, 77
- Divisionsrest, 18
- dominantes Element, 3
- Drall, 261
- Dreh
  - impuls, 261
  - moment, 261
- Drehung, 220
  - der Standardbasis, 212
- Dreiecks
  - determinante, 243
  - matrizen, 224
    - Links-, 224
    - Rechts-, 224
  - ungleichung, 36, 37
- Dual
  - algebraischer, 187
- Durchschnittsmenge, 2
- dyadisches
  - Produkt, 200
- Ebene, 147, 157
  - Euklidische, 64
- Ebenengleichung
  - allgemeine, 176
- Eigenschaft
  - Extremal-, 223
- Eigenschaften
  - Skalarprodukt, 162
  - Vektorprodukt, 258
- Einbettung, 12
- eindeutige
  - Lösung, 194
- Eindeutigkeit, 147
- Einheits
  - matrix, 199
  - normale, 175
  - normalenvektor, 175
  - vektor, 146, 164
  - wurzeln
    - komplexe, 73
- Einheitskreislinie, 65
- Einschließungskriterium, 95
- Einschränkung, 12
- Einselement, 13, 22
- Element
  - dominantes, 3
  - größtes, 11
  - inverses, 13, 139
    - einer Gruppe, 21
  - inverses der Addition, 60
  - inverses der Multiplikation, 60
  - invertierbares, 13
  - kleinstes, 11
  - neutrales, 3, 13, 60, 139
    - der Addition, 30
    - der Multiplikation, 30
    - einer Gruppe, 21
- elementare
  - Permutation, 224
  - Umformungen eines Vektorsystems, 155
- Elementarereignis, 48
- Elementarmatrix, 250
- Elementpaar
  - geordnetes, 4
- Eliminationsschritt, 231
- endliche
  - Menge, 183
- Endomorphismus, 15, 185
- Entfernung, 164
- entire-Funktion, 116
- Entwicklung
  - nach Zeilen, 241
  - nach Spalten, 240
- Entwicklungssatz
  - von Grassmann, 259
  - von Laplace, 240
- Epimorphismus, 15
- equilibriert, 235
- Ereignis, 48
  - algebra, 48
  - Elementar-, 48
  - sicheres, 48
  - unmögliches, 48
- Ergänzung
  - quadratische, 59
- Ergänzungs
  - raum, 156, 192
  - vektoren, 151
- Ergebnisraum, 48

- erweitertes Horner–Schema, 104
- Erweiterungskörper, 59
- Euklid, 19
- euklidische
  - Länge, 161
  - Metrik, 164
- Euklidische Ebene, 64
- euklidischer
  - Vektorraum, 165
- Euklidischer Divisionsalgorithmus, 19, 77
- Euklidischer Teilalgorithmus, 76
- Eulersche
  - Formel, 127
  - Zahl, 70, 94
- Exponentialfunktion
  - Funktionalgleichung, 126
  - komplexe, 69, 70, 127
  - Funktionalgleichung, 70
- Extremaleigenschaft, 223
- Faktoralgebra, 17
- Fakultät
  - Funktionalgleichung, 28
  - schlägt jede Potenz, 47
- Fehlerabschätzung, 120
- Fehlerquadrate, 223
- Ferro, S. Del, 81
- Fibonacci–Zahlen, 88
  - explizite Darstellung, 91
- Flächeninhalt
  - Parallelogramm, 247
- Folge, 88
  - $M$ –, 88
  - $\mathbf{K}$ –, 89
  - Cauchy, 97
  - Fibonacci–Zahlen, 88
  - Fundamental–, 97
  - konstante, 90
  - Null–, 95
- Folgen, 86
- Formel
  - Eulersche, 127
  - geometrische Summen–, 31
  - Stirlingsche, 28
- Formeln
  - Cardanische, 81
  - de Morgansche, 3
  - von Moivre, 72
- Fortsetzung, 12
- Fourier
  - Koeffizienten, 170
- Freiheitsgrade, 136
- Fundamental
  - matrix, 221
  - satz der Algebra, 81
- Fundamentalfolge, 97
- Funktion, 11
  - entire–, 116
  - komplexe Cosinus–, 127
  - komplexe Sinus–, 127
- Funktional
  - lineares, 187
- Funktionalgleichung
  - der Exponentialfunktion, 126
  - der Fakultät, 28
  - der komplexen Exponentialfunktion, 70
- Funktionsraum, 12, 139, 142
- ganze Zahlen, 5
- Gauss
  - Zahlenebene, 63
- Gauss, C.F., 31, 64, 81
- Gauss–
  - Algorithmus, 131
  - Normalgleichungen, 223
- Gauss–Algorithmus
  - Diagonalstrategie, 234
  - mit Spaltenpivotisierung, 234
  - numerische Behandlung, 231
  - ohne Pivotisierung, 232
  - relative Spaltenmaximumstrategie, 236
  - Spaltenmaximumstrategie, 235
  - vollständige Maximumstrategie, 235
- geometrische
  - Reihe, 108
  - Summenformel, 31
- geometrisches Mittel, 43
- geordnete Probe, 50, 51
- geordnetes Elementpaar, 4
- Gerade, 147, 157
- Gesetz
  - Assoziativ–, 3
  - Distributiv–, 3
  - Idempotenz–, 3
  - Kommutativ–, 3
- Gleichheit
  - von Spalten, 243
  - von Zeilen, 243

- Gleichungen
  - quadratische, 59
- Gleichungssystem
  - eindeutiger Typ TYP(I), 130
  - homogenes, 129
  - homogenes lineares, 148
  - inhomogenes, 129
  - inhomogenes lineares, 160
  - lineares, 128
  - mehrdeutiger Typ TYP(II), 130
  - Skalierung, 235
  - unlösbarer Typ TYP(III), 131
- Gradmaß, 65
- Gramsche
  - Matrix, 221
- Grassmannscher Entwicklungssatz, 259
- Grenzwert, 89
  - Rechenregeln, 94
- größter gemeinsamer Teiler, 18
- Gruppe, 20, 21
  - abelsche, 21, 139
  - nicht-kommutative, 185
- Gruppoid, 20
- Häufungspunkt, 99
- Halbgruppe, 20
  - symmetrische, 185
  - Transformations-, 185
- harmonische Reihe, 109
- Haupt
  - untermatrizen, 228
  - wert, 66
- Hauptsatz
  - über monotone Konvergenz, 93
- hermitesche
  - Matrizen, 216
  - Projektion, 221
- Heron, 86
- Heron-Verfahren, 86
- Hesse-Normalform (HNF), 261
  - einer Hyperebene, 174
- Hilbert, D., 29
- Hintereinanderausführung, 52, 184
- homogenes
  - Gleichungssystem, 129
- Homomorphismus, 15, 185
- Horner, W.G., 77
- Horner-Schema, 77
  - erweitertes, 104
  - vollständiges, 80
- Hülle
  - lineare, 146
- Hyperebene, 157
- Idempotenzgesetz, 3
- Identität, 12
  - Lagrangesche, 260
- Identitätssatz für Polynome, 82
- image, 189
- imaginäre Einheit, 60
- Implikation, 1
- implizite Deflation, 105
- Index
  - vertauschung
    - zyklische, 257
  - Spalten-, 142
  - Zeilen-, 142
- Indirekter Beweis, 1
- Induktion
  - Verankerung, 26
  - vollständige, 26
- induzierte
  - Norm, 164
- Infimum, 39
- inhomogenes
  - Gleichungssystem, 129
- injektiv, 193
- inneres
  - Produkt, 162
- Integritätsbereich, 23, 75
- Integritätsring, 23
- Intervalle, 35
- Inverse, 184
  - Links-, 184
  - Rechts-, 184
- inverses Element, 60
- Invertierbarkeit
  - von Matrizen, 206
- Involution, 204
- irrationale Zahlen, 8
- irreduzibel, 85
- isomorph, 15
- Isomorphismus, 15, 206
- Jacobi-Rotation, 220
- Kantenvektoren, 245
- Kern, 189
- Koeffizienten

- matrix, 187
- vergleich, 79
- Binomial-, 44
- der Linearkombination, 145
- Fourier-, 170
- Körper, 20, 24
  - algebraisch abgeschlossener, 83
  - der komplexen Zahlen, 60
  - der reellen Zahlen, 29
  - Erweiterungs-, 59
  - geordneter, 29
  - vollständig geordneter, 31
- Kofaktor, 251
- Kommutativgesetz, 3
- Komplement, 3
  - menge, 2
- komplexe
  - Cosinusfunktion, 127
  - Exponentialfunktion, 70, 127
  - Sinusfunktion, 127
  - Wurzeln, 72
  - Zahlen, 59
- komplexe Exponentialfunktion
  - Funktionalgleichung, 70
- komplexe Zahlen
  - Argument, 68
  - Betrag, 61
  - konjugiert, 61
  - Polardarstellung, 63, 68
  - Potenzen, 62
  - Quadratwurzeln, 63
- komplexes Polynom, 74
- Komponenten, 152
- Kompositum, 52, 184
- kongruent modulo, 18
- Kongruenzrelation, 15, 17, 66
- konjugiert, 200
  - komplexe Zahl, 61
  - Matrix, 213
- konstante Folge, 90
- konvergent, 89, 108
  - uneigentlich, 91
- konvergente Reihe, 109
- Konvergenz
  - bedingung
    - notwendige, 110
  - kriterien, 92
  - kriterium
    - von Cauchy, 96, 109
  - absolute, 111
  - bedingte, 111
  - Hauptsatz über monotone, 93
  - uneigentliche, 91
- Koordinatentransformation
  - zum Basiswechsel, 210
- Korrespondenz, 9, 11, 181
- Kreis
  - linie, 74
  - scheibe, 74
- Kreuzprodukt, 177, 257
- Kriterium
  - Divergenz-, 110
  - Einschließungs-, 95
  - Konvergenz- von Cauchy, 96
  - Majoranten-, 111
  - Minoranten-, 111
  - Quotienten- von D'Alembert, 114
  - von Leibniz, 117
  - von Raabe, 118
  - Wurzel- von Cauchy-Hadamard, 112
- Kronecker-Symbol, 168
- Länge
  - eines Vektors, 161
  - euklidische, 161
- Lagrange
  - Identität, 260
- Laplace
  - Wahrscheinlichkeit, 48
  - Entwicklungssatz von, 240
  - Experimente, 47
- Leibniz, G.W., 117
- Leibniz-Kriterium, 117
- Limes
  - inferior, 102
  - superior, 102
- linear
  - es Funktional, 187
  - abhängig, 148
  - unabhängig, 148
- Linear
  - faktor, 79
  - faktorzerlegung, 81
  - kombination, 145
- lineare
  - Hülle, 146
- lineares
  - Ausgleichsproblem, 223



- Gleichungssystem, 128
- Links
  - dreiecksmatrizen, 224
  - inverse, 184
  - system, 248
- Linkskongruenzrelation, 17
- Lösbarkeit
  - beständige, 195
  - lineares Gleichungssystem, 194
- Lösung
  - eindeutige, 194
  - triviale, 129
- Lösungs
  - gesamtheit, 195
    - des inhomogenen Gleichungssystems, 135
  - menge
    - homogenes LGS, 190
- Lösungsmenge, 182
- Lot
  - fußpunkt, 178, 262
  - vektor, 262
- LR-Zerlegung
  - einer Matrix, 226
- Maehly
  - Verfahren, 106
- Majorantenkriterium, 111
- Matrix
  - adjungierte, 213
  - Band-, 255
  - Basis-, 221
  - Diagonal-, 225
  - Elementar-, 250
  - Fundamental-, 221
  - Gramsche, 221
  - Invertierbarkeit, 206
  - konjugierte, 213
  - nilpotente, 199
  - quadratische, 194, 195
  - Rotations-, 220
  - transponierte, 213
- Matrizen
  - produkt
    - Multiplikationsregel, 197
    - Rechenregeln, 198
  - antihermitesche, 218
  - antisymmetrische, 218
  - diagonaldominante, 230
  - Dreiecks-, 224
  - Hauptunter-, 228
  - hermitesche, 216
  - orthogonale, 218
  - Permutations-, 224
  - positiv definite, 229
  - Streichungs-, 228
  - symmetrische, 216
  - unitäre, 218
  - Unter-, 228
    - zeilendominante, 230
- Matrizenprodukt, 197
- Maximum, 11
- Menge, 1
  - n, gleichmächtige, 183
  - abzählbare, 183
  - Differenz-, 2
  - Durchschnitts-, 2
  - endliche, 183
  - geordnete, 10
  - komplementäre, 2
  - Potenz-, 3
  - Quotienten-, 11
  - unendliche, 183
  - Vereinigungs-, 2
  - vollständig geordnete, 10
  - vollständige, 98
- Mengenalgebra, 14
- Mengenalgebra, 2, 3
- Mengenoperationen, 2
- Metrik, 38, 166
  - euklidische, 164
- Minimum, 11
- Minorantenkriterium, 111
- Mittel
  - arithmetisches, 43
  - geometrisches, 43
- Modul, 22
- modulo, 18
- Moivre
  - Formeln, 72
- Momentengleichung, 261
- Monomorphismus, 15
- monoton, 92
- Multiplikation
  - mit Skalaren, 139
- Multiplikationsregel
  - Matrizenprodukt, 197

- n-Tupel, 49
  - geordnetes, 49
- natürliche Zahlen, 5
  - Axiomensystem, 26
- negativ orientierte
  - Basen, 248
- neutrales Element, 3, 60
- Newton
  - Verfahren, 103
- nicht-kommutativ
  - Gruppe, 185
- nichtperiodischer Dezimalbruch, 8
- nichttriviale
  - Darstellung des Nullvektors, 148
- nilpotente
  - Matrix, 199
- Norm, 61
  - induzierte, 164
- Normalenvektor, 176
- Normalform
  - Hesse- (HNF), 261
  - Plücker- (PNF), 261
- Normalgleichungen
  - Gauss-, 223
- normierter
  - Vektorraum, 165
- notwendige Konvergenzbedingung, 110
- Null
  - folge, 95
  - matrix, 199
  - polynom, 74
  - raum, 189
  - stelle, 80
  - vektor, 139
  - vektorraum, 142
- Nullelement, 22
- Nullstelle
  - Ordnung der, 81
  - Vielfachheit der, 81
- Nullteiler, 23
- nullteilerfrei, 23
- Numerische Behandlung
  - Gauss-Algorithmus, 231
- obere Schranke, 39
- Operation
  - algebraische, 13
- Operationstafel, 17
- Ordnungsrelation, 10, 32
  - Rechenregeln, 32
- orientierter
  - Abstand, 175
- orientierter Vektorraum, 247
- orthogonal, 162, 167
- Orthogonal
  - basis, 167
  - projektion, 201
    - auf eine Hyperebene, 202
- orthogonale
  - Matrizen, 218
  - Projektion, 172, 180, 221
  - Richtung, 261
  - Zerlegung, 171
- Orthonormalisierungsverfahren, 168
- Ortsvektoren, 140
- Parallelfach, 245
- Parallelogramm
  - Flächeninhalt, 247
- Parallelotop, 245
  - 3-Parallelotop, 247
- Parameterdarstellung, 158
  - einer Ebene, 158
  - von Geraden, 158
- Partialsomme, 108
- Partition, 10
- Pascal, B., 45
- Pascalsches Dreieck, 45
- Peano, G., 26
- periodischer Dezimalbruch, 6
- Permutation, 51
  - elementare, 224
- Permutations
  - matrizen, 224
- Pfeile, 140
- Pivot
  - element, 232
  - wahl, 234
- Plücker-Normalform (PNF), 261
- Polardarstellung, 63, 68
- Polya, G., 56
- Polynom, 74
  - $n$ -ten Grades, 74
  - Nullstelle, 80
  - ring, 75
  - Identitätssatz, 82
  - irreduzibles, 85
  - komplexes, 74

- Null-, 74
- Prim-, 85
- reelles, 74
- teilbar, 81
- positiv definite
  - Matrizen, 229
- positiv orientierte
  - Basen, 248
- Potenz
  - menge, 3
  - einer Matrix, 199
  - Fakultät schlägt jede, 47
  - mit rationalen Exponenten, 42
- Potenzen, 31
  - Binom-, 44
  - komplexer Zahlen, 62
- Praehilbertraum, 165
- Primzahl, 24, 25
- Prisma, 247
- Probe
  - geordnete, 50, 51
  - ungeordnete, 51
- Produkt
  - (MP)-, 186
  - regel, 50
  - reihen, 123
  - äußeres, 257
  - Cartesisches, 4, 49
  - Cauchy-, 125
  - Definition, 28
  - dyadisches, 200
  - inneres, 162
  - Kreuz-, 177, 257
  - Matrix mit einem Vektor, 186
  - Spat-, 258
  - Vektor-, 177
- Projektion, 220
  - hermitesche, 221
  - kanonische, 16
  - orthogonale, 172, 180, 201, 221
  - Vektor auf Hyperebene, 180
- Prüfen auf lineare Unabhängigkeit, 149
- Punkt, 157
- quadratisch
  - Matrix, 194, 195
- quadratische
  - Ergänzung, 59
  - Gleichungen, 59

- Quadratwurzeln
  - komplexer Zahlen, 63
- Quantoren, 1
- Quotientenkriterium von D'Alembert, 114
- Quotientenmenge, 11
- Raabe, J.L., 118
- Raabe-Kriterium, 118
- Rang, 190
- range, 189
- rationale Zahlen, 6
- Realteil, 61
- Rechenregeln
  - der Ordnungsrelation, 32
  - für Determinanten, 242
  - für Grenzwerte, 94
  - für Vektoren, 139
  - Matrizenprodukt, 198
  - Tensorprodukt, 201
- Rechte-Hand-Regel, 248
- Rechts
  - dreiecksmatrizen, 224
  - inverse, 184
  - system, 153, 248, 259
- Rechtskongruenzrelation, 17
- reelle Zahlen, 1
  - Axiomensystem, 29
- Regel
  - Cramersche Regel, 249
  - Produkt-, 50
  - Rechte-Hand-Regel, 248
  - von Sarrus, 239
- Reihe, 108
  - alternierende, 117
  - binomische, 116
  - geometrische, 108
  - harmonische, 109
  - konvergente, 109
  - Produkt-, 123
  - Teleskop-, 109
- Reihen, 86
  - glieder, 108
- rekursive
  - Definition, 89
- Relation, 9
  - Äquivalenz-, 10
  - alternative, 9
  - antisymmetrische, 9
  - Kongruenz-, 17

- Ordnungs-, 10, 32
- reflexive, 9
- symmetrische, 9
- transitive, 9
- Repräsentanten, 141
- Restklasse, 18
- Restklassenkörper, 26
- Restklassenring, 23
- Richtung
  - orthogonale, 261
- Richtungsvektoren, 158
- Ring, 20, 22
  - assoziativ-kommutativer, 22
  - assoziativer, 22
    - mit Einselement, 22
  - Integritäts-, 23
  - Polynom-, 75
- Rotation
  - Jacobi-, 220
- Rotationsmatrix, 220
- Rückwärtseinsetzen
  - Verfahren des, 227
- Ruffini, P., 78
- Sarrus
  - Regel von, 239
- Satz
  - Austausch-, 151
  - Auswahlsatz von
    - Bolzano-Weierstrass, 100
  - Basisergänzungs-, 154
  - Binomischer Lehr-, 45
  - des Archimedes, 41
  - Entwicklungssatz von Grassmann, 259
  - Entwicklungssatz von Laplace, 240
  - Fundamentalsatz der Algebra, 81
  - Hauptsatz über monotone Konvergenz, 93
  - Identitätssatz für Polynome, 82
  - Wurzelsätze von Vieta, 83
- Scherung, 246
- Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren, 168
- Schnittgerade zweier Ebenen, 179
- Schnittmannigfaltigkeit, 160
- Schnittmenge
  - Gerade und Ebene, 263
  - zweier Ebenen, 263
  - zweier Geraden, 263
- Schranke
  - obere, 39, 92
  - untere, 39, 92
- Semifakultät, 29
- sicheres Ereignis, 48
- Signum, 36
- Skalaren
  - vektor, 138
  - vektorraum, 139
- skalares
  - Vielfaches, 139, 145
- Skalierung
  - eines Gleichungssystems, 235
- Spalten
  - ausräumen, 132
  - index, 142
  - maximumstrategie, 235
    - relative, 236
  - pivotisierung, 234
  - vektor, 138
  - vertauschung, 242
  - zahl, 142
- Spann, 146
- Spat, 245
- Spatprodukt, 258
- Spiegelraum, 204
- Spiegelung, 204
  - an einer Geraden, 204
  - an einer Hyperebene, 205
- Stärketabelle, 96
- Staffelsystem, 131
- Standard
  - basis, 152
  - orientierung, 248
  - skalarprodukt, 162, 164
- Stirlingsche Formel, 28
- Streichungsmatrizen, 228
- Stufenform, 131
- sukzessive Deflation, 105
- Summationsindex, 27
- Summe
  - Definition, 27
  - zweier Vektoren, 138
- Summen
  - formel,
    - geometrische, 31
- Supremum, 39
- Supremumsprinzip, 40
- surjektiv, 193

- symmetrische
  - Matrizen, 216
- Tartaglia, N., 81
- Taylor, B., 79
- Taylor–Entwicklung, 80
- Teileralgorithmus
  - Euklidischer, 76
- teilerfremd, 19, 23
- Teilfolge, 99
- Teleskop
  - reihe, 109
  - summe, 99
- Tensorprodukt, 200
  - Hintereinanderausführung, 205
  - Rechenregeln, 201
- Tertium non datur, 1
- Tetraeder, 247
- Transformationsmatrix, 210
- transponiert, 200
  - Matrix, 213
- transponierter
  - Vektor, 138
- Transposition, 200
- triviale
  - Darstellung des Nullvektors, 148
  - Lösung, 129
- Tupel, 49
  
- Umformungsverfahren, 33
- Umkehrabbildung, 12, 182
- Umordnung, 123
- uneigentliche
  - Konvergenz, 91
- unendlich
  - dimensional, 153
- unendliche
  - Menge, 183
- ungeordnete Probe, 51
- Ungleichung
  - Bernoulli–, 33
  - Cauchy–Schwarzsche, 34
  - Dreiecks–, 36, 37
- unitäre
  - Matrizen, 218
- unmögliches Ereignis, 48
- unorientierter
  - Winkel, 167
- Unteralgebra, 14
- untere Schranke, 39
- Untermannigfaltigkeit
  - lineare, 157
- Untermatrizen, 228
- Unterraum
  - affiner, 195
  - aufgespannter, 146
- Urbild, 11
- Urbildmenge, 12, 182
- Urnenmodell, 56
  
- Vektor
  - produkt, 177
    - Anwendungen, 261
    - Eigenschaften, 258
  - raum, 140, 187
    - euklidischer, 165
    - komplexer, 140
    - normierter, 165
    - orientierter, 247
    - reeller, 140
  - system, 150
  - adjungierter, 200
  - Basis–, 191
  - Betrag, 161
  - Einheits–, 164
  - Kanten–, 245
  - Länge, 161
  - Lot–, 262
  - Normalen–, 176
  - transponierter, 138
- Vektoren, 128
  - Orts–, 140
  - Rechenregeln, 139
  - Richtungs–, 158
- Vereinigungsmenge, 2
- Vererbung, 26
- Verfahren
  - des Rückwärtseinsetzens, 227
  - des Vorwärtseinsetzens, 227
  - von Cholesky, 253
  - von Heron, 86
  - von Maehly, 106
  - von Newton, 103
- Verknüpfung, 13, 184
  - assoziative, 13
  - distributive, 14
  - kommutative, 13
- Verkürzung, 150

Verlängerung, 150  
 Vertauschung  
     von Spalten, 242  
     von Zeilen, 242  
 Vielfaches  
     skalares, 139, 145  
 Vielfachheit der Nullstelle, 81  
 Vieta, F., 83  
 Vietasche Wurzelsätze, 83  
 Vollrang, 196  
 vollständig  
     Induktion, 26  
 vollständige  
     Menge, 98  
 vollständige Maximumstrategie, 235  
 vollständiges Horner-Schema, 80  
 Vollständigkeitsaxiom, 38  
 Volumina  
     Anwendungen von Determinanten, 245  
     nicht orientierte, 246  
     orientierte, 246  
 Vorwärtseinsetzen  
     Verfahren des, 227  
 Vorzeichenparkett, 241  
  
 Wahrscheinlichkeitsverteilung, 48  
 Weierstrass  
     Auswahlsatz von, 100  
 Weierstrass, K., 100  
 Winkel  
     -funktion, 66  
     unorientierter, 167  
 Winkelmessung, 65  
 Würfel  
     n-dimensionaler, 245  
 Wurzel  
     -kriterium von Cauchy-Hadamard, 112  
     -ziehen  
         babylonisches, 86  
 Wurzeln, 42  
     komplexe, 72  
     komplexe Einheits-, 73  
  
 Zahl  
     Eulersche, 70  
     zusammengesetzte, 23, 24  
 Zahlen  
     -ebene  
         Gauss, 63  
     -folge, 89  
     -gerade, 5  
     Fibonacci-, 88  
     ganze, 5  
     irrationale, 8  
     komplexe, 59  
         konjugiert, 61  
         Polardarstellung, 63, 68  
         Potenzen, 62  
         Quadratwurzeln, 63  
     natürliche, 5  
         Axiomensystem, 26  
     rationale, 6  
     reelle, 1  
         Axiomensystem, 29  
 Zeilen  
     -index, 142  
     -vertauschung, 242  
     -zahl, 142  
 zeilendominant, 230  
 Zerlegung  
     direkte, 145  
     orthogonale, 171  
 Zufallsexperimente, 48  
 zyklisch  
     Indexvertauschung, 257