Filteroperationen Triangulierung

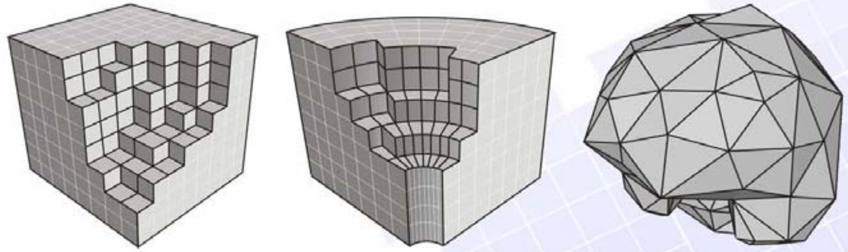
Christof Rezk-Salama

Visualisierung WS 04/05, 26.10.2004

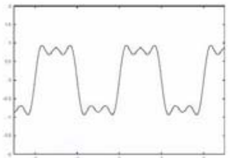
computergraphik und multimedia systeme
universität siegen

Review: Letzte Stunde

- **Gitterstrukturen in 2D und 3D**
  - uniforme Gitter
  - rectilineare Gitter
  - curvilineare Gitter
  - unstrukturierte Gitter



Review: Letzte Stunde

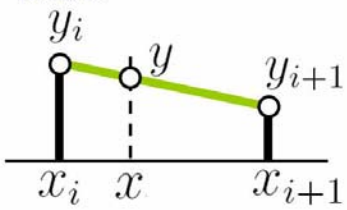


- **Abtasttheorem**
  - Kontinuierliche Signale lassen sich in harmonische Schwingungen zerlegen (Frequenzspektrum)
  - Bandbegrenzte Signale lassen sich aus diskreten Abtastwerten exakt rekonstruieren
  - Exakte Rekonstruktion erfolgt mit dem Sinc-Filter
  - Unterabtastung führt zu ***Aliasing***-Effekten

Review: Letzte Stunde

- **Differenzieren auf Gittern**
  - Gradientenvektor
    - zeigt in Richtung des größten Anstiegs
    - steht senkrecht auf den Isolinien (2D) bzw Isoflächen (3D)
  - Differenzieren auf Gittern
    - Curve/Surface Fitting
    - Finite Differenzen
      - Vorwärts, Rückwärts,
      - Zentrale Differenzen

Review: Lineare Interpolation

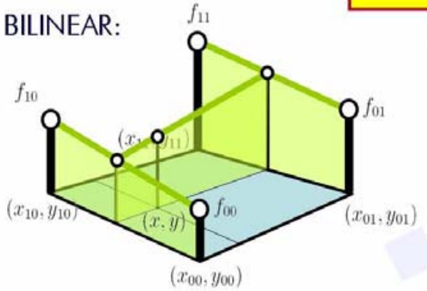


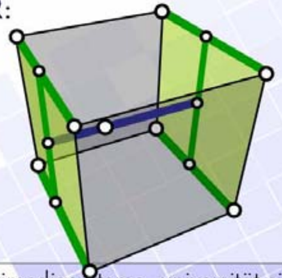
Lineares ***Blenden,***

$$f(x) = \alpha\, y_{i+1} + (1-\alpha) y_i$$

mit

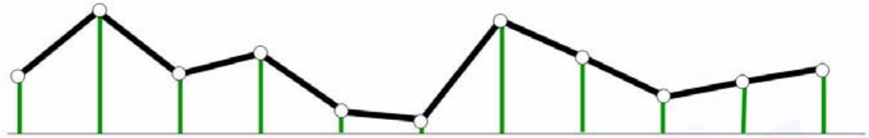
$$\alpha = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$



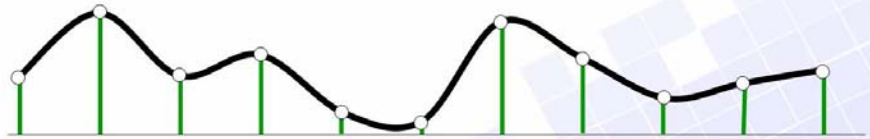


Glatte Interpolation

- (Stückweise) Lineare Interpolation ist C_0*-stetig*

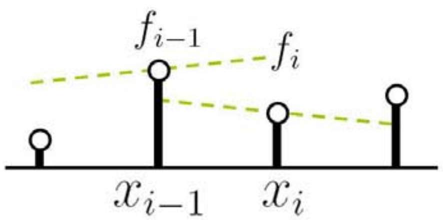


- Wie bekomme ich eine „glatte" Interpolation (C_1*-stetig*)?



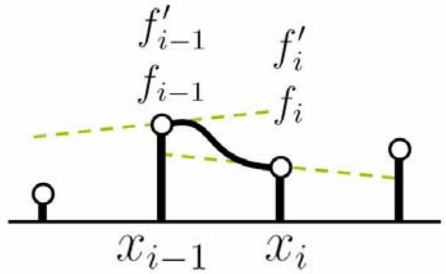
- Lösung: z.B. stückweise kubische Interpolation

Catmull-Rom-Interpolation



1. Bestimme die Ableitungen durch zentrale Differenzen

Catmull-Rom-Interpolation



1. Bestimme die Ableitungen f_i durch zentrale Differenzen

2. Bestimme eine (lokale) kubische Funktion, die sowohl die Funktionswerte f_i als auch die Ableitungen f'_i interpoliert

⇒ **Hermite-Interpolation**

Hermite Interpolation

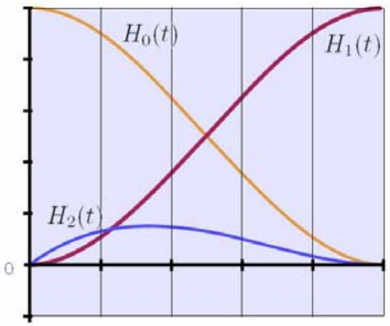
Gegeben: $f_0,\ f_1,\ f_0'$ und f_1'.

Gesucht: Polynom 3.Grades $f(t)$, sodaß gilt

$\boxed{f(0) = f_0}$ $\boxed{f(1) = f_1}$ $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} f(0) = f_0'}$ $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} f(1) = f_1'}$

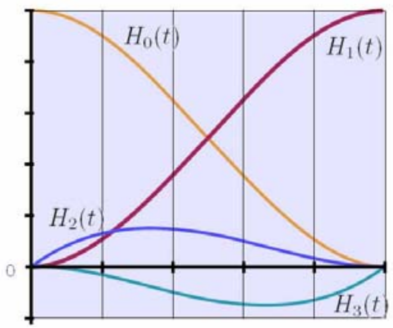
	$f(0)$	$f(1)$	$f'(0)$	$f'(1)$
$H_0(t) = (1-t)^2(2t+1)$	1	0	0	0
$H_1(t) = t^2(3-2t)$	0	1	0	0
$H_2(t) = -t^2(1-t)$	0	0	1	0
$H_3(t) = t(1-t)^2$	0	0	0	1

Hermite Interpolation



	$f(0)$	$f(1)$	$f'(0)$	$f'(1)$
$H_0(t) = (1-t)^2(2t+1)$	1	0	0	0
$H_1(t) = t^2(3-2t)$	0	1	0	0
$H_2(t) = -t^2(1-t)$	0	0	1	0
$H_3(t) = t(1-t)^2$	0	0	0	1

Hermite Interpolation



$f(0)$	$f(1)$	$f'(0)$	$f'(1)$

Das gesuchte Polynom zur lokalen Interpolation bei gegebenem $f_0,\ f_1,\ f_0'$ und f_1' ist:

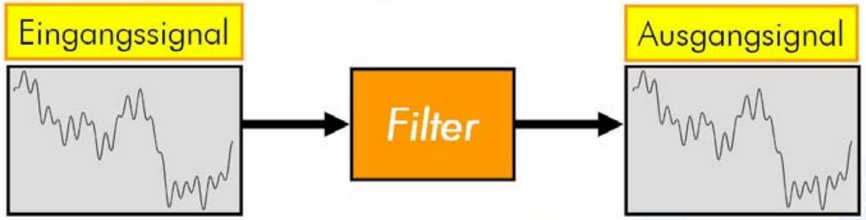
$$f(t) = f_0\, H_0(t) \;+\; f_1\, H_1(t) \;+\; f_0'\, H_2(t) \;+\; f_1'\, H_3(t)$$

Zusammenfassung Interpolation

- **Lokale Interpolationsverfahren**
  - linear, bilinear, trilinear in kartesischen Koordinaten
  - linear in baryzentrischen Koordinaten (Schwerpunktskoordinaten)
    - Dreieck, Tetraeder, Verallgemeinerbar auf beliebige n-Simplices
  - *Catmull-Rom Interpolation*
    - C1-stetig
- **Was ich verschwiegen habe:**
  - Globale Interpolationsverfahren (z.B. B-Splines) ➜ Computergraphik II

Lineare Filter

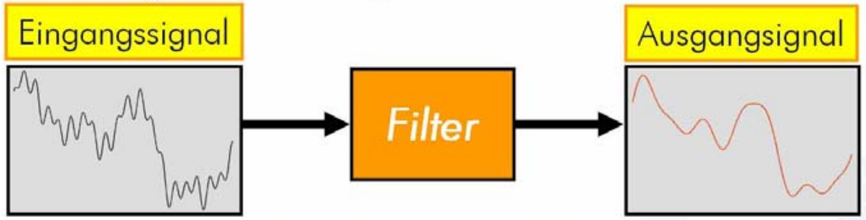
Aus der Signalverarbeitung:



Ein linearer Filter schwächt bestimmte Frequenzen ab und läßt andere passieren.

Lineare Filter

Aus der Signalverarbeitung:

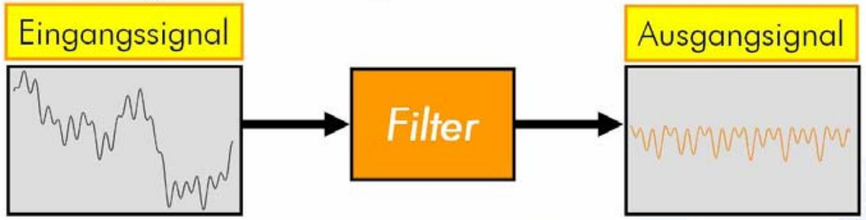


Ein linearer Filter schwächt bestimmte Frequenzen ab und läßt andere passieren.

Tiefpass-Filter: läßt nur niedrige Frequenzen passieren

Lineare Filter

Aus der Signalverarbeitung:



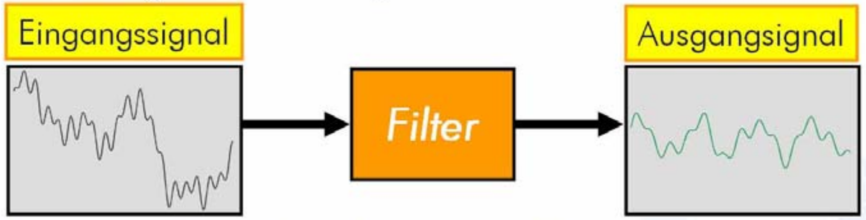
Ein linearer Filter schwächt bestimmte Frequenzen ab und läßt andere passieren.

Tiefpass-Filter: läßt nur niedrige Frequenzen passieren

Hochpass-Filter: läßt nur hohe Frequenzen passieren

Lineare Filter

Aus der Signalverarbeitung:



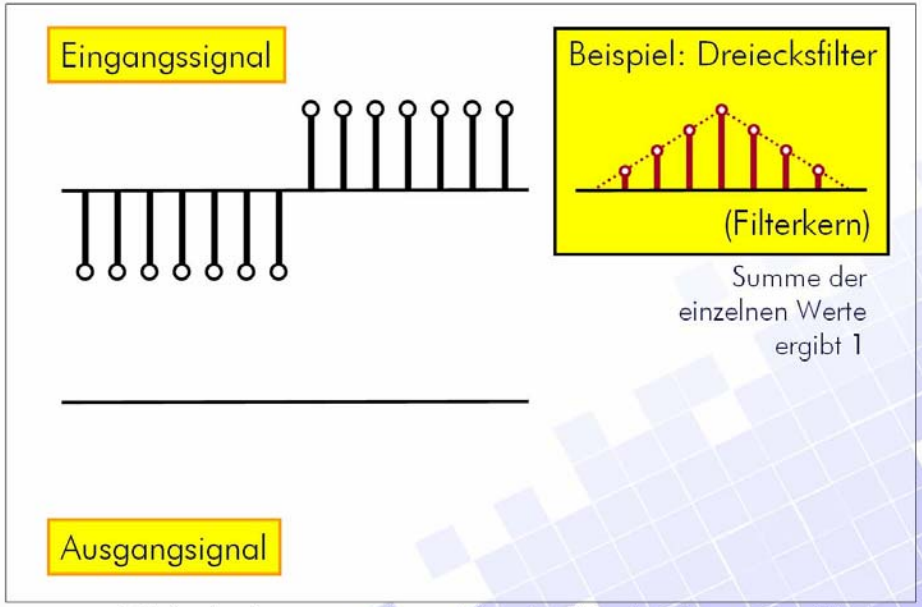
Ein linearer Filter schwächt bestimmte Frequenzen ab und läßt andere passieren.

Tiefpass-Filter: läßt nur niedrige Frequenzen passieren

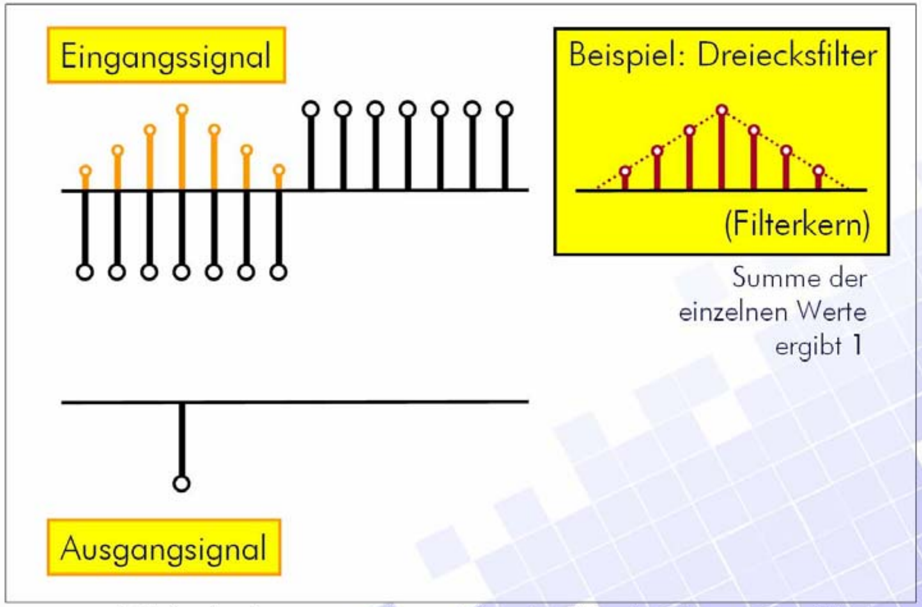
Hochpass-Filter: läßt nur hohe Frequenzen passieren

Bandpass-Filter: läßt nur einen bestimmten Frequenz-*bereich* durch.

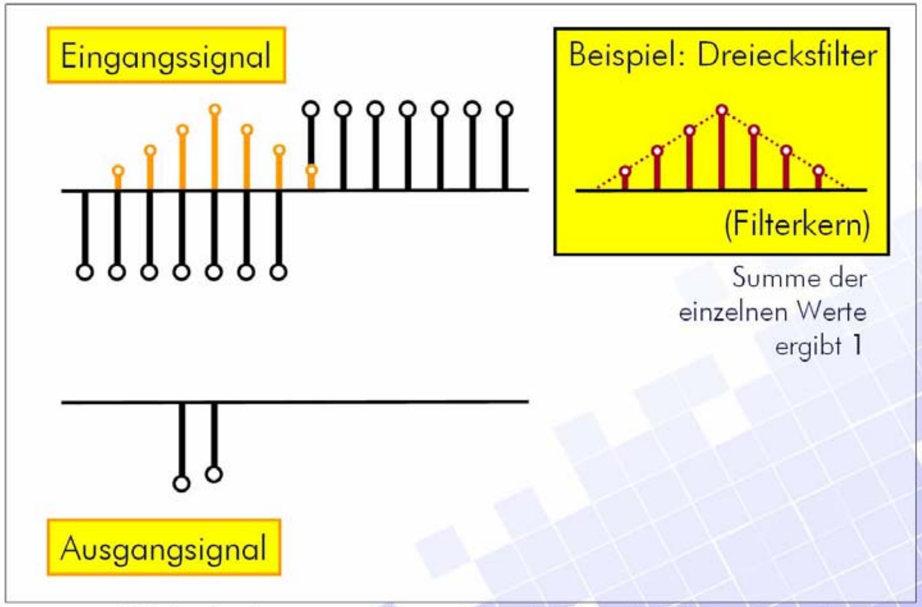
Lineare Filter



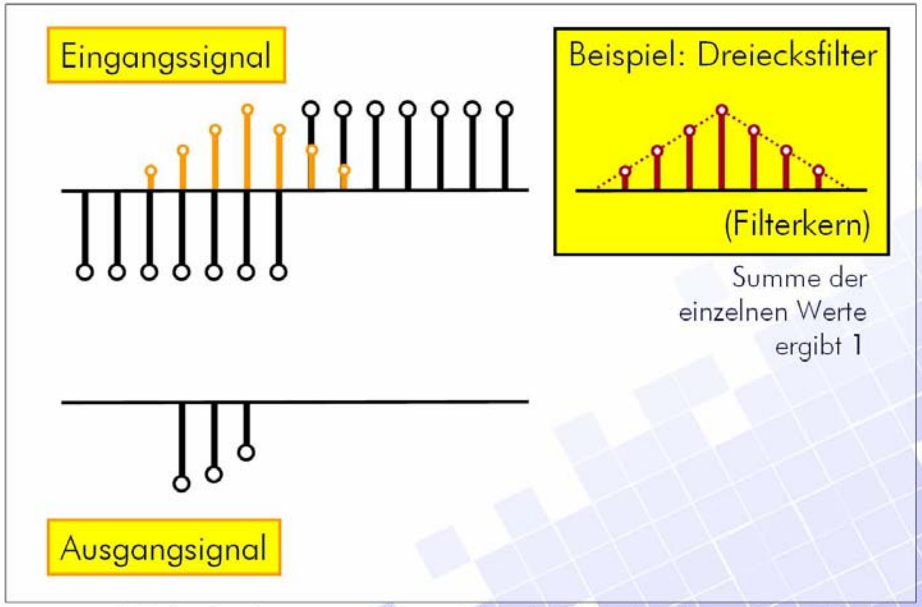
Lineare Filter



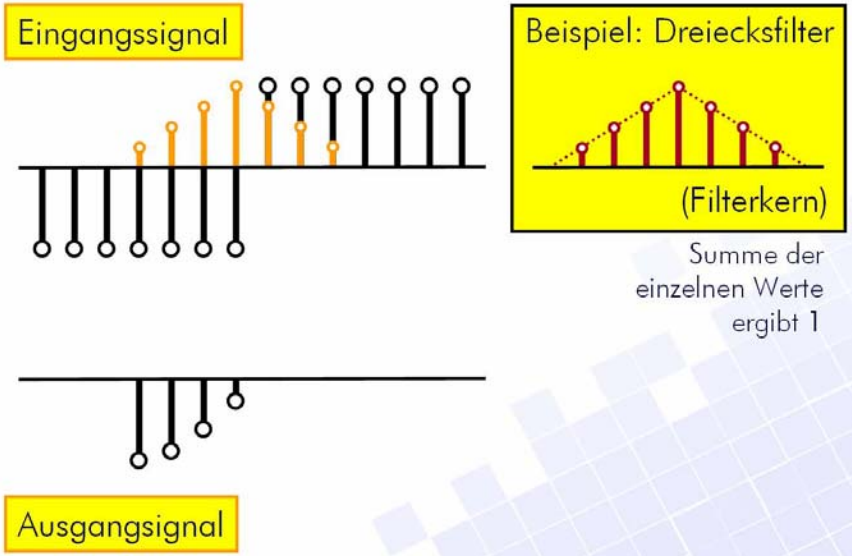
Lineare Filter



Lineare Filter

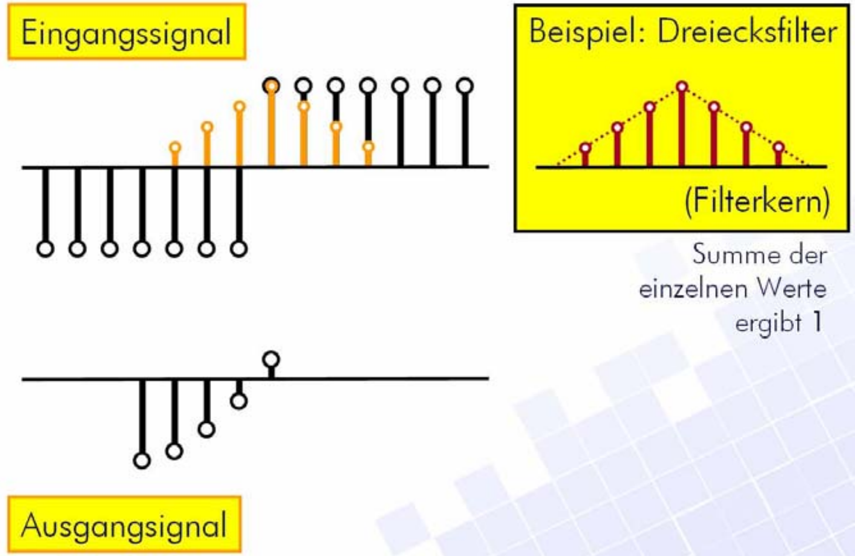


Lineare Filter



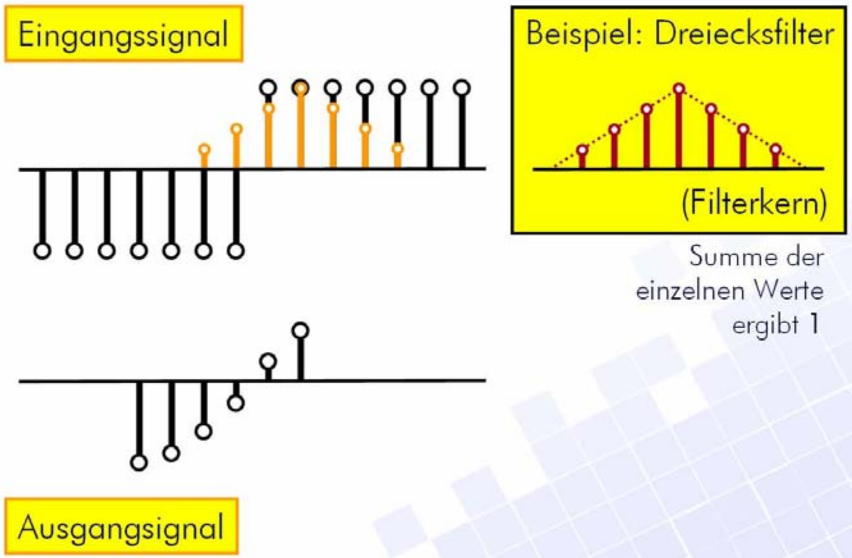
Summe der einzelnen Werte ergibt 1

Lineare Filter



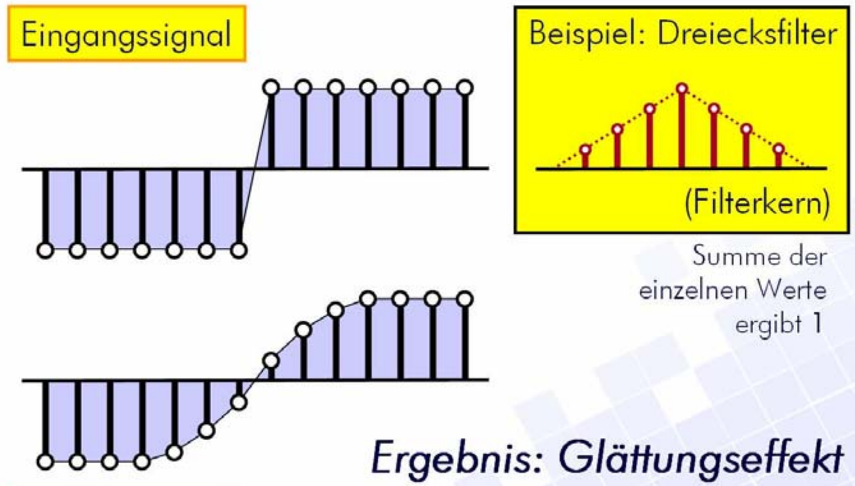
Summe der einzelnen Werte ergibt 1

Lineare Filter



Summe der einzelnen Werte ergibt 1

Lineare Filter



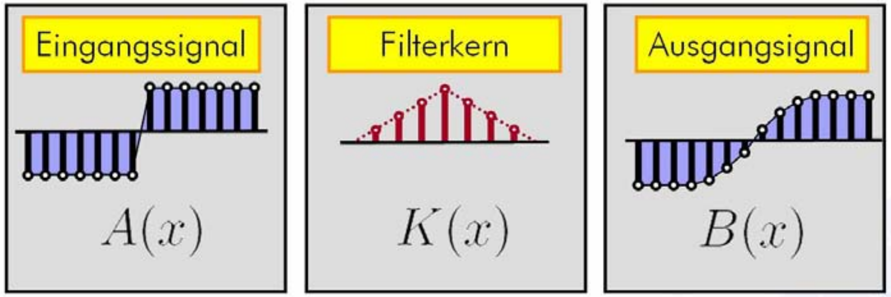
Summe der einzelnen Werte ergibt 1

Ergebnis: Glättungseffekt

Es gibt unterschiedliche Filterkerne mit unterschiedlichen Eigenschaften

Ausgangssignal

Lineare Filter



Faltung (Convolution)

$$B(x) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{\infty} K(i)A(x-i) \;=\; K * A$$

Lineare Filter

Faltung (Convolution)

$$B(x) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{\infty} K(i)A(x-i) \;=\; K * A$$

Rechenregeln für die Faltung:

Kommutativgesetz:

$$(A * B) = (B * A)$$

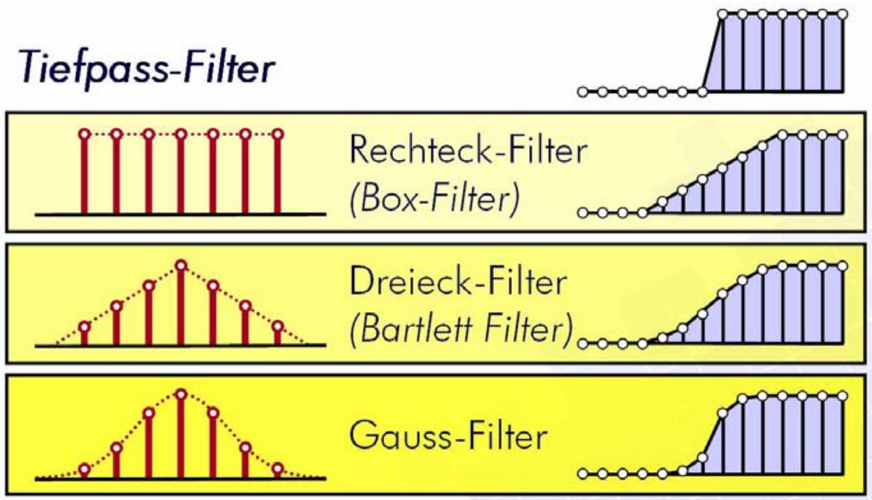
Assoziativgesetz:

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

Glättungsfilter

Zweck: Glätten von scharfen Kanten, Rauschunterdrückung

Tiefpass-Filter



Kantenfilter

Zweck: Erkennen von Kanten *Hochpass-Filter*

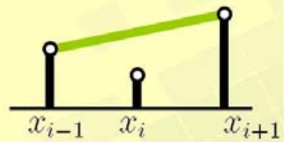
Kantendetektion:

$|f'(x)| = \max$

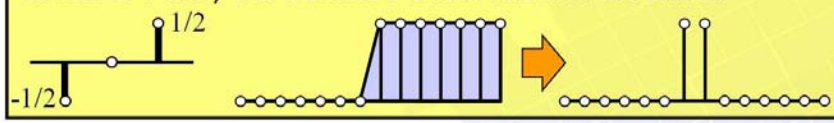
$\Rightarrow$ Kante in $f(x)$

Zentrale Differenzen:

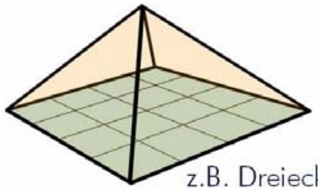
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$



Linearer Filter, der zentrale Differenzen berechnet:



Lineare Filter in 2D



z.B. Dreiecksfilter

Eingangssignal	$A(x,y)$
Filterkern	$K(x,y)$
Ausgangssignal	$B(x,y)$

2D Faltung:

$$B(x,y) = K * A = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} K(i,j)A(x-i, y-j)$$

Faltung in 3D und n-dim. Raum analog

Separierbare Filter

- n-dimensionale lineare Filter, die sich durch Hintereinanderschalten mehrerer 1D-Filter berechnen lassen,
- d.h. lineare Filter, die sich als Tensorprodukt darstellen lassen:

$$K(x,y) = K_1(x) * K_2(y)$$

Beispiel: 2D Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

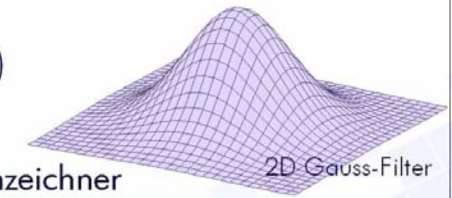
Beispiel: Sobel

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2D Glättungsfilter

Tensorprodukt der 1D Varianten:

- Boxfilter
- Dreiecksfilter (Pyramide)
- Gauss-Filter



2D Gauss-Filter

Beispiel Bildbearbeitung: Weichzeichner

Original

Gauss Filter, 5x5

Gauss-Filter 9x9

Zusammenfassung

Lineare Filter:

- Filterkern wird mit Signal ***gefaltet***
- Linearer Filter entfernen bestimmte Frequenzen aus dem Signal
- Glättungsfilter:
  - Box-, Dreieck-, Gauss-Filter
  - Tiefpassfilter: hohe Frequenzen werden entfernt
- Kantenfilter:
  - Hochpass-Filter: niedrige Frequenzen werden abgeschwächt

Nicht-Lineare Filter

Lineare Filter berechnen den Wert des Ausgangssignals als *Linearkombination* der Werte des Eingangssignals

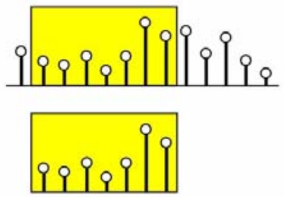
$$y_i = f(x_{i-k}, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+k}) = \sum_{j=i-k}^{i+k} a_j \, x_j$$

Nicht-Lineare Filter

Lineare Filter berechnen den Wert des Ausgangssignals als *Linearkombination* der Werte des Eingangssignals

- *Nicht-lineare Filter* verwenden hier beliebige nicht-lineare Funktionen $f(x_{i-k}, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+k})$

Beispiel: *Der Median-Filter* (Rangordnungsoperation)



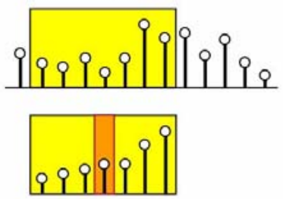
1. Wähle alle Samples innerhalb des Filterkerns

Nicht-Lineare Filter

Lineare Filter berechnen den Wert des Ausgangssignals als *Linearkombination* der Werte des Eingangssignals

- *Nicht-lineare Filter* verwenden hier beliebige nicht-lineare Funktionen $f(x_{i-k}, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+k})$

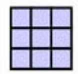
Beispiel: *Der Median-Filter* (Rangordnungsoperation)



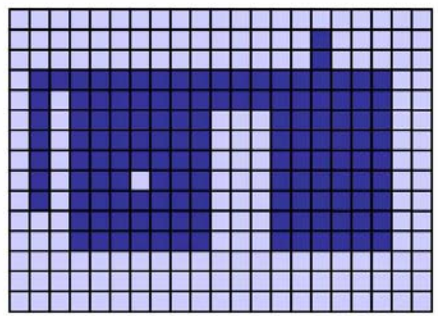
1. Wähle alle Samples innerhalb des Filterkerns
2. *Sortiere* alle Samples nach ihrem Wert
3. Wähle das *mittlere* Sample als Ausgangswert

Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren* für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



=0 (Hintergrund)

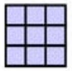
=1 (Objekt)

Dilatation:
„Setze jeden 0-Pixel, in dessen Nachbarschaft sich ein 1-Pixel befindet auf 1"

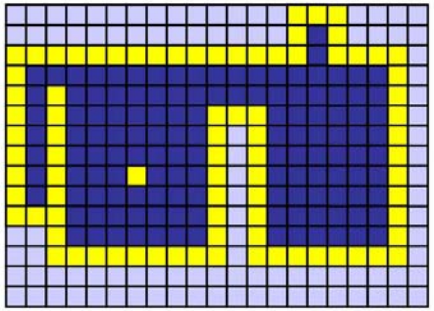
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Dilatation:

„Setze jeden 0-Pixel, in dessen Nachbarschaft sich ein 1-Pixel befindet auf 1"

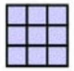
=0 (Hintergrund)

=1 (Objekt)

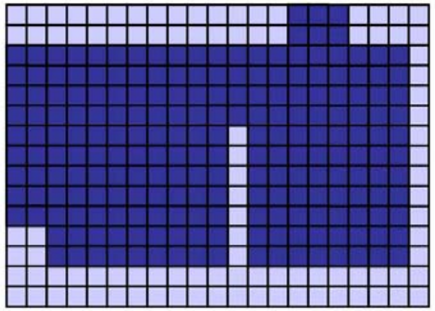
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Dilatation:

„Setze jeden 0-Pixel, in dessen Nachbarschaft sich ein 1-Pixel befindet auf 1"

Dilatation erweitert den Rand des „Objekts"

$$A \oplus K$$

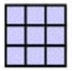
=0 (Hintergrund)

=1 (Objekt)

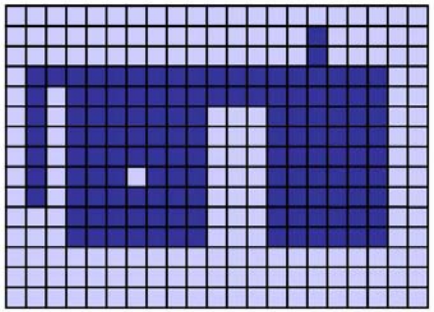
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Erosion:

Setze jeden 1-Pixel, in dessen Nachbarschaft sich ein 0-Pixel befindet auf 0

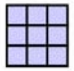
=0 (Hintergrund)

=1 (Objekt)

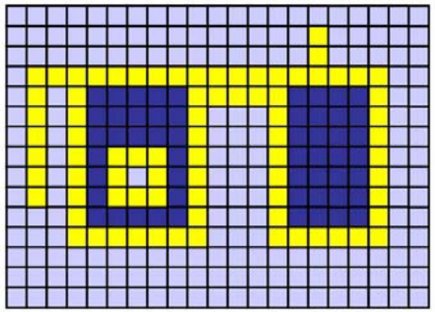
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Erosion:

Setze jeden 1-Pixel, in dessen Nachbarschaft sich ein 0-Pixel befindet auf 0

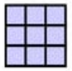
=0 (Hintergrund)

=1 (Objekt)

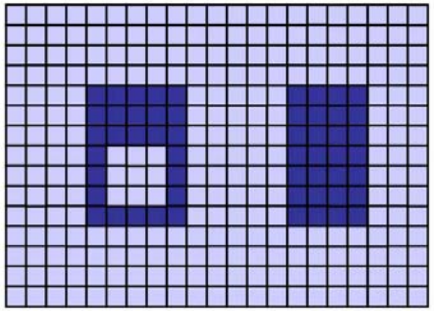
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

  für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Erosion:
Setze jeden 1-Pixel, in dessen Nachbarschaft sich ein 0-Pixel befindet auf 0

Erosion verringert den Rand des „Objekts"

$$A \ominus K$$

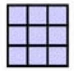
=0 (Hintergrund)

=1 (Objekt)

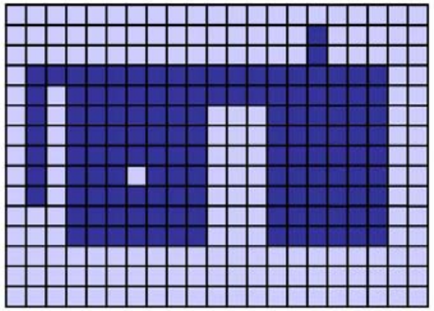
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

  für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Opening (Öffnung):
Hintereinanderschaltung von
Erosion und *Dilatation*

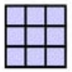
=0 (Hintergrund)

=1 (Objekt)

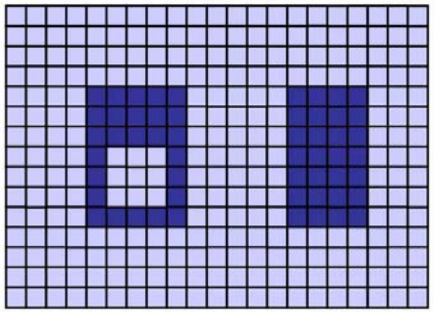
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

  für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Opening (Öffnung):
Hintereinanderschaltung von
Erosion und *Dilatation*

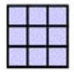
=0 (Hintergrund)

=1 (Objekt)

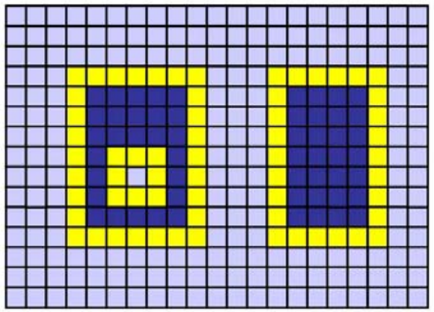
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

  für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Opening (Öffnung):
Hintereinanderschaltung von
Erosion und *Dilatation*

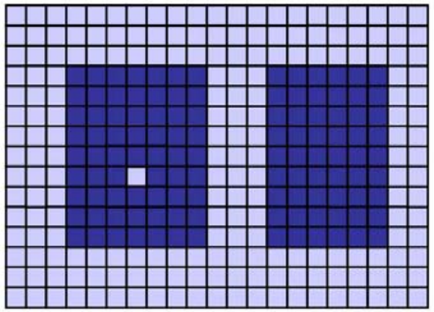
=0 (Hintergrund)

=1 (Objekt)

Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*
  für binäre Daten (0,1)-Werte

3x3-Filterkern K



Opening (Öffnung):
Hintereinanderschaltung von *Erosion* und *Dilatation*

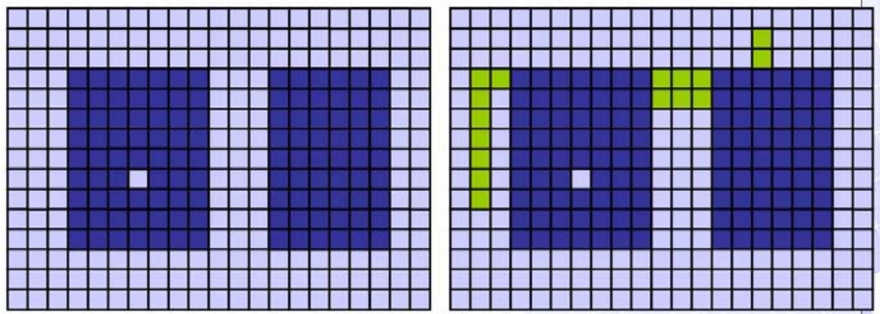
=0 (Hintergrund)
=1 (Objekt)

$$A \bigcirc K = (A \ominus K) \oplus K$$

Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*
  für binäre Daten (0,1)-Werte

3x3-Filterkern K



Vergleich mit Original

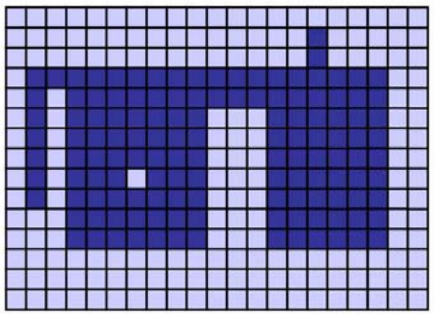
=0 (Hintergrund)
=1 (Objekt)

$$A \bigcirc K = (A \ominus K) \oplus K$$

Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*
  für binäre Daten (0,1)-Werte

3x3-Filterkern K



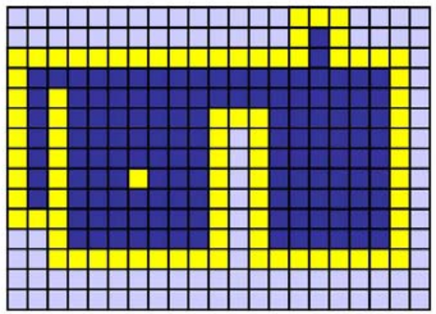
Closing (Schließung):
Hintereinanderschaltung von *Dilatation* und *Erosion*

=0 (Hintergrund)
=1 (Objekt)

Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*
  für binäre Daten (0,1)-Werte

3x3-Filterkern K



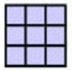
Closing (Schließung):
Hintereinanderschaltung von *Dilatation* und *Erosion*

=0 (Hintergrund)
=1 (Objekt)

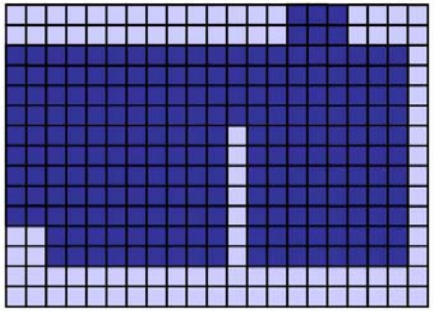
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

  für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Closing (Schließung):
Hintereinanderschaltung von *Dilatation* und *Erosion*

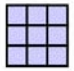
 =0 (Hintergrund)

 =1 (Objekt)

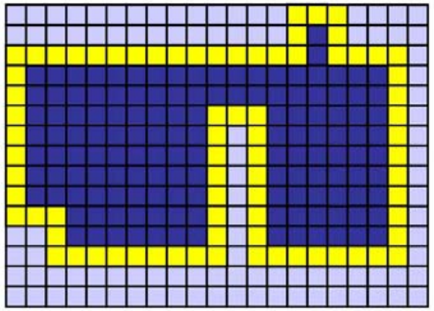
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

  für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Closing (Schließung):
Hintereinanderschaltung von *Dilatation* und *Erosion*

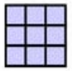
 =0 (Hintergrund)

 =1 (Objekt)

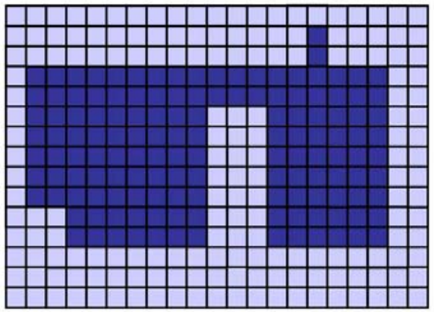
Nichtlineare Filter

- *Morphologische Operatoren*

  für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K



Closing (Schließung):
Hintereinanderschaltung von *Dilatation* und *Erosion*

 =0 (Hintergrund)

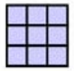
 =1 (Objekt)

$$A \circ K = (A \oplus K) \ominus K$$

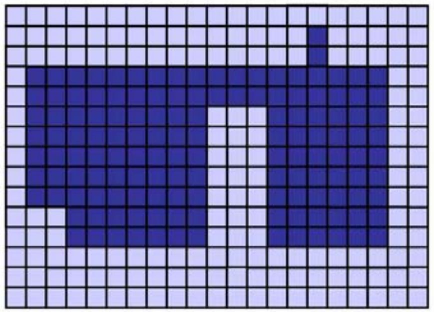
Nichtlineare Filter

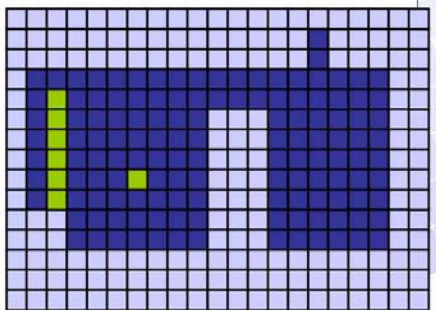
- *Morphologische Operatoren*

  für binäre Daten (0,1)-Werte



3x3-Filterkern K





Vergleich mit Original

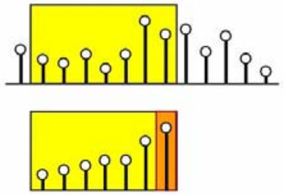
 =0 (Hintergrund)

 =1 (Objekt)

$$A \circ K = (A \oplus K) \ominus K$$

Nichtlineare Filter

- *Rangordnungsoperationen*



1. Wähle alle Samples innerhalb des Filterkerns
2. *Sortiere* alle Samples nach ihrem Wert

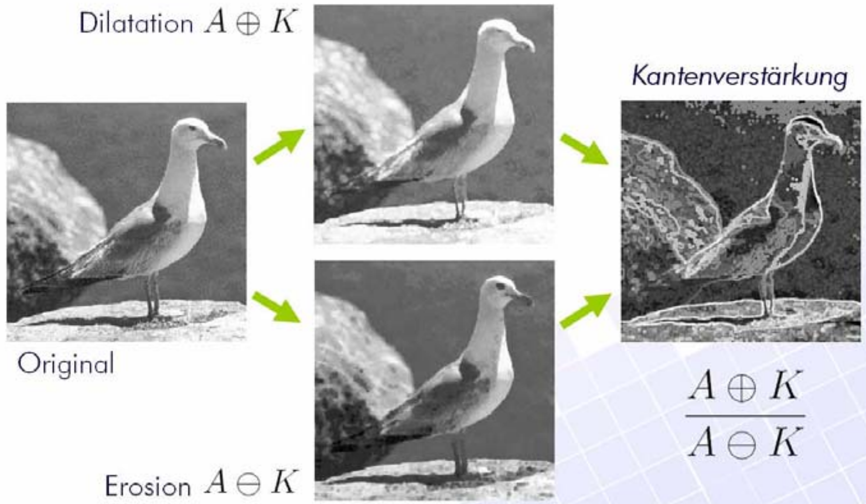
Median-Filter: Wähle mittleres Element.

Grauwert-Erosion: Wähle erstes Element.

Grauwert-Dilatation: Wähle letztes Element.

Nichtlineare Filter

- ***Morphologische Operationen*** für Grauwerte



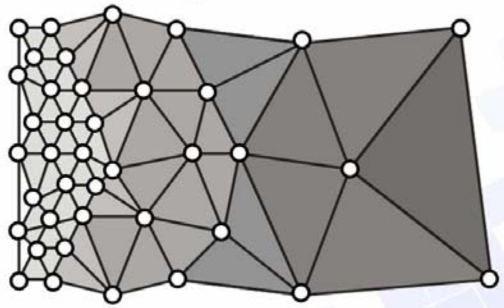
Zusammenfassung

Nicht-Lineare Filter:

- Keine ***Faltung,*** sondern beliebige nichtlineare Verknüpfung
- Rangordnungsoperationen:
  - Median-Filter:
    Rauschunterdrückung ohne Kantenglättung
  - Morphologische Operationen
    Dilatation, Erosion, Opening, Closing

Unstrukturierte Gitter

- Gegeben eine ***Punktewolke***, d.h. eine ungeordnete Menge an Vertices
- Wie sieht eine geeignete Gittersturktur dazu aus ?



Triangulierung

Triangulierung

Definition:

Eine ***Triangulierung*** einer Punktmenge

$$\mathbf{P} \;=\; \{P_i \mid i = 0, \dots N-1\} \;\subseteq\; \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$$

besteht aus

- den Punkten $\mathbf{P}$
- den Kanten
  $$\mathbf{E} \;\subseteq\; \{\overline{P_iP_j} \mid 0 \leq i,j < N,\, i \neq j\}$$
- und den Flächen (Dreiecken)
  $$\mathbf{F} \;\subseteq\; \{\triangle(P_iP_jP_k) \mid 0 \leq i,j,k < N,\, i \neq j\}$$

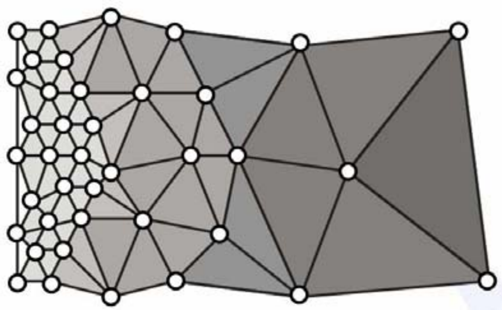
Triangulierung

Eine Triangulierung ist ***regulär***, wenn gilt

- jeder Vertex ist Endpunkt mindestens einer Kante
- jede Kante ist Teil mindestens eines Dreiecks
- Zwei Dreiecke schneiden sich $\left\{\begin{array}{ll}\text{nicht} & \text{ODER}\\ \text{in einem Punkt} & \text{ODER}\\ \text{in einer Kante} & \end{array}\right.$

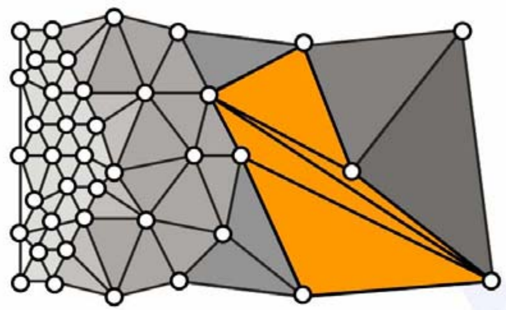
Triangulierungen

- Sind alle regulären Triangulierungen auch „gute" Triangulierungen?



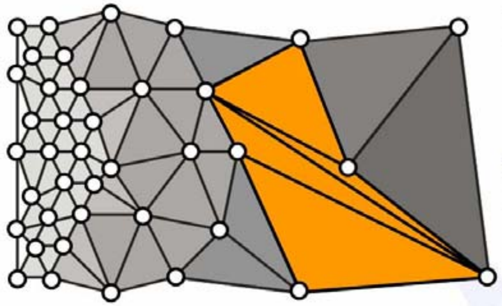
Triangulierungen

- Sind alle regulären Triangulierungen auch „gute" Triangulierungen?



Triangulierungen

- Sind alle regulären Triangulierungen auch „gute“ Triangulierungen?



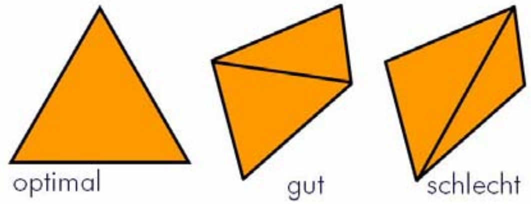
Triangulierung ist regulär

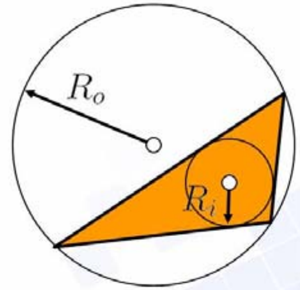
„schlechte“ Triangulierung: Dreiecke sind zu lang und spitz

Lange, spitze Dreiecke sollten vermieden werden, da sie bei Interpolation zu unschönen Ergebnissen führen!

Triangulierungen

- Was sind „gute“ Dreiecke?





Faustregeln:

- Optimal sind gleichseitige Dreiecke
- Der kleinste Winkel im Dreieck sollte maximal sein.
- Das Verhältnis zwischen Inkreis und Umkreis sollte maximal sein: $\frac{R_i}{R_o} = \max$

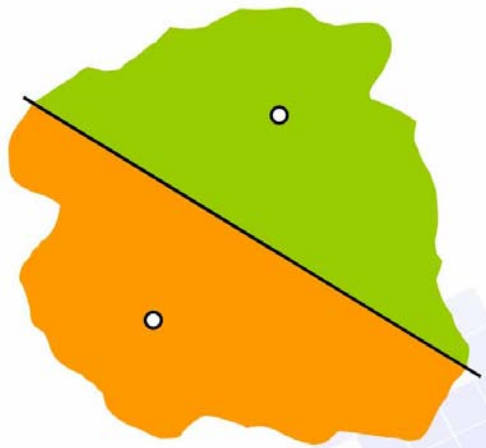
Systematische Lösung in 2D

Wie finde ich eine *optimale Triangulierung?*

- **Delaunay-Triangulierung**
  - *Definition* über Voronoi-Diagramm
  - *Eigenschaften* der Delaunay-Triangulierung
  - *Algorithmen* zur Bestimmung der Delaunay-Triangulierung
- **Voronoi-Diagramm**
  - Hilfreich bei der exakten Definition

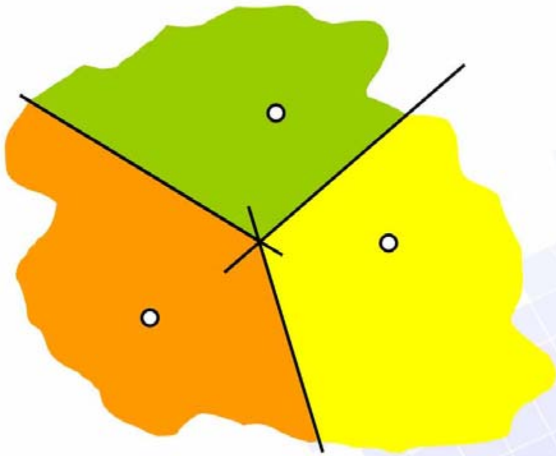
Voronoi-Tessellierung

Aufgabe: Bestimme zu jedem Vertex alle Punkte der Ebene, die näher an diesem Vertex liegen, als an jedem anderen.



Voronoi-Tessellierung

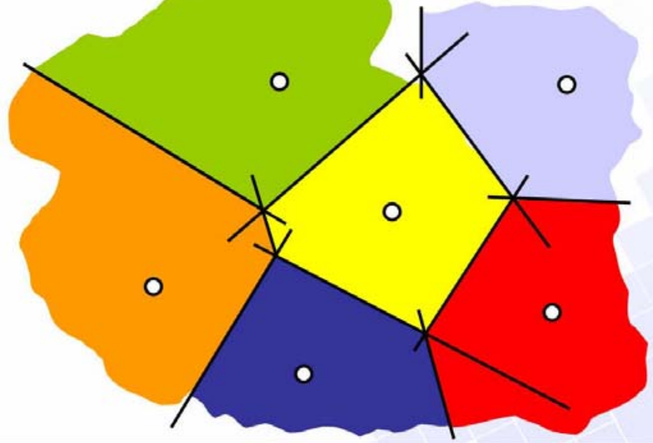
Aufgabe: Bestimme zu jedem Vertex alle Punkte der Ebene, die näher an diesem Vertex liegen, als an jedem anderen.



34

Voronoi-Tessellierung

Aufgabe: Bestimme zu jedem Vertex alle Punkte der Ebene, die näher an diesem Vertex liegen, als an jedem anderen.

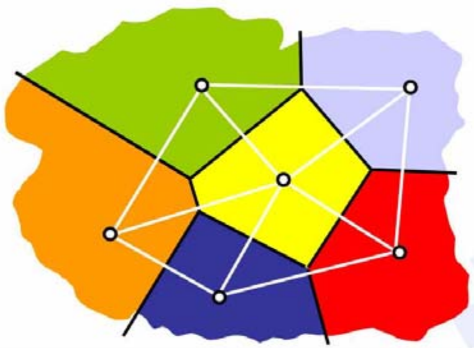


christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

Voronoi-Tessellierung

Definition der ***Delaunay-Triangulierung***

Kante $\overline{P_iP_j} \Leftrightarrow$ Voronoi-Zellen von P_i und P_j haben eine gemeinsame Kante



christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

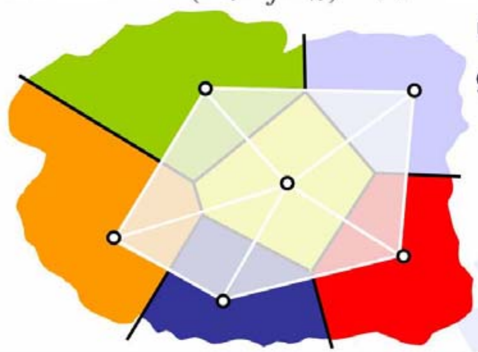
35

Voronoi-Tessellierung

Definition der ***Delaunay-Triangulierung***

Kante $\overline{P_iP_j} \Leftrightarrow$ Voronoi-Zellen von P_i und P_j haben eine gemeinsame Kante

Dreieck $\triangle(P_iP_jP_k) \Leftrightarrow$ Voronoi-Zellen von P_i, P_j und P_k haben einen gemeinsamen Randpunkt

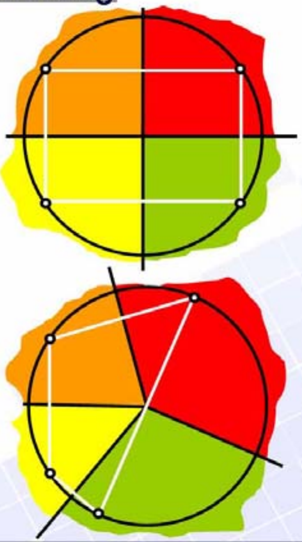


christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

Voronoi-Tessellierung

Definition der ***Delaunay-Triangulierung***

- *Ausnahmefall:*
  4 Punkte liegen auf einem Kreis
  (und innerhalb des Kreises liegt kein weiterer Punkt)
- In diesem Fall ergibt die Delaunay-Triangulierung kein Dreieck, sondern ein Viereck.
- Dieses Viereck kann durch Hinzunahme einer beliebigen Diagonale trianguliert werden

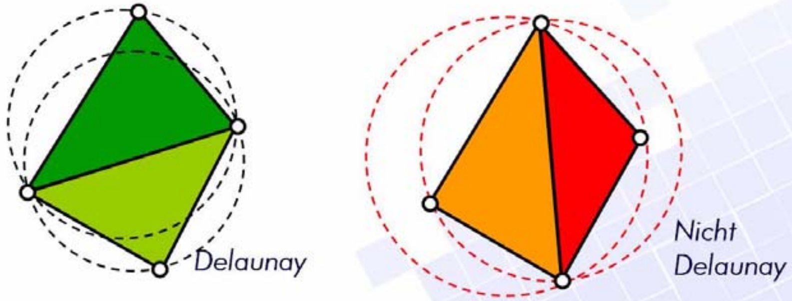


Delaunay-Triangulierung

- Eigenschaften der Delaunay-Triangulierung

Umkreis-Kriterium (CC):
Der Umkreis eines beliebigen Dreiecks enthält keinen weiteren Vertex

Notwendige und Hinreichende Bedingung!



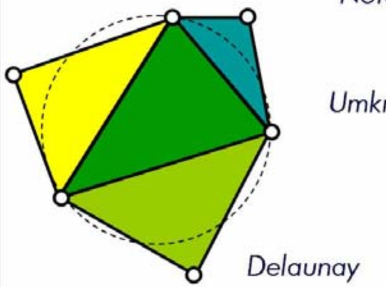
Delaunay-Triangulierung

- Eigenschaften der Delaunay-Triangulierung

Lokales Umkreis-Kriterium (LCC):
Für alle inneren Kanten: Der Umkreis eines Dreiecks enthält nicht den dritten Vertex des benachbarten Dreiecks

Notwendige und Hinreichende Bedingung!

Leichter zu zeigen als globales Umkreis Kriterium, da nur die benachbarten Dreiecke untersucht werden müssen!



Algorithmen

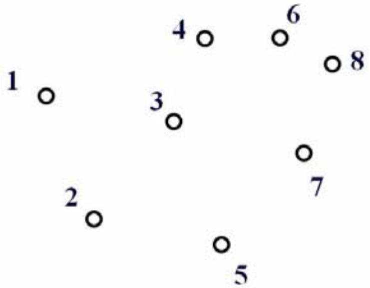
Algorithmen zur Bestimmung der Delaunay Triangulierung einer gegebenen Punkte-menge

- ***Flipping Algorithmus***
- ***Inkrementeller Algorithmus***
- ***Divide & Conquer-Algorithmus***

Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

1. *Bestimme eine **beliebige (reguläre)** Triangulierung*

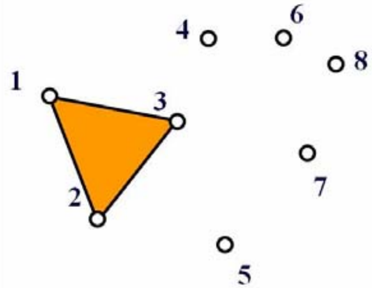


- Ordne alle Vertices lexikographisch (z.B. sortiere zuerst nach x- dann nach y-Koord.)

Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

1. *Bestimme eine **beliebige (reguläre)** Triangulierung*

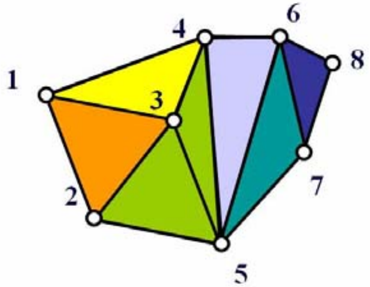


- Ordne alle Vertices lexikographisch (z.B. sortiere zuerst nach x- dann nach y-Koord.)
- Beginne mit den ersten 3 Vertices

Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

1. *Bestimme eine **beliebige (reguläre)** Triangulierung*



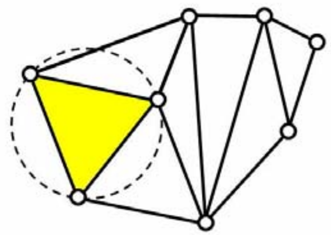
- Ordne alle Vertices lexikographisch (z.B. sortiere zuerst nach x- dann nach y-Koord.)
- Beginne mit den ersten 3 Vertices
- Füge schrittweise jeweils einen neuen Vertex hinzu. Verbinde den neuen Vertex mit allen sichtbaren Kanten

Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe“ alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen

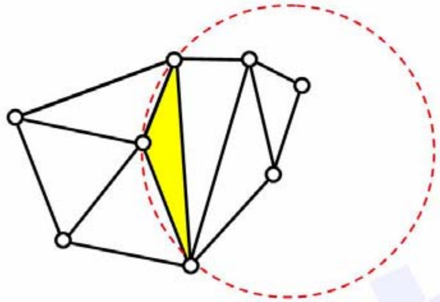


Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen



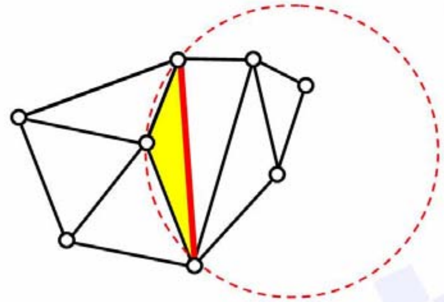
Delaunay-Triangulierung

41

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen



christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

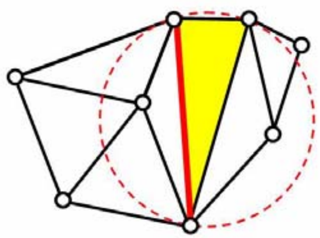
Delaunay-Triangulierung

41

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen



christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

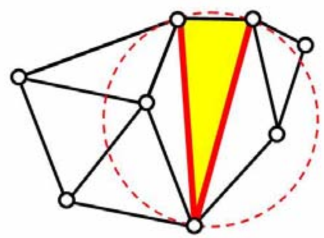
Delaunay-Triangulierung

41

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen



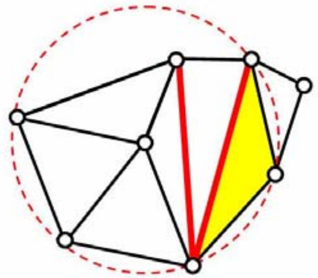
christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen

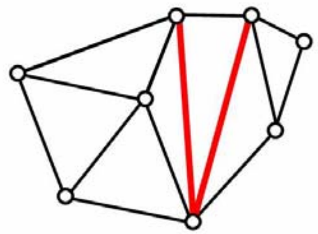


Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen
- Entnehme die erste Kante der Liste und „flippe" sie.

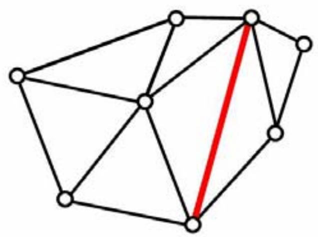


Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen
- Entnehme die erste Kante der Liste und „flippe" sie.

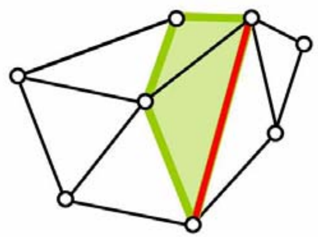


Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

2. *„Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen*

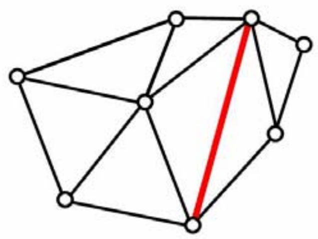
- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen
- Entnehme die erste Kante der Liste und „flippe" sie.
- Überprüfe alle 4 Kanten des betroffenen Vierecks und aktualisiere die Liste



Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

2. „Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen



- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen
- Entnehme die erste Kante der Liste und „flippe" sie.
- Überprüfe alle 4 Kanten des betroffenen Vierecks und aktualisiere die Liste

Delaunay-Triangulierung

Flipping Algorithmus

2. „Flippe" alle Kanten, die das lokale Umkreiskriterium (LCC) verletzen

- Bestimme eine Liste aller Kanten, die LCC verletzen
- Entnehme die erste Kante der Liste und „flippe" sie.
- Überprüfe alle 4 Kanten des betroffenen Vierecks und aktualisiere die Liste
- Weiter mit nächster Kante

Algorithmen

Algorithmen zur Bestimmung der Delaunay Triangulierung einer gegebenen Punkte-menge

- *Flipping Algorithmus*
- *Inkrementeller Algorithmus*
- *Divide & Conquer-Algorithmus*

Vorteile: sehr einfach
Nachteil: benötigt initiale Triangulierung

Algorithmen

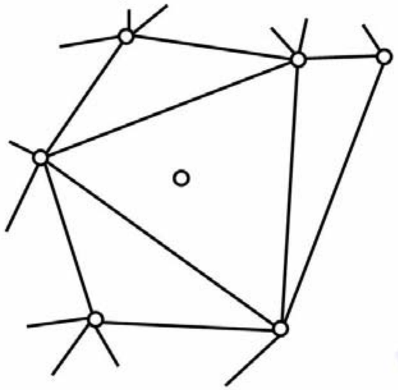
Algorithmen zur Bestimmung der Delaunay Triangulierung einer gegebenen Punkte-menge

- *Flipping Algorithmus*
- *Inkrementeller Algorithmus*
- *Divide & Conquer-Algorithmus*

Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

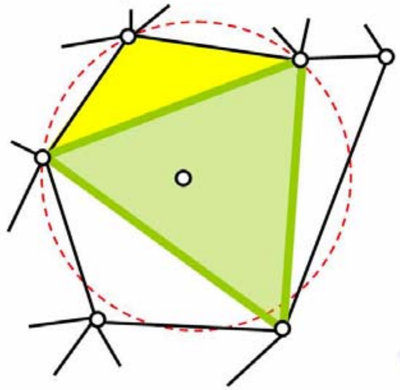
1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*



Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*

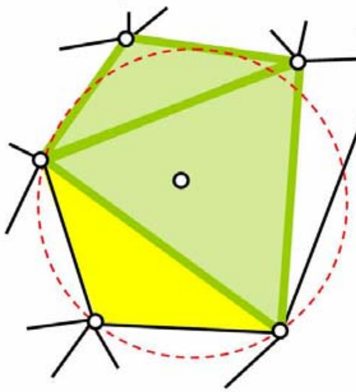


- Finde ein Dreieck, das den hinzugefügten Vertex enthält.
- Prüfe Umkreis der benachbarten Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen

Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*

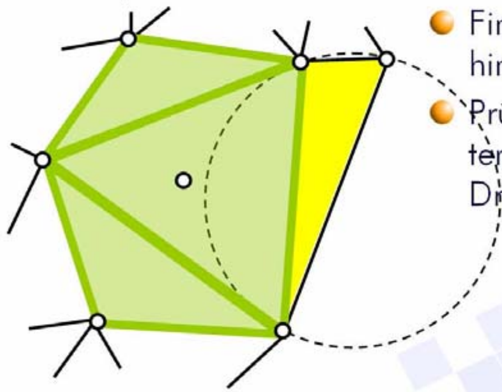


- Finde ein Dreieck, das den hinzugefügten Vertex enthält.
- Prüfe Umkreis der benachbarten Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen

Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*

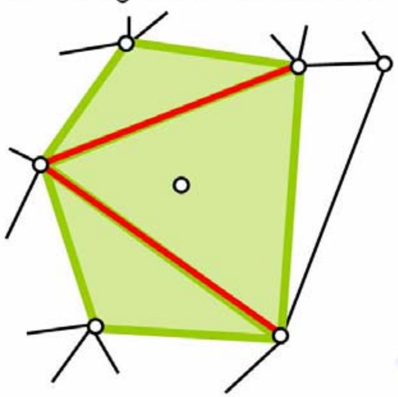


- Finde ein Dreieck, das den hinzugefügten Vertex enthält.
- Prüfe Umkreis der benachbarten Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen

Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*

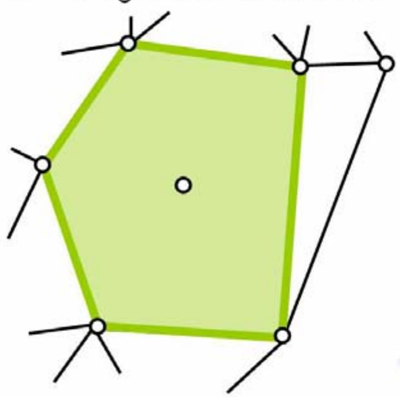


- Finde ein Dreieck, das den hinzugefügten Vertex enthält.
- Prüfe Umkreis der benachbarten Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen
- Entferne alle inneren Kanten der markierten Region

Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*

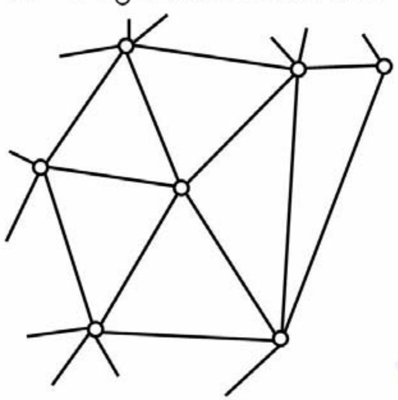


- Finde ein Dreieck, das den hinzugefügten Vertex enthält.
- Prüfe Umkreis der benachbarten Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen
- Entferne alle inneren Kanten der markierten Region

Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*



- Finde ein Dreieck, das den hinzugefügten Vertex enthält.
- Prüfe Umkreis der benachbarten Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen
- Entferne alle inneren Kanten der markierten Region
- Verbinde neuen Vertex mit allen Randkanten der Region

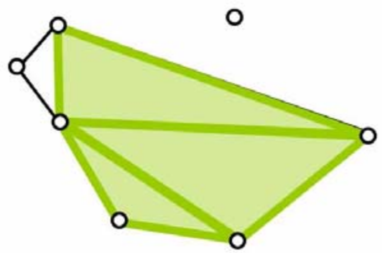
Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*

Sonderfall: Externer Vertex

- Prüfe Umkreis aller Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen



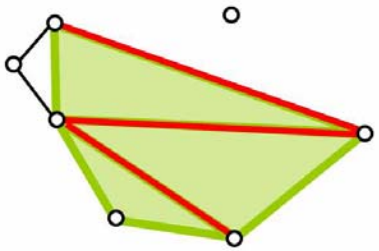
Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*

Sonderfall: Externer Vertex

- Prüfe Umkreis aller Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen
- Entferne alle Kanten der markierten Region, die LCC verletzen



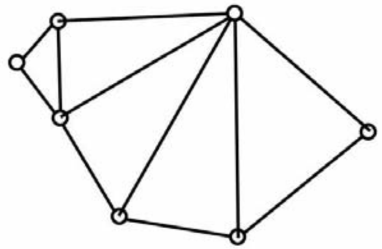
Delaunay-Triangulierung

Inkrementeller Algorithmus

1. *Beginne mit einem Dreieck (3 beliebige Vertices)*
2. *Füge nacheinander weitere Vertices hinzu*

Sonderfall: Externer Vertex

- Prüfe Umkreis aller Dreiecke. Markiere die Dreiecke die LCC verletzen
- Entferne alle Kanten der markierten Region, die LCC verletzen
- Verbinde neuen Vertex mit allen Randkanten der Region



Algorithmen

Algorithmen zur Bestimmung der Delaunay Triangulierung einer gegebenen Punkte-menge

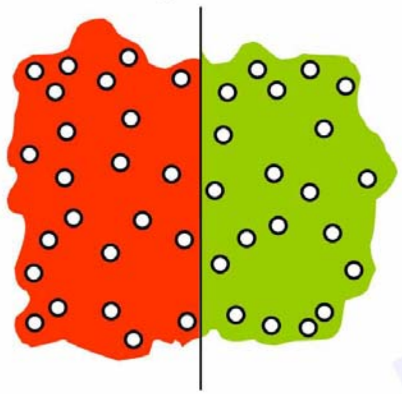
- *Flipping Algorithmus*
- *Inkrementeller Algorithmus*
- *Divide & Conquer-Algorithmus*

Vorteile: keine initiale Triangulierung
Nachteil: etwas komplizierter als ***Flipping***

Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 1 (Teilen): *Teile die Menge der Dreiecke solange, bis die Triangulierung trivial wird.*

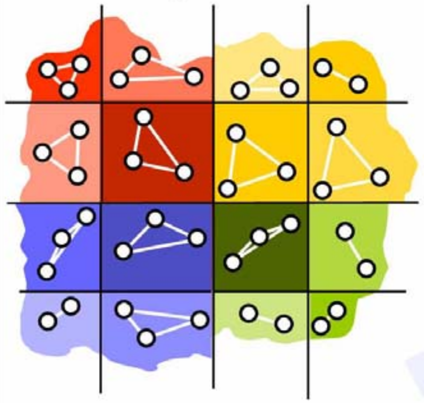


- Zerlege die Menge in Teil-mengen

Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 1 (Teilen): *Teile die Menge der Dreiecke solange, bis die Triangulierung trivial wird.*

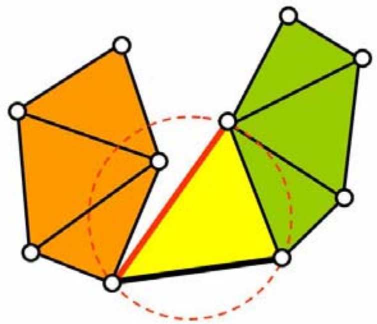


- Zerlege die Menge in Teilmengen
- Fahre solange fort bis jede Teilmenge 2 oder 3 Vertices enthält.
  (Achte darauf, dass die Teilmengen annähernd quadratische Form haben)
- Bestimme (triviale) Triangulierung der Teilmengen

Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): *Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.*

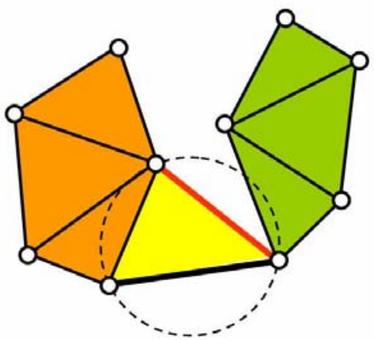


- Beginne mit der „untersten" Kante
- Bilde mit einer der nächsten „untersten" Kanten ein Dreieck, das LCC nicht verletzt. (*Dies ist nicht immer möglich! → Sonderfall*)

Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): *Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.*

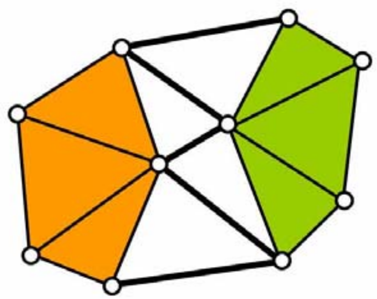


- Beginne mit der „untersten" Kante
- Bilde mit einer der nächsten „untersten" Kanten ein Dreieck, das LCC nicht verletzt. (*Dies ist nicht immer möglich! → Sonderfall*)

Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): *Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.*



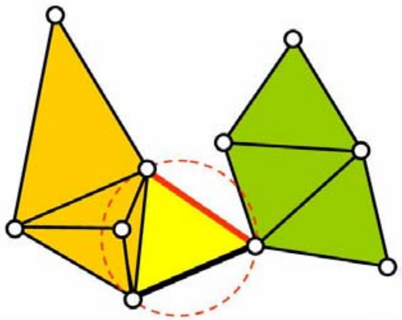
- Beginne mit der „untersten" Kante
- Bilde mit einer der nächsten „untersten" Kanten ein Dreieck, das LCC nicht verletzt. (*Dies ist nicht immer möglich! → Sonderfall*)
- Fahre so fort

Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): *Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.*

Sonderfall: Einfügen einer Kante nicht möglich

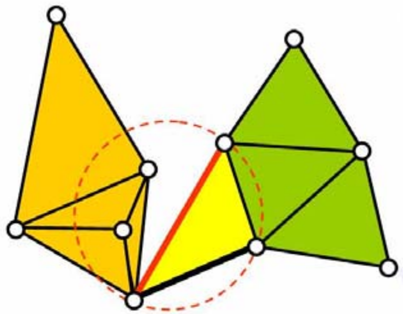


Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): *Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.*

Sonderfall: Einfügen einer Kante nicht möglich



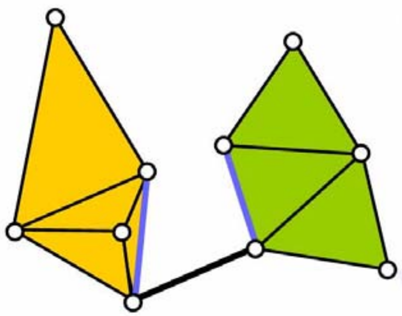
Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): *Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.*

Sonderfall: Einfügen einer Kante nicht möglich

- *Grund:* Es existiert bereits eine Kante, die LCC verletzt!



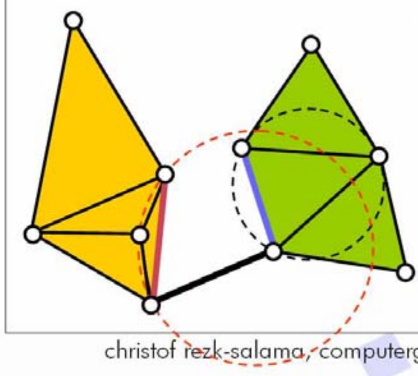
Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): *Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.*

Sonderfall: Einfügen einer Kante nicht möglich

- *Grund:* Es existiert bereits eine Kante, die LCC verletzt!
- Bestimme die Kante, die LCC verletzt.

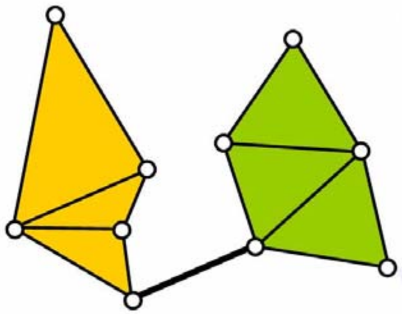


Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.

Sonderfall: Einfügen einer Kante nicht möglich



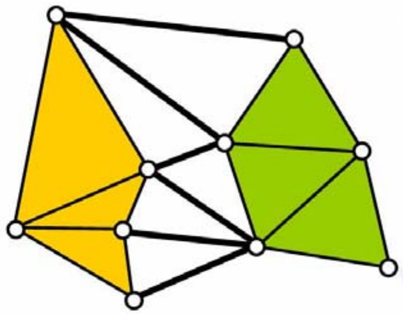
- *Grund:* Es existiert bereits eine Kante, die LCC verletzt!
- Bestimme die Kante, die LCC verletzt.
- Entferne diese Kante und fahre fort

Delaunay-Triangulierung

Divide and Conquer-Algorithmus

Schritt 2 (Vereinen): Vereinige die einzelnen Teilmengen schrittweise.

Sonderfall: Einfügen einer Kante nicht möglich



- *Grund:* Es existiert bereits eine Kante, die LCC verletzt!
- Bestimme die Kante, die LCC verletzt.
- Entferne diese Kante und fahre fort

Zusammenfassung Algorithmen

- *Flipping Algorithmus*
  - Komplexität o(n^2)
  - sehr einfacher erfordert initiale Triangulierung
- *Inkrementeller Algorithmus*
  - Komplexität o(n^2)

Verwenden bei kleinen Netzen (optimal für $n < 1000$)

- *Divide & Conquer-Algorithmus*
  - Komplexität o($n \log n$)
  - relativ kompliziert

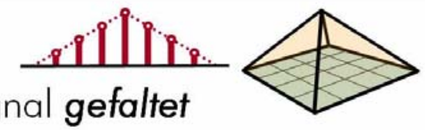
Nicht besprochen

- *(Plane-Sweep Algorithmus)*
  - Komplexität o($n \log n$)
  - sehr kompliziert

Verwenden bei großen Netzen (optimal für $n > 100000$)

Zusammenfassung

Lineare Filter:



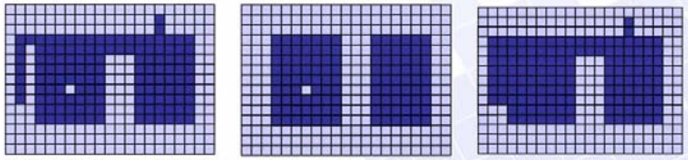
- ***Filterkern*** wird mit Signal ***gefaltet***
- Lineare Filter entfernen bestimmte ***Frequenzen*** aus dem Signal
- Glättungsfilter:
  - Box-, Dreieck-, Gauss-Filter
  - *Tiefpassfilter:* hohe Frequenzen werden entfernt

- Kantenfilter:
  - *Hochpass-Filter:* niedrige Frequenzen werden abgeschwächt

Zusammenfassung

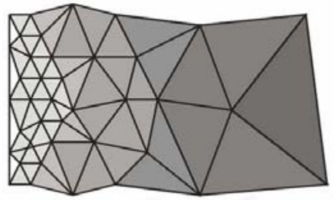
Nicht-Lineare Filter:

- Keine ***Faltung,*** sondern beliebige nichtlineare Verknüpfung
- Rangordnungsoperationen:
  - Median-Filter:
    Rauschunterdrückung ohne Kantenglättung
  - Morphologische Operationen
    Dilatation, Erosion, Opening, Closing

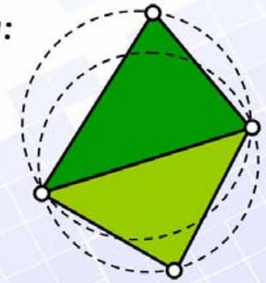


Zusammenfassung

Triangulierungen:



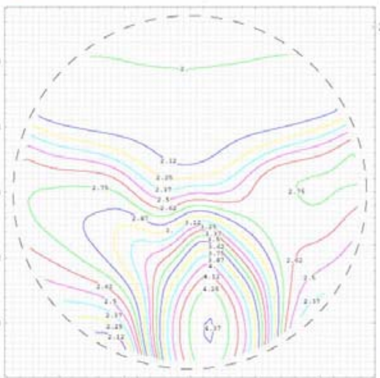
- ***Reguläre Triangulierungen***
- ***Delaunay-Triangulierung***
  - Definition über Voronoi-Diagramm
  - globales und lokales Umkreis-Kriterium
- ***Algorithmen zur Triangulierung:***
  - Flipping-Algorithmus
  - Inkrementeller Algorithmus
  - Divide & Conquer Algorithmus

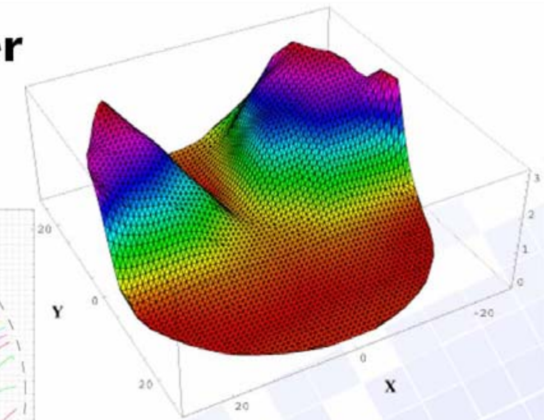


Nächste Stunde

2D Skalarfelder

- Isolinien
- Surface Plots





Daten: Roman Sturm,
Universität Erlangen-Nürnberg