Beispiel zur Stabilität

- *Betrachte die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = v(x(t)) = -k\,x(t) \qquad \text{mit } k > 0$$

- *Behauptung:* Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Prüfe:*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k \;\; e^{-kt} = -k\,x(t)$$

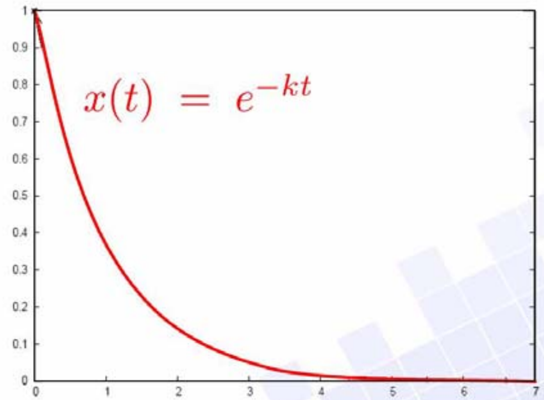
Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

$$x(t) = e^{-kt}$$



Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Explizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_i)$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \tau k\, x_0 \\ &= (1 - \tau k) x_0 \\ x_2 &= x_1 - \tau k x_1 \\ &= (1 - \tau k) x_1 = (1 - \tau k)^2 x_0 \\ x_n &= x_{n-1} - \tau k x_{n-1} = (1 - \tau k)^n x_0 \end{aligned}$$

Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

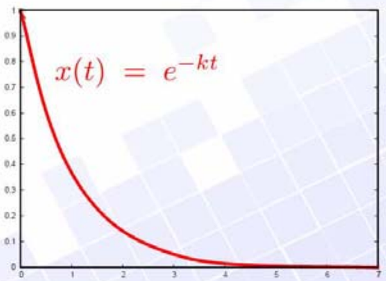
$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Explizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_i)$

$$\boxed{x_n = (1 - \tau k)^n x_0}$$

- *Vergleich mit analyt. Lösung:*
  Start: $x(0) = x_0 = 1$
  Für großes n muß gelten: $x_n \to 0$
  Dazu muß gelten:

$$\|1 - \tau k\| < 1$$



Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\, x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Explizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_i)$

$$\boxed{x_n = (1 - \tau k)^n x_0}$$

- *Vergleich mit analyt. Lösung:*

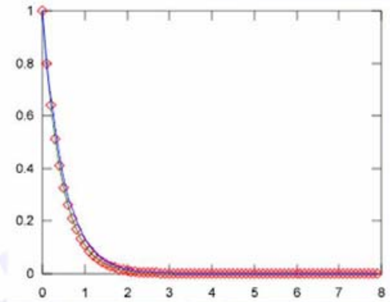
Start: $x(0) = x_0 = 1$

Für großes n muß gelten: $x_n \to 0$

Dazu muß gelten:

$$-2 < -\tau k < 0$$

$$\boxed{0 \leq \tau \leq \frac{2}{k}}$$



Schrittweite klein genug

Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\, x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Explizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_i)$

$$\boxed{x_n = (1 - \tau k)^n x_0}$$

- *Vergleich mit analyt. Lösung:*

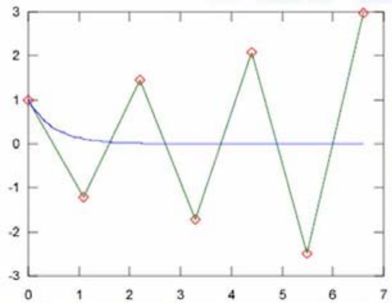
Start: $x(0) = x_0 = 1$

Für großes n muß gelten: $x_n \to 0$

Dazu muß gelten:

$$-2 < -\tau k < 0$$

$$\boxed{0 \leq \tau \leq \frac{2}{k}}$$



Schrittweite zu groß

Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\, x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Implizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_{i+1})$

$$x_1(1 + \tau k) = x_0$$

$$x_1 = \frac{1}{(1+\tau k)}\, x_0$$

$$x_2 = \frac{1}{(1+\tau k)}\, x_1 = \left(\frac{1}{(1+\tau k)}\right)^2 x_0$$

$$x_n = \frac{1}{(1+\tau k)}\, x_{n-1} = \left(\frac{1}{(1+\tau k)}\right)^n x_0$$

Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\, x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Implizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_{i+1})$

$$\boxed{x_n = \left(\frac{1}{(1+\tau k)}\right)^n x_0}$$

- *Vergleich mit analyt. Lösung:*

Start: $x(0) = x_0 = 1$

Für großes n muß gelten: $x_n \to 0$

Dazu muß gelten:

$$\left\| \frac{1}{1+\tau k} \right\| < 1$$

erfüllt für alle $\boxed{\tau > 0}$