Visualisierung: 2D Vektorfelder

Christof Rezk-Salama

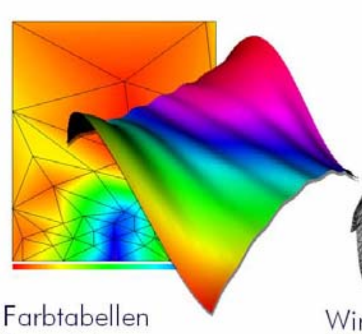
Visualisierung WS 04/05, 09.11.2004

computergraphik und multimedia systeme
universität siegen

Review: Letzte Stunde

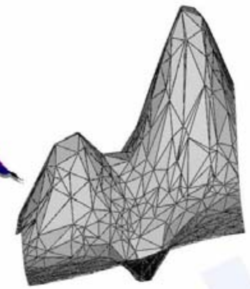
- 2D Skalarfelder

Farbkodierung



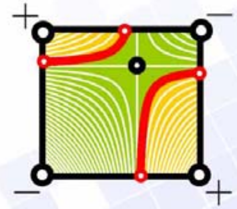
Farbtabellen
Rasterisierung
  per-Vertex Lookup
  per-Pixel Lookup

Oberflächen



Wireframe
HiddenLines
Flat-Shading
Gouraud-Shading

Isolinien



Sequentielles Verfahren
Contour Tracing
Midpoint Decider
Asymptotic Decider

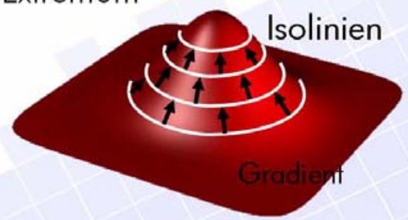
Review: Der Gradientenvektor

- 1.Ableitung eines 2D Skalarfeldes: Der Gradient

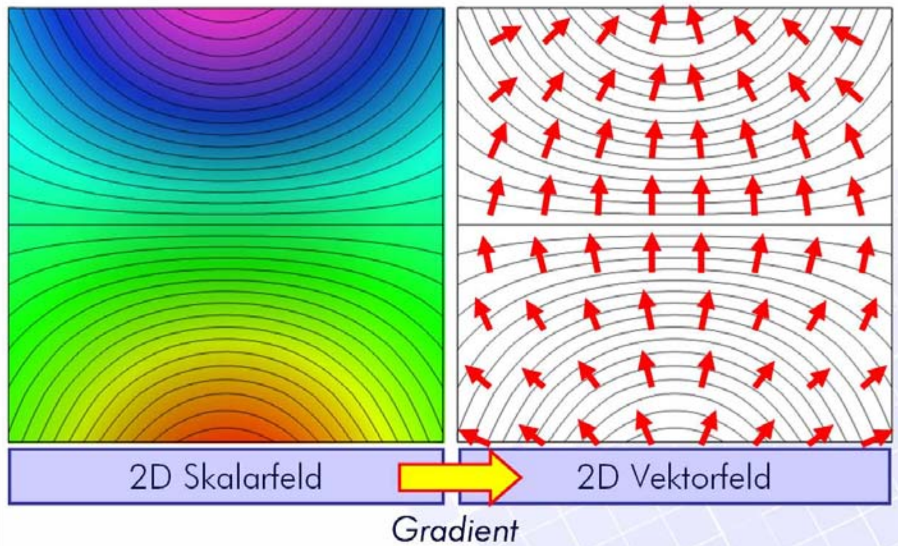
$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Gradientenvektors:
- zeigt in die Richtung des größten Anstiegs
- steht senkrecht auf den Isolinien
- ist gleich Null bei lokalem Extremum

Beispiel:
2D Höhenfeld



Das Gradientenfeld



2D Vektorfelder: Definition

2D Vektorfeld:

- selten analytisch gegeben:

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_x(x,y) \\ v_y(x,y) \end{pmatrix} \qquad \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\quad x,y \in \mathbb{R}$$

- üblicherweise als diskrete Daten:

$$(x_i, y_i) \mapsto \vec{v}_i = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}_i \qquad i \in [0, \ldots N]$$

2D Vektorfelder

- Ableitungen eines Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_x(x,y) \\ v_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Betrachte partielle Ableitungen der Vektor-Komponenten

„wie stark ändert sich v_x in x-Richtung“ — $\frac{\partial v_x}{\partial x}$

wie stark ändert sich v_x in y-Richtung — $\frac{\partial v_x}{\partial y}$

„wie stark ändert sich v_y in x-Richtung?“ — $\frac{\partial v_y}{\partial x}$

wie stark ändert sich v_y in y-Richtung — $\frac{\partial v_y}{\partial y}$

2D Vektorfelder

- Ableitungen eines Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_x(x,y) \\ v_y(x,y) \end{pmatrix}$$

- <u>Totales</u> Differenzial:

$$J_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die *Jacobi-Matrix (Fundamental-Matrix)* beschreibt <u>vollständig</u> „wie stark sich das Vektorfeld in Punkt (x,y) ändert“

Die Jacobi-Matrix

Wozu braucht man die Jacobi-Matrix?

- ***Richtungsableitungen*** in Richtung $\vec{h}$:

$$\frac{\partial\, \vec{v}(x,y)}{\partial \vec{h}} = J_{\vec{v}}\, \vec{h} \qquad \textit{mit} \qquad |\vec{h}| = 1$$

Beispiele:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Lokale Eigenschaften

Als ***Divergenz*** bezeichnet man die Summe der Diagonalelemente der Jacobimatrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

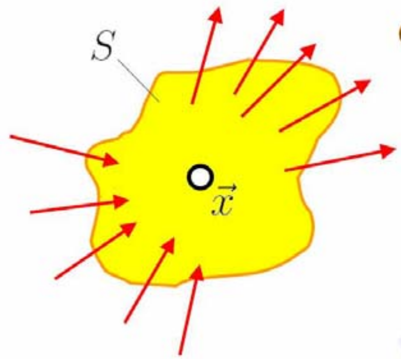
- Die Divergenz erlaubt Aussagen über die Stärke von *Quellen* und *Senken* im Vektorfeld, bzw. über das „Auseinanderstömen"

Quelle bei $\vec{x}_0$	Senke bei $\vec{x}_0$	weder Quelle noch Senke
$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0) > 0$	$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0) < 0$	$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0) = 0$

Die Divergenz

Anschaulich: Betrachte ein kleines Flächenstück **S** in Umgebung von $\vec{x}$

- ***Wie stark ist die Strömung, die reinfließt?***
- ***Wie stark ist die Strömung, die rausfließt?***



Die Divergenz

Anschaulich: Betrachte ein kleines Flächenstück **S** in Umgebung von $\vec{x}$

- ***Wie stark ist die Strömung, die reinfließt?***
- ***Wie stark ist die Strömung, die rausfließt?***
- Lasse das Flächenstück S infinitesimal klein werden.

$\circ_{\vec{x}}$

Die ***Divergenz*** ist das ***„Verhältnis zwischen Ein- und Ausströmung"***

Lokale Eigenschaften

Als ***Rotation*** bezeichnet man (in 2D) die Differenz der Elemente der Gegendiagonale der Jacobimatrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

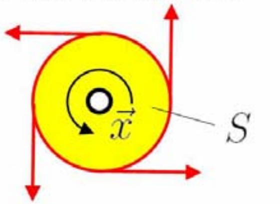
$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

- Die Rotation *(engl. auch* curl*)* erlaubt Aussagen über die ***lokale Rotation***, d.h die ***Wirbelhaftigkeit*** (Vorticity) der Strömung.

Keine Rotation um $\vec{x}_0$	Lokale Rotation um $\vec{x}_0$
$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}_0) = 0$	$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0$

Die Rotation

Anschaulich:

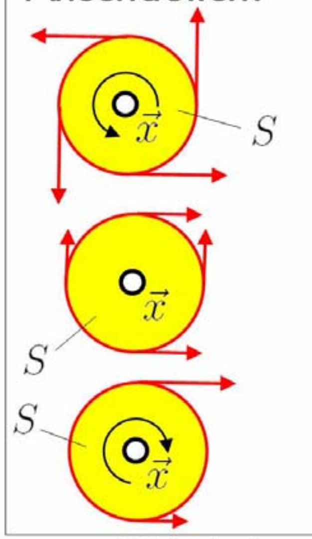


Betrachte eine kleine Kreisfläche **S** in Umgebung von $\vec{x}$

- ***Wie stark ändert sich die Tangentialströmung in x- und y-Richtung?***

Die Rotation

Anschaulich:

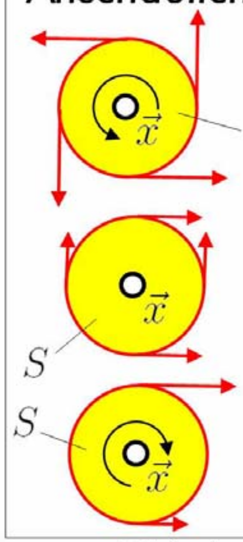


Betrachte eine kleine Kreisfläche **S** in Umgebung von $\vec{x}$

- ***Wie stark ändert sich die Tangentialströmung in x- und y-Richtung?***

Die Rotation

Anschaulich:



Betrachte eine kleine Kreisfläche **S** in Umgebung von $\vec{x}$

- ***Wie stark ändert sich die Tangentialströmung in x- und y-Richtung?***
- Lasse das Flächenstück S infinitesimal klein werden.

Die ***Rotation*** ist ein Maß für die lokale „Verwirbelung einer Strömung“

Analytische Beispiele

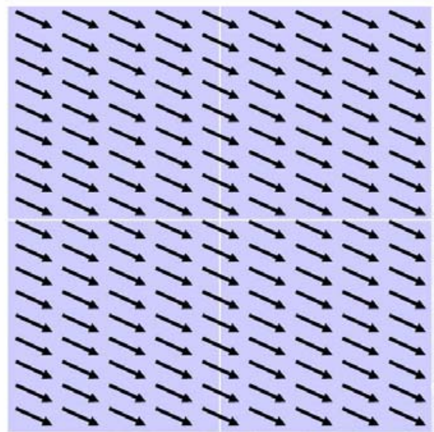
Konstantes Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{v}}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y) = 0$$

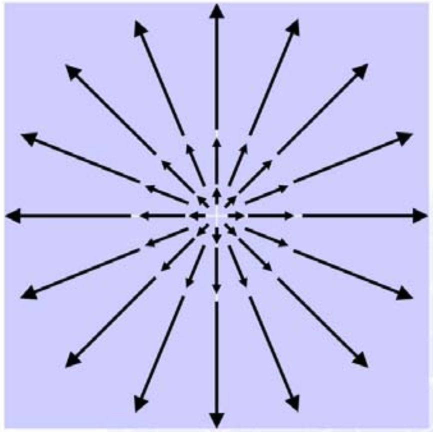
$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y) = 0$$



Gleichförmige, laminare Strömung,
kein Auseinanderströmen (keine Divergenz),
keine Verwirbelung (keine Rotation)

Analytische Beispiele

Identitäts-Vektorfeld



$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{v}}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y) = 2$$

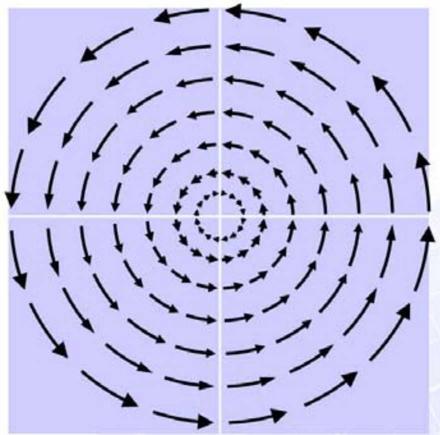
$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y) = 0$$

Keine Verwirbelung (Rotation),

Konstant positive Divergenz: Auseinanderströmen
jeder Punkt ist Quelle

Analytische Beispiele

Zirkulares Vektorfeld



$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{v}}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y) = 2$$

Kein „Auseinanderströmen" (keine Divergenz),

Lokale Rotation in jedem Punkt

Analytische Beispiele

Gradient eines Potentialfelds:

$$\vec{v}(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y)$$

$$J_{\vec{v}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y) = 0$$

Gradientenfelder sind *konservativ*, d.h. generell *rotationsfrei*

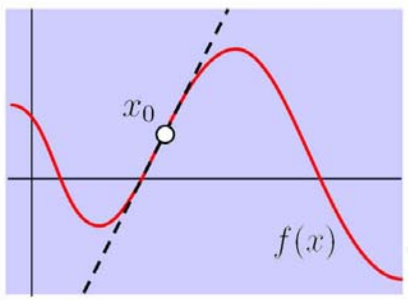
(Zirkulationen sind nicht möglich)

Grundlagen

- Taylorentwicklung:

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)} + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \ldots = $$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$



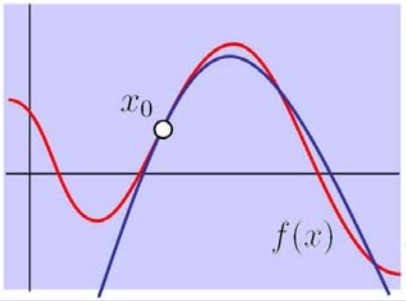
- Approximiere $f(x)$ im Punkt x_0 lokal durch eine *Gerade*

Grundlagen

- Taylorentwicklung:

$$\boxed{f(x_0+h) \;=\; f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0)} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$



- Approximiere $f(x)$ im Punkt x_0 lokal durch eine *Parabel*

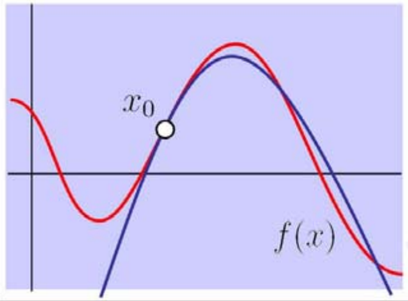
Grundlagen

16

- Taylorentwicklung:

$$\boxed{f(x_0+h) \;=\; f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0)} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$



- Approximiere $f(x)$ im Punkt x_0 lokal durch eine *Parabel*

Taylorentwicklung erlaubt die Approximation beliebiger Funktionen durch Polynome.

Lokale Eigenschaften

- *Kritische Punkte* (Fixpunkte):
  Punkte im Vektorfeld, an denen die Strömung gleich null ist, d.h.

$$\vec{v}(\vec{x}_0) \;=\; \vec{0}$$

  - Die Taylorentwicklung liefert

$$\vec{v}(\vec{x}_0+\vec{h}) \;\approx\; \vec{v}(\vec{x}_0) + J_{\vec{v}}(\vec{x}_0)\,\vec{h}$$

  und somit

$$\vec{v}(\vec{x}_0+\vec{h}) \;\approx\; J_{\vec{v}}(\vec{x}_0)\,\vec{h}$$

  Die Eigenschaften der Strömung in unmittelbarer Umgebung des kritschen Punkt wird allein durch $J_{\vec{v}}(\vec{x}_0)$ bestimmt.

Lokale Eigenschaften

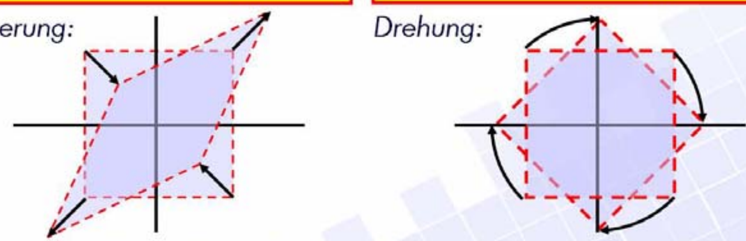
- Jede Matrix kann als Summe einer symmetrischen und einer asymmetrischen Matrix dargestellt werden:

$$J_{\vec{v}} \;=\; J_{\vec{v}}^{(\mathrm{sym})} + J_{\vec{v}}^{(\mathrm{asym})}$$

$$\boxed{J_{\vec{v}}^{(\mathrm{sym})} \;=\; \frac{J_{\vec{v}} + J_{\vec{v}}^{\,T}}{2}} \qquad \boxed{J_{\vec{v}}^{(\mathrm{asym})} \;=\; \frac{J_{\vec{v}} - J_{\vec{v}}^{\,T}}{2}}$$

Scherung:

Drehung:



„Stress-Strain-Tensor“ „Rotation“, „Vorticity“

Eigenwerte einer Matrix

Als Eigenwert einer n×n-Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet man Skalarwerte λ, die die Gleichung

$$\boxed{\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}}$$

erfüllen.

Diese Gleichung ist für bestimmte Paare von Eigenwerten λ und Eigenvektoren $\vec{x}$ erfüllt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \lambda\,\mathbf{Id}\,\vec{x} \\ (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{Id})\vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

charakteristisches Polynom

lösbar für $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{Id}) = 0$

Eigenwerte einer Matrix

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{Id} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Eigenwerte einer Matrix

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(3-\lambda) + 2 = 0 \qquad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Zwei Lösungen: $\boxed{\lambda_1 = 1}$ $\boxed{\lambda_2 = 2}$

Eigenwerte einer Matrix

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = y$$

$$\boxed{\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 2}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x = y$$

$$\boxed{\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

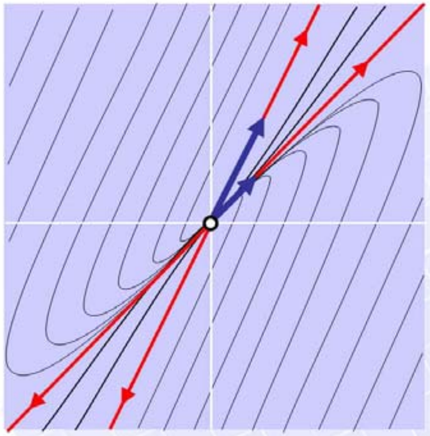
Eigenwerte einer Matrix

Betrachte das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 \quad \vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 2 \quad \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$



Eigenwerte einer Matrix

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Eigenwerte einer Matrix

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(2-\lambda) + 10 = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

Zwei Lösungen im Komplexen: $\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \quad \boxed{\lambda_2 = 1 - 3i}$$

Eigenwerte einer Matrix

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \qquad \begin{pmatrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$-(1+3i)\,x + 2y = 0$$

Eigenwerte einer Matrix

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \qquad \begin{pmatrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(1+3i)\,x$$

Eigenwerte einer Matrix

25

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \qquad \begin{pmatrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(1+3i)\,x$$

$$-5x + (1-3i)\,y = 0$$

Eigenwerte einer Matrix

25

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \qquad \begin{pmatrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(1+3i)\,x$$

$$-5x + \frac{1}{2}(1-3i)(1+3i)\,x = 0$$

Eigenwerte einer Matrix

25

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \qquad \begin{pmatrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(1+3i)\,x$$

$$-5x + \frac{1}{2}(1-3i)(1+3i)\,x = 0$$

$$\|(1 \pm 3i)\|^2$$

Eigenwerte einer Matrix

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \qquad \begin{pmatrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(1+3i)\,x$$

$$-5x + \frac{1}{2}(1-3i)(1+3i)\,x = 0$$

$$-5x + \frac{1}{2}\|(1 \pm 3i)\|^2\,x = 0$$

Eigenwerte einer Matrix

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \qquad \begin{pmatrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(1+3i)\,x$$

$$-5x + \frac{1}{2}(1-3i)(1+3i)\,x = 0$$

$$-5x + \frac{1}{2}\left(\sqrt{1^2+3^2}\right)^2 x = 0$$

Eigenwerte einer Matrix

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i} \qquad \begin{pmatrix} -1-3i & 2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$y = \frac{1}{2}(1+3i)\,x$$

$$-5x + \frac{1}{2}(1-3i)(1+3i)\,x = 0$$

$$-5x + 5x = 0 \quad \textit{(immer erfüllt)}$$

Eigenwerte einer Matrix

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + 3i}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}(1+3i)\,x}$$

Eigenvektor

$$\boxed{\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3i \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1 - 3i}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}(1-3i)\,x}$$

Eigenvektor

$$\boxed{\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}}$$

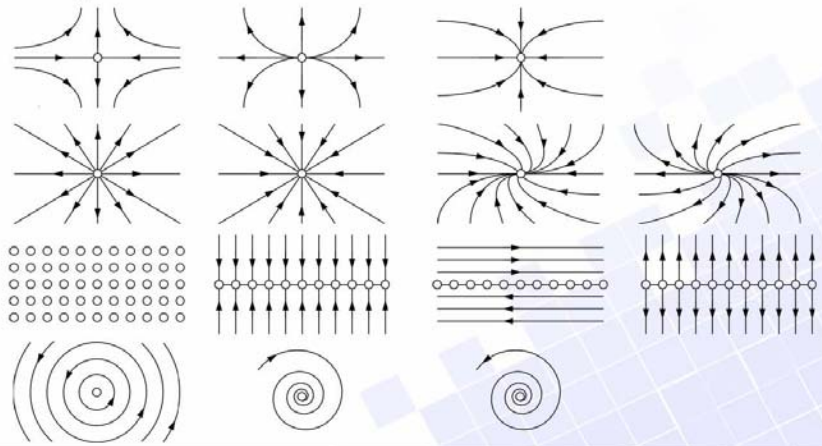
Eigenwerte und Eigenvektoren

Für jede reelle n×n-Matrix $\mathbf{A}$ gilt:

- die Matrix $\mathbf{A}$ hat genau n *(möglicherweise komplexe)* Eigenwerte.
  (jeder Eigenwert wird entsprechend seiner Vielfachheit gezählt)
  [Fundamentalsatz der Algebra]
- Komplexe Eigenwerte treten nur als Paare konjugiert komplexer Zahlen $\lambda_{1,2} = a \pm b\,i$ auf.
  (Dies bedeutet auch, dass bei ungeradem n mindestens ein reeller Eigenwert existiert.)
- Der Nullvektor zählt nicht als Eigenvektor

Vektorfeld-Topologie

- Der Verlauf der Flußlinien in unmittelbarer Umgebung eines Fixpunktes läßt sich in bestimmte *topologische* Kategorien einordnen:



Vektorfeld-Topologie

Vorgehensweise:

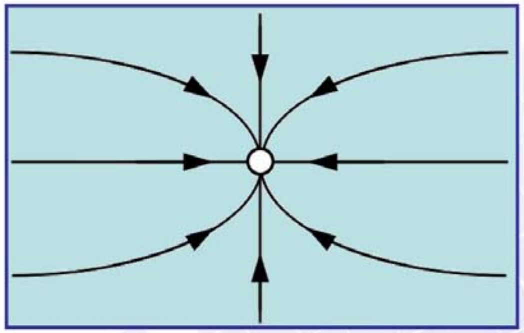
- Bestimme ***kritische Punkte*** (Fixpunkte) im Vektorfeld
  - Bestimme die ***Jacobimatrix*** für jeden Fixpunkt
    (z.B. durch zentrale Differenzen)
  - Bestimme die **Eigenwerte** der Jacobimatrix und klassifiziere nach der Topologie
    (= Einordnung in eine der topologischen Kategorie)
  - Bestimme die **Eigenvektoren** zu den Eigenwerten
    (= Bestimmung der exakten Topologie, Scherung)

Kritische Punkte

Kategorie 1:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 1A:
$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$



Senke (sink, attracting node).
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil.*

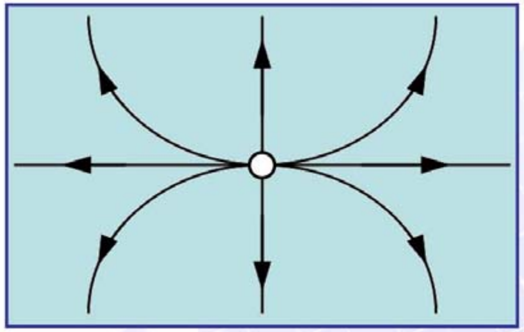
Kritische Punkte

Kategorie 1:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 1A:
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Kategorie 1B:
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$



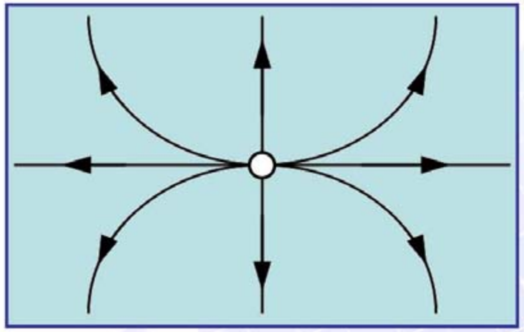
Kritische Punkte

Kategorie 1:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 1A:
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Kategorie 1B:
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$



Quelle (*source, repelling node*).
Fixpunkt ist ***instabil***.

Kritische Punkte

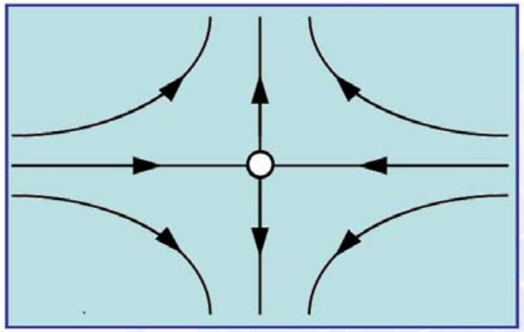
Kategorie 1:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 1A:
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Kategorie 1B:
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Kategorie 1C:
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$



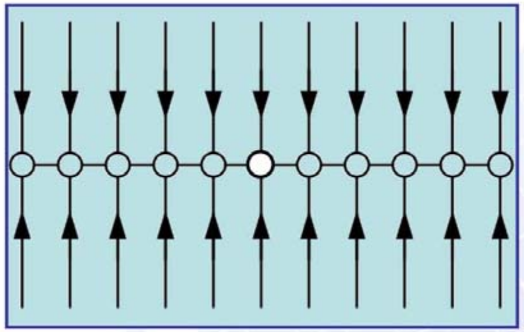
Sattelpunkt (*saddle*).
Fixpunkt ist ***instabil***.

Kritische Punkte

Kategorie 2:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte,
einer davon ist 0
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 2A:
$\lambda < 0$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Senken auf einer Gerade
Fixpunkt ist ***stabil***.

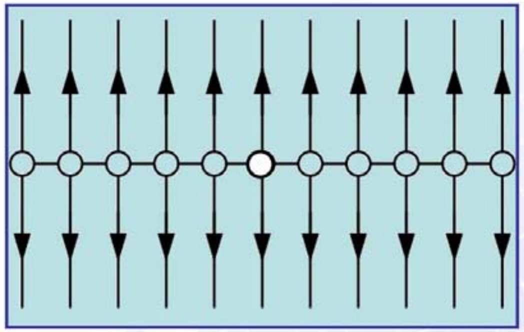
Kritische Punkte

Kategorie 2:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte,
einer davon ist 0
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 2A:
$\lambda < 0$

Kategorie 2B:
$\lambda > 0$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



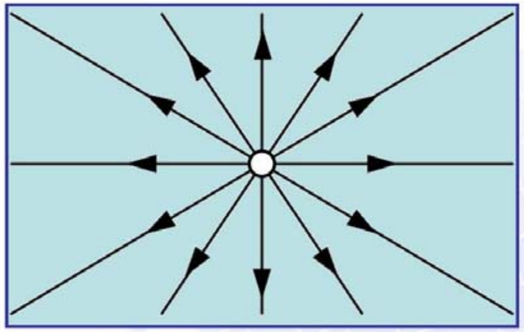
Quellen auf einer Gerade
Fixpunkt ist *instabil*.

Kritische Punkte

Kategorie 3:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 3A:
$\lambda > 0$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Quelle (*source, attracting node*).
Fixpunkt ist *instabil*.

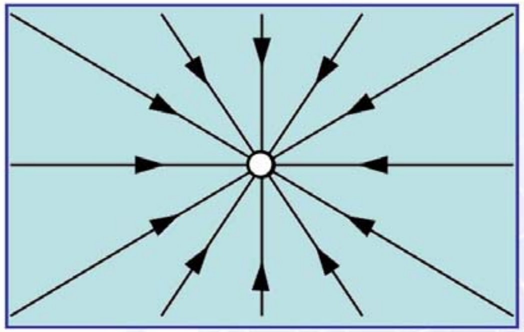
Kritische Punkte

Kategorie 3:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 3A:
$\lambda > 0$

Kategorie 3B:
$\lambda < 0$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Senke (*sink, attracting node*).
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Kritische Punkte

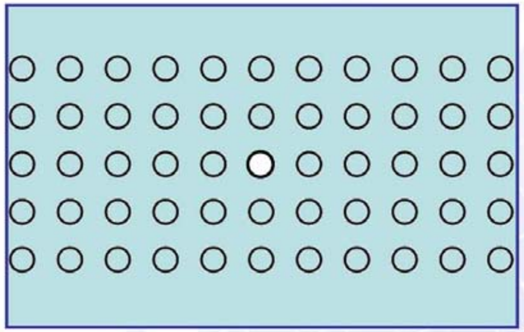
Kategorie 3:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
2 reelle Eigenvektoren

Kategorie 3A:
$\lambda > 0$

Kategorie 3B:
$\lambda < 0$

Kategorie 3C:
$\lambda = 0$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



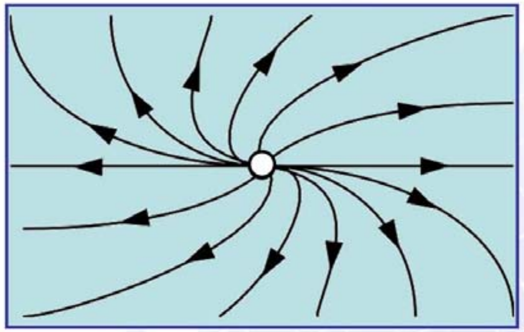
keine Strömung (alles Fixpunkte)
Fixpunkt ist *stabil*.

Kritische Punkte

Kategorie 4:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
1 reellen Eigenvektor

Kategorie 4A:
$\lambda > 0$

- **Beispiel:** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Quelle (source, repelling focus)
Fixpunkt ist *instabil*.

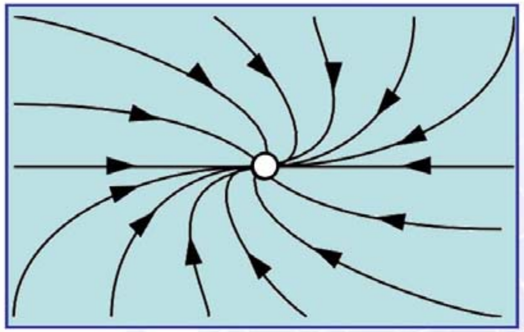
Kritische Punkte

Kategorie 4:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
1 reellen Eigenvektor

Kategorie 4A:
$\lambda > 0$

Kategorie 4B:
$\lambda < 0$

- **Beispiel:** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



Senke (sink, attracting focus)
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Kritische Punkte

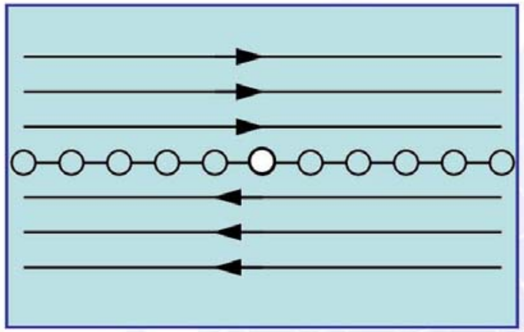
Kategorie 4:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
1 reellen Eigenvektor

Kategorie 4A:
$\lambda > 0$

Kategorie 4B:
$\lambda < 0$

Kategorie 4C:
$\lambda = 0$

- **Beispiel:** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$



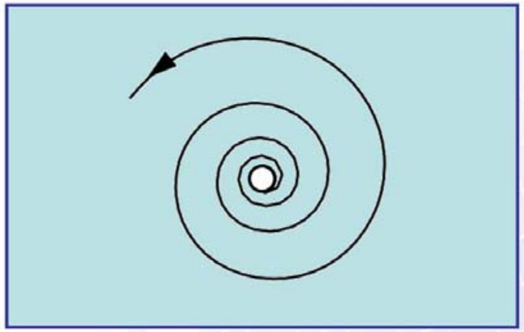
Gerade von Fixpunkten
Fixpunkt ist *stabil*.

Kritische Punkte

Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl.Eigenvektoren

Kategorie 5A:
$\beta \neq 0 < \alpha$

- **Beispiel:** $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$



Quellwirbel (repelling whirl)
Fixpunkt ist *instabil*.

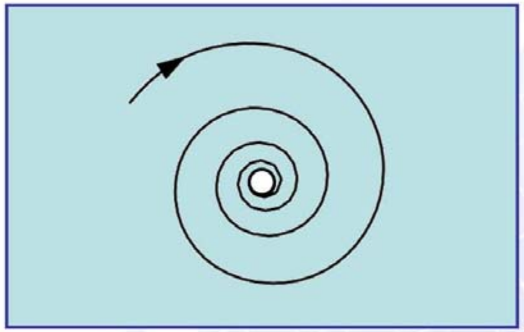
Kritische Punkte

Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl.Eigenvektoren

Kategorie 5A:
$\beta \neq 0 < \alpha$

Kategorie 5B:
$\alpha < 0 \neq \beta$

- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$



Wirbelsenke (attracting whirl)
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil.*

Kritische Punkte

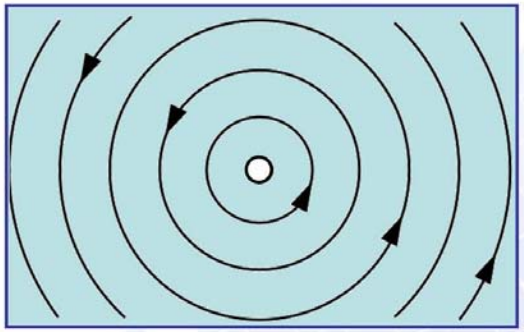
Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl.Eigenvektoren

Kategorie 5A:
$\beta \neq 0 < \alpha$

Kategorie 5B:
$\alpha < 0 \neq \beta$

Kategorie 5C:
$\alpha = 0$

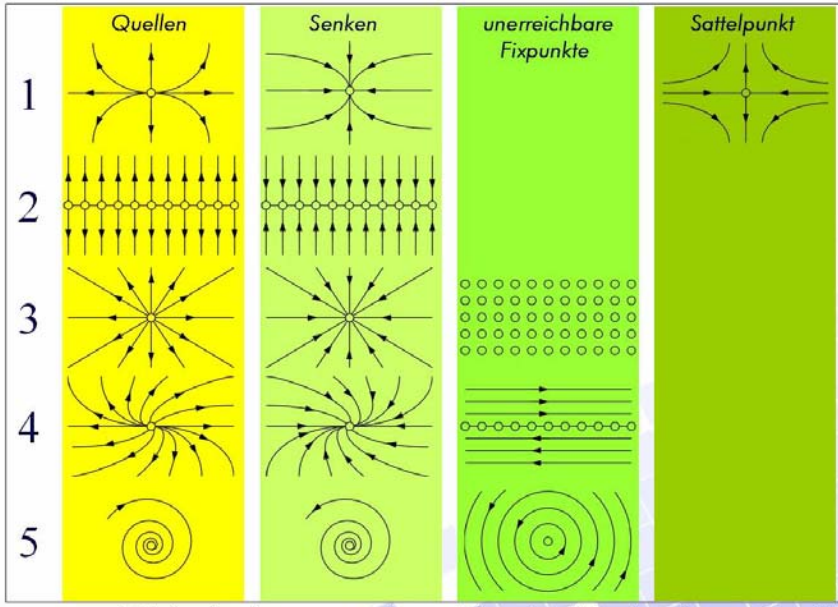
- *Beispiel:* $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$



Zirkulare Strömung (center)
Fixpunkt ist *stabil.*

christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

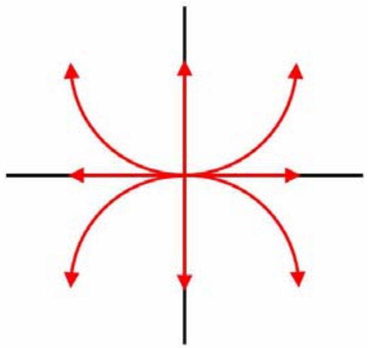
Vektorfeld-Topologie



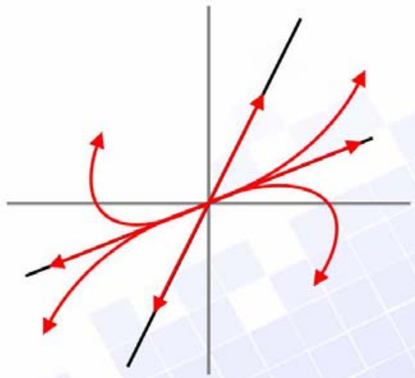
christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

Eigenvektoren

- Welche Rolle spielen die ***reellen Eigenvektoren?***
(komplexe Eigenvektoren sollen hier nicht betrachtet werden)



Bei den Beispielmatrizen waren die Eigenvektoren die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen



Bei beliebigen Jacobimatrizen bestimmen die Eigenvektoren die Scherung der Koordinatenachsen

christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

Stabilität

Stabilität bzw Instabilität wird durch den ***Realteil der Eigenwerte*** bestimmt:

- Ein lineares System ist (asymptotisch) stabil, wenn für alle Eigenwerte gilt:

$$\boxed{Re\lambda_k < 0}$$

- Ein lineares System ist instabil, wenn für mindestens einen Eigenwert gilt:

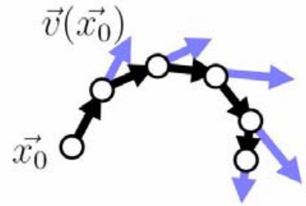
$$\boxed{Re\lambda_k > 0}$$

Anmerkung: Asymptisch stabil heißt, dass es *unendlich viele* Pfade zu dem Fixpunkt gibt. Bei stabilen Systemen sind es *abzählbar viele*.

Stabilität

Was bedeutet ***stabil, instabil,*** und ***asymptotisch stabil?***

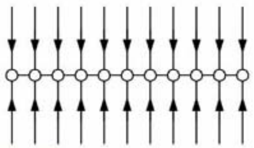
Numerische Bestimmung einer Partikelbahn
(vgl. nächste Stunde):
- Beginne an einem bestimmten Startpunkt $\vec{x_0}$
- Bestimme die Strömung $\vec{v}(\vec{x_0})$ an diesem Punkt.
- Gehe einen kleinen Schritt in Richtung der Strömung



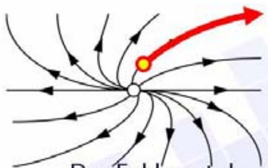
Stabilität

Im kritischen Punkt ist die Strömung gleich null.
Beginne ich die Berechnung einer Partikelbahn in der Nähe eines kritischen Punkts führt mich die Strömung…

stabil	*instabil*	*asymp. stabil*
„…immer direkt in die Umgebung Fixpunkts"	„…immer aus der Umgebung des Fixpunkts heraus"	„…immer zu dem Fixpunkt hin, aber *evtl. auf Umwegen*"



„Der Fehler wird geringer bzw bleibt konstant"



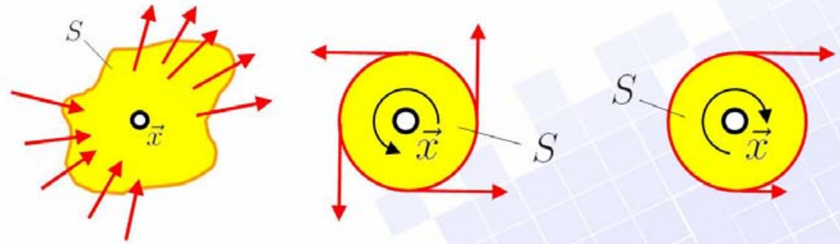
„Der Fehler wird größer"

„Der Fehler wird irgendwann stabil"

Zusammenfassung

2D Vektorfelder

- Differenzieren vektorwertiger Funktionen
  - Totales Differenzial: *Jacobi-Matrix*
  - Richtungsableitung (über Jacobi-Matrix)
  - *Divergenz:* beschreibt die Intensität von Quellen und Senken
  - *Rotation:* beschreibt die „Wirbelhaftigkeit"



Zusammenfassung

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Eigenvektoren sind Vektoren, die durch die Matrix „auf sich selbst abgebildet" und dabei mit dem Eigenwert skaliert werden.

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

- Löse das charakteristische Polynom

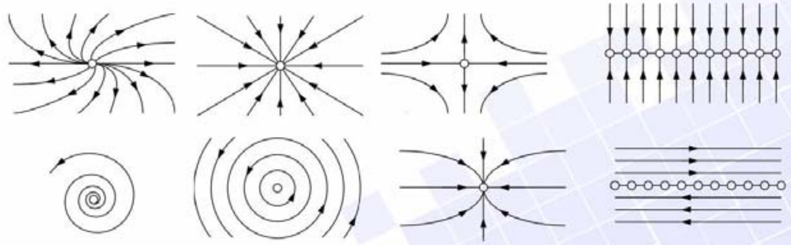
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{Id}) \;=\; 0$$

- Bestimme die Eigenvektoren anschließend durch einsetzen

Zusammenfassung

Kritische Punkte (Fixpunkte)

- charakterisiert durch $\vec{v}(\vec{x_0}) \;=\; \vec{0}$
- Eigenschaften der Strömung in Umgebung des Fixpunktes wird durch ***Jacobi-Matrix*** bestimmt.
- Die ***Eigenwerte*** der Jacobi-Matrix erlauben Klassifikation von kritischen Punkten (Topologie).



Nächste Stunde

2D Vektorfelder

- *Numerische Integration*
  - Runge-Kutta-Verfahren
- *Zeitabhängige Vektordaten*
  - Particle Tracing
  - Streamlines
  - Streaklines
  - Pathlines