Visualisierung: 2D Vektorfelder II

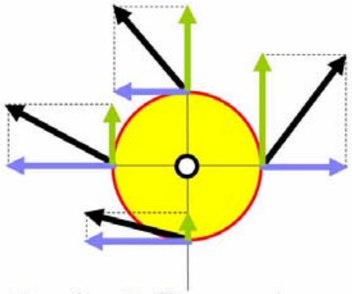
Christof Rezk-Salama

Visualisierung WS 04/05, 16.11.2004

computergraphik und multimedia systeme
universität siegen

Letzte Stunde: *div* und *rot*

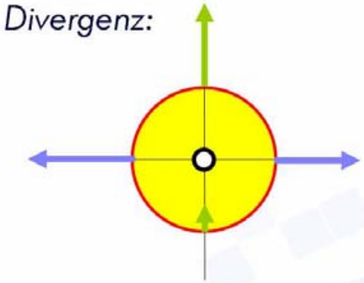
- Betrachte ein infinitesimal kleines Flächenstück S



Totales Differenzial:

$$J_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Divergenz:

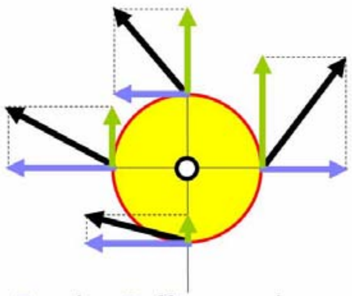


$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

- *„Quelle"* oder *„Senke"*?
- *„Auseinanderströmen"*

Letzte Stunde: *div* und *rot*

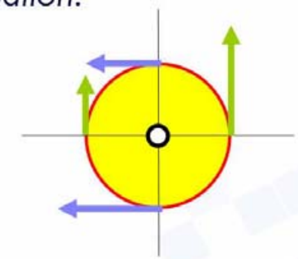
- Betrachte ein infinitessimal kleines Flächenstück S



Totales Differenzial:

$$J_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Rotation:



$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

- *„Lokale Rotation"*
- *„Verwirbelung"*

Eigenwerte einer Matrix

Als Eigenwert einer n×n-Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet man Skalarwerte λ, die die Gleichung

$$\boxed{\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}}$$

erfüllen.

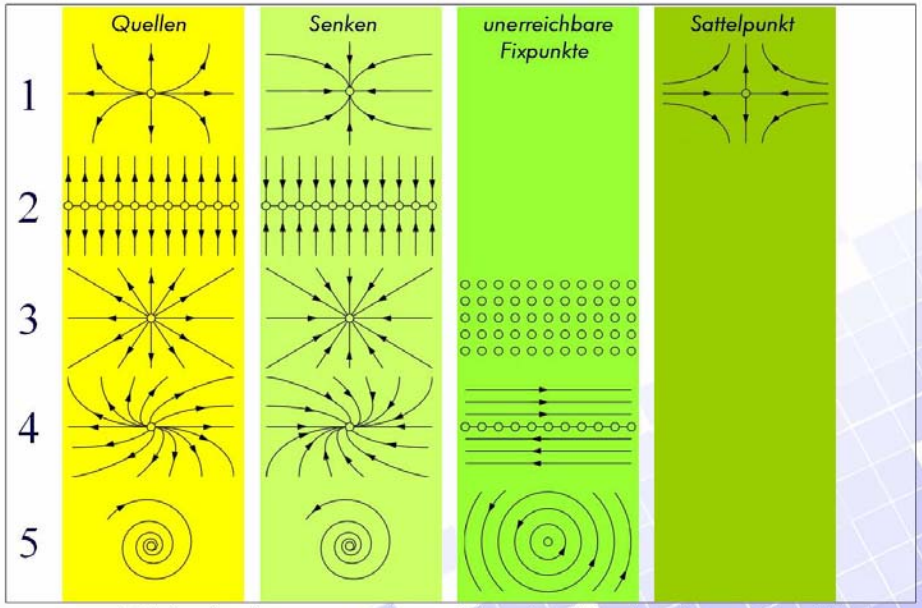
Diese Gleichung ist für bestimmte Paare von Eigenwerten λ und Eigenvektoren $\vec{x}$ erfüllt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \lambda\vec{x} \\ (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{Id})\vec{x} &= \vec{0} \end{aligned}$$

lösbar für $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{Id}) = 0$

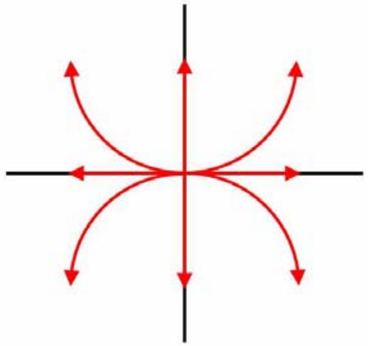
charakteristisches Polynom

Vektorfeld-Topologie

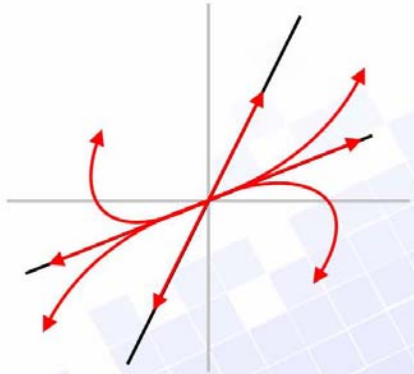


Eigenvektoren

- Welche Rolle spielen die ***reellen Eigenvektoren?***
  (komplexe Eigenvektoren sollen hier nicht betrachtet werden)



Bei den Beispielmatrizen waren die Eigenvektoren die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen



Bei beliebigen Jacobimatrizen bestimmen die Eigenvektoren die Scherung der Koordinatenachsen

Stabilität

Stabilität bzw Instabilität wird durch den ***Realteil der Eigenwerte*** bestimmt:

- Ein lineares System ist (asymptotisch) stabil, wenn für alle Eigenwerte gilt:

$$\boxed{Re\lambda_k \leq 0}$$

- Ein lineares System ist instabil, wenn für mindestens einen Eigenwert gilt:

$$\boxed{Re\lambda_k > 0}$$

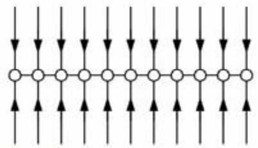
Anmerkung: Asymptisch stabil heißt, dass es *unendlich viele* Pfade zu dem Fixpunkt gibt. Bei stabilen Systemen sind es *abzählbar viele*.

Stabilität

Im kritischen Punkt ist die Strömung gleich null.
Beginne ich die Berechnung einer Partikelbahn in der Nähe eines kritischen Punkts führt mich die Strömung…

stabil

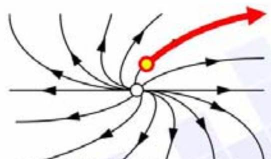
„…immer direkt in die Umgebung Fixpunkts"



„Der Fehler wird geringer bzw. bleibt konstant"

instabil

„…immer aus der Umgebung des Fixpunkts heraus"



„Der Fehler wird größer"

asymp. stabil

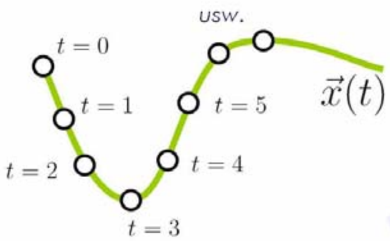
„…immer zu dem Fixpunkt hin, aber *evtl. auf Umwegen"*

„Der Fehler wird irgendwann stabil"

Feldlinien

- Wie bestimme ich Feldlinien (Strömungslinien) im allgemeinen Fall?
  - Wir suchen die *Bahn eines Partikels*, d.h. seine Position in Abhängigkeit der Zeit.

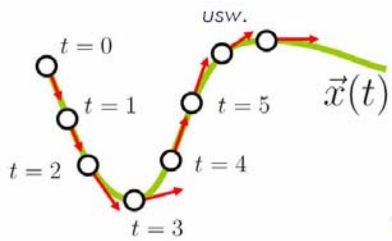
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



Feldlinien

- Wie bestimme ich Feldlinien (Strömungslinien) im allgemeinen Fall?
  - Wir suchen die *Bahn eines Partikels*, d.h. seine Position in Abhängigkeit der Zeit.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



- Diese Bahn muß so bestimmt werden, dass sie in jedem Punkt tangential zu dem gegebenen Vektorfeld verläuft

Das Vektorfeld selbst sei zeitlich konstant (statisch)

Explizites Euler-Verfahren

- Gegeben sei ein statisches Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ und ein Startpunkt $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$.
- Gesucht ist die Partikelbahn $\vec{x}(t)$

- *Taylorentwicklung:*

$$\vec{x}(t_0 + \tau) = \vec{x}(t_0) + \tau \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t_0) + \dots$$

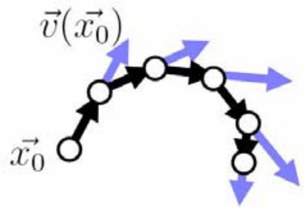
$$\vec{x}(t_0 + \tau) = \vec{x}_0 + \tau \vec{v}(x_0) + \dots$$

$$\boxed{\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(x_i)}$$

Explizites Euler-Verfahren

$$\boxed{\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(x_i)}$$

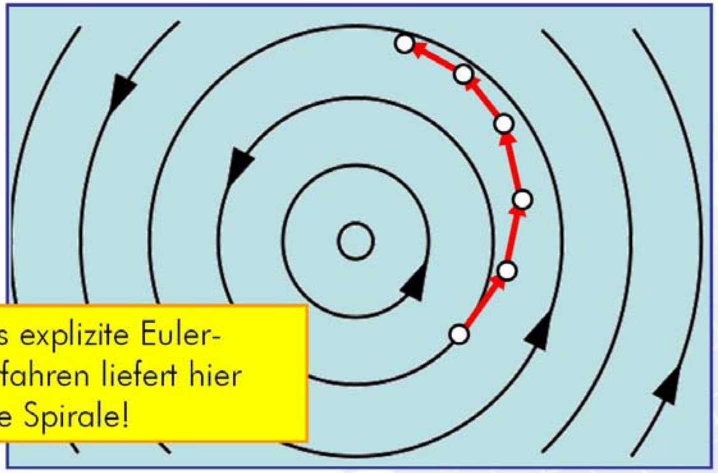
- Beginne an einem bestimmten Startpunkt $\vec{x}_0$
- Bestimme die Strömung $\vec{v}(\vec{x}_0)$ an diesem Punkt.
- Gehe einen kleinen Schritt in Richtung der Strömung



- *Genauigkeit* ist abhängig von der Schrittweite τ
- *Warum „explizit"?* Der Wert x_{i+1} ist *explizit gegeben*, da alle Terme aus der rechten Seite bekannt sind.

Explizites Euler-Verfahren

- **Beispiel:** *Zirkulares Vektorfeld* $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



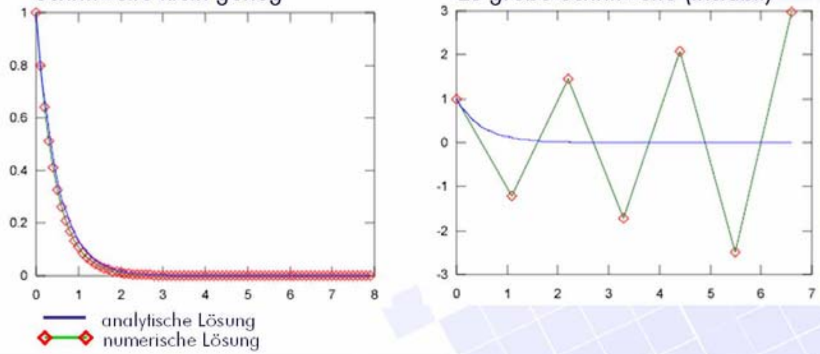
Das explizite Euler-Verfahren liefert hier eine Spirale!

Explizites Euler-Verfahren

Das explizite Euler Verfahren wird bei zu großer Schrittweite *numerisch instabil*. (Ein Beispiel dazu kommt in der Übung)

Beispiel: $\dfrac{\partial x}{\partial t} = -k\,x$ Lösung: $x(t) = e^{-k\,t}$ stabil für: $k\,\tau \le 2$

Schrittweite klein genug *zu große Schrittweite (instabil)*



christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

Implizites Euler-Verfahren

- *Taylorentwicklung im Punkt* $\vec{x}(t_0+\tau)$ *rückwärts:*

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_0+\tau) - \tau\,\frac{\partial\vec{x}}{\partial t}(t_0+\tau) + \dots$$

auflösen nach $\vec{x}(t_0+\tau)$:

$$\vec{x}(t_0+\tau) = \vec{x}(t_0) + \tau\,\frac{\partial\vec{x}}{\partial t}(t_0+\tau) + \dots$$

$$\boxed{\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau\,\vec{v}(x_{i+1})}$$

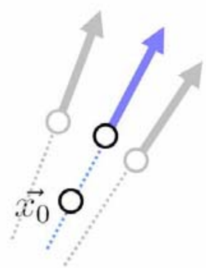
- implizit: $\vec{v}(x_{i+1})$ ist nicht von vorneherein bekannt.

christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

Implizites Euler-Verfahren

$$\boxed{\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau\,\vec{v}(x_{i+1})}$$

- Suche denjenigen Punkt $\vec{x}_1$, dessen Geschwindigkeits-Vektor mit dem Vektor von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}_1$ übereinstimmt.

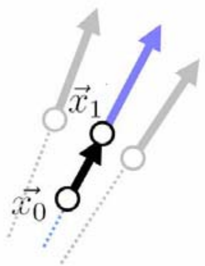


christof rezk-salama, computergraphik und multimediasysteme, universität siegen

Implizites Euler-Verfahren

$$\boxed{\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau\, \vec{v}(x_{i+1})}$$

- Suche denjenigen Punkt $\vec{x}_1$, dessen Geschwindigkeits-Vektor mit dem Vektor von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}_1$ übereinstimmt.



- *Vorteil:* numerische Stabilität
- *Nachteil:* Lösung der impliziten Gleichung kann sehr aufwändig sein (z.B. iterativer Ansatz)

Implizites Euler-Verfahren

- Einfache Lösung im linearen Fall: $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \tau \mathbf{A} \vec{x}_{i+1}$$

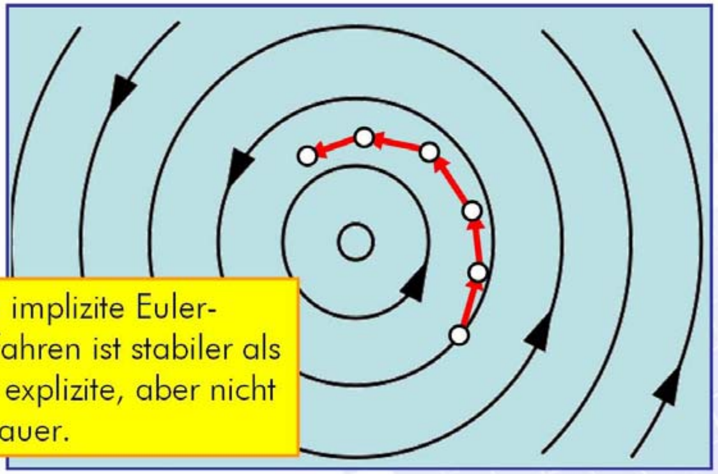
$$\mathbf{Id}\,\vec{x}_{i+1} - \tau \mathbf{A} \vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i$$

$$\boxed{\vec{x}_{i+1} = (\mathbf{Id} - \tau\,\mathbf{A})^{-1}\,\vec{x}_i}$$

  Im linearen Fall ist also auch hier eine *explizite* Berechnung der Partikelbahn möglich.
- Im Allgemeinen ist die Lösung der impliziten Gleichung allerdings aufwändiger und erfordert iterative Verfahren.

Implizites Euler-Verfahren

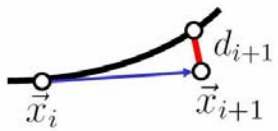
- ***Beispiel:*** *Zirkulares Vektorfeld* $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



Das implizite Euler-Verfahren ist stabiler als das explizite, aber nicht genauer.

Fehlerbetrachtung

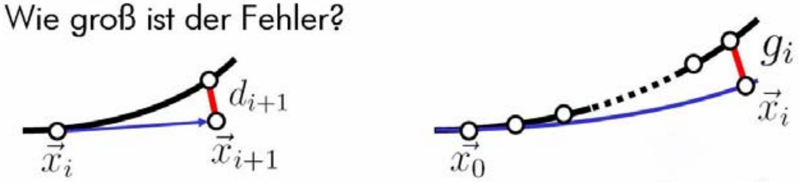
- Wie groß ist der Fehler?



- Der *<u>lokale</u> Diskretisationsfehler* (lok. Abbruchfehler) d_i ist der Fehler, der bei einem einzigen Schritt gemacht wird.
  - Er entsteht beim Abbrechen der Taylorreihe.

Fehlerbetrachtung

- Wie groß ist der Fehler?

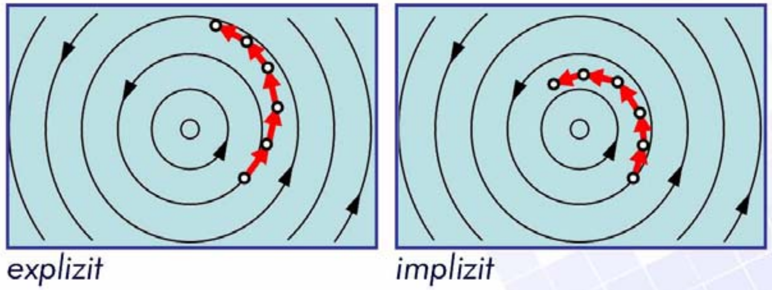


- Der *lokale Diskretisationsfehler* (lok. Abbruchfehler) d_i ist der Fehler, der bei einem einzigen Schritt gemacht wird.
  - Er entsteht beim Abbrechen der Taylorreihe.
- Der *globale Abbruchsfehler* g_i ist der Fehler, der durch Akkumulation der lokalen Fehler entsteht.
  - Er ist in der Regel eine Größenordnung höher als der lok. Fehler
- Jedes num. Integrationsverfahren hat eine *Fehlerordnung*:

Fehlerordnung $p: \quad g_i = o(\tau^p)\,, \;\; d_i = o(\tau^{p+1})$

Euler-Verfahren

- Das ***Euler-Verfahren*** *(explizit oder implizit)* hat die Fehlerordnung 1.



Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Idee: Kombiniere das explizite mit dem impliziten Euler-Verfahren:

- Versuche zunächst den nächsten Punkt „vorherzusagen" (Prädiktor) mit explizitem Euler Verfahren:

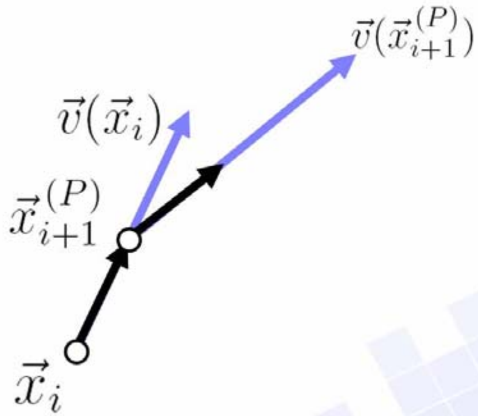
$$\vec{x}_{i+1}^{(P)} = \vec{x}_i + \tau\, \vec{v}(\vec{x}_i)$$

- Korrigiere diesen Wert durch einen impliziten Schritt:

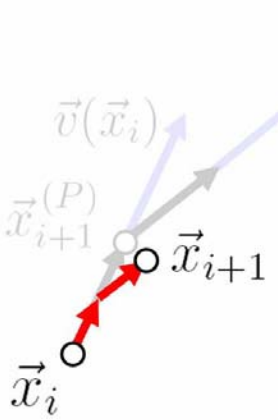
$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \frac{\tau}{2}\Big(\vec{v}(\vec{x}_i) + \vec{v}(\vec{x}_{i+1}^{(P)})\Big)$$

Explizites Heun-Verfahren
2. Ordnung

Heun'sches Verfahren



Heun'sches Verfahren



- *Heun* ist auf gewisse Weise der *Mittelwert* zwischen explizitem und implizitem Euler-Verfahren

auch Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung, *Fehlerordnung 2*

Fixpunkt-Iteration

Idee: Führe mehrere Prädiktor-Korrektor-Schritte hintereinander aus bis das Ergebnis konvergiert.

- Bestimme zunächst den nächsten Punkt vorherzusehen (Prädiktor) mit expliziten Euler Verfahren

$$\vec{x}_{i+1}^{(0)} = \vec{x}_i + \tau\,\vec{v}(\vec{x}_i)$$

- Korrigiere diesen Wert so lange, bis sich der Wert nicht mehr signifikant ändert.

$$\vec{x}_{i+1}^{(k+1)} = \vec{x}_i + \frac{\tau}{2}\Big(\vec{v}(\vec{x}_i) + \vec{v}(\vec{x}_{i+1}^{(k)})\Big)$$

Runge-Kutta-Verfahren

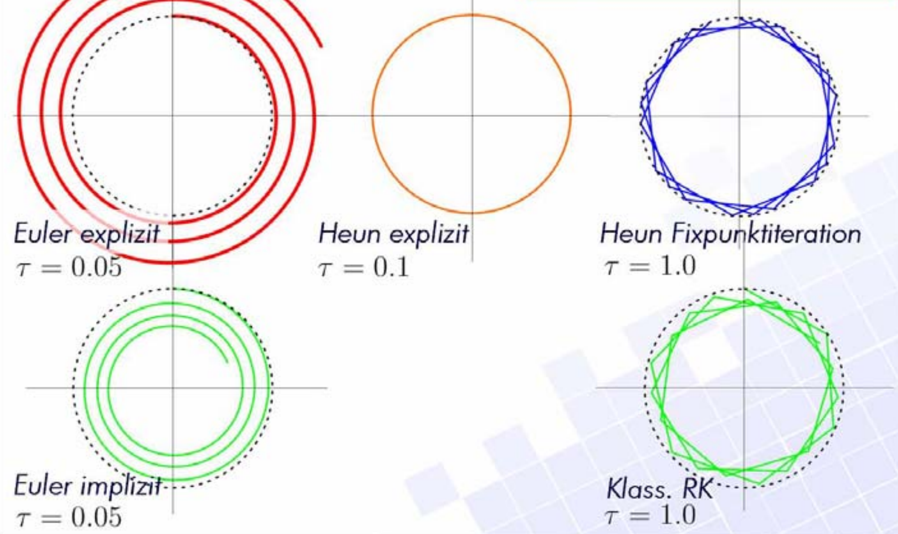
- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren (4.Ordnung)

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{v}(\vec{x}_i)\\
\vec{k}_2 &= \vec{v}(\vec{x}_i + \frac{1}{2}\tau\,\vec{k}_1)\\
\vec{k}_3 &= \vec{v}(\vec{x}_i + \frac{1}{2}\tau\,\vec{k}_2)\\
\vec{k}_4 &= \vec{v}(\vec{x}_i + \tau\,\vec{k}_3)\\
\vec{x}_{i+1} &= \vec{x}_i + \frac{1}{6}\tau(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)
\end{aligned}$$

- ***Fehlerordnung 4***

Vergleich

Beispiel: zirkulares Vektorfeld



Zusammenfassung

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Wir haben das Vektorfelder $\vec{v} = f(\vec{x})$ betrachtet, z.B. $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial\,\vec{x}}{\partial t} \qquad \boxed{\frac{\partial\,\vec{x}(t)}{\partial t} - \vec{v}(\vec{x}(t)) = 0}$$

Gewöhnliche Differentialgleichung, 1. Ordnung

Mit einer Nebenbedingung $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ spricht man von einer *Anfangswertaufgabe* (bzw. Anfangswertproblem).

Stabilität des Eulerverfahrens

- Beispiel (1-dimensional)

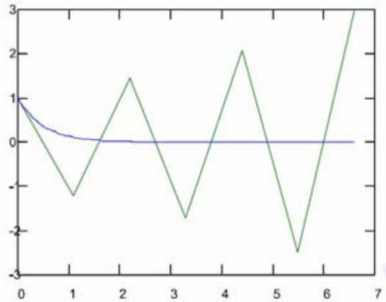
Differentialgleichung:

$$\frac{\partial\,x(t)}{\partial t} = -k \cdot x$$

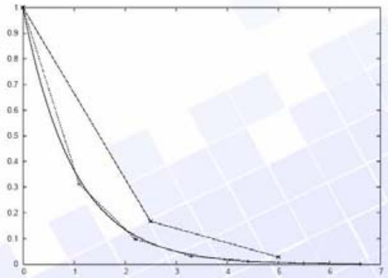
Analytische Lösung:

$$x(t) = x_0\, e^{-k\,t}$$

Numerische Lösung: Euler explizit



Numerische Lösung: Euler implizit



Fazit

Integrationsverfahren für gewöhnliche DGL.

Explizite Verfahren

- einfach zu berechnen
- numerisch *instabil* bei großen Schrittweiten

Implizite Verfahren

- i.A. aufwändig zu lösen
- numerisch *stabil*

Euler:
- *sehr einfach,*
- *ungenau*

Heun:
- *einfach,*
- *gut für kleine Schrittweiten*

Runge-Kutta:
- *aufwändiger,*
- *gut auch bei rel. großen Schritten*