

Computergraphik II

Winter 2011/2012

7 Subdivision-Kurven und -Flächen

Versionsdatum: 13. November 2011



Prof. Dr. Andreas Kolb
Computer Graphics & Multimedia Systems

-Folie 7-1-

Computergraphik II

7 Subdivision-Kurven und -Flächen ...



Grundlagen (Flächen)

Zielsetzung: Verbindung der Vorteile von Freiformflächen und Polygon-Netzen:

- effiziente Speicherung und einfache Kontrolle (Freiformflächen)
- beliebige komplexe Form ohne Teilflächen (Polygon-Netze)

Ansatz: Rekursive Verfeinerung (*Subdivision*) eines *groben Polygon-Netzes*

$$\mathcal{P}^0 \longrightarrow \mathcal{P}^1 \longrightarrow \dots \mathcal{P}^\infty \quad \text{so dass}$$

1. der Verfeinerungsprozess konvergiert
2. im Grenzfall ($\longrightarrow \infty$) eine glatte Fläche (C^1 oder C^2) entsteht

Arten von Punkten: Punkte des verfeinerten Netzes sind alte (*even*) oder neue (*odd*) Punkte

Arten von Subdivisions-Verfahren: *Approximierend* oder *interpolierend*



Prof. Dr. Andreas Kolb
Computer Graphics & Multimedia Systems

-Folie 7-2-

Computergraphik II

7 Subdivision-Kurven und -Flächen ...



Beispiel: Geri's Game, Pixar 1997



Prof. Dr. Andreas Kolb
Computer Graphics & Multimedia Systems

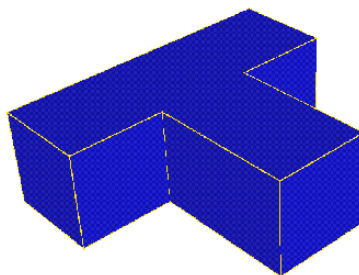
-Folie 7-3-

Computergraphik II

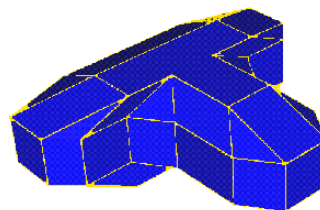
7 Subdivision-Kurven und -Flächen ...



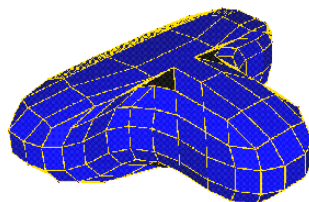
Beispiel:



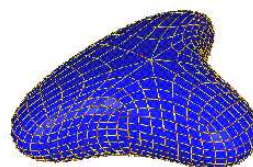
Ausgangsnetz



ein Subdivisionsschritt



zwei Subdivisionsschritte



drei Subdivisionsschritte



Prof. Dr. Andreas Kolb
Computer Graphics & Multimedia Systems

-Folie 7-4-

Computergraphik II

Subdivisions-Kurven nach Chaikin '74

Gegeben: Sequenz von $k + 1$ Punkten $\{P_0^0, \dots, P_k^0\}$

Subdivisionsregel: Auf jeder Kante werden *zwei* neue Punkte definiert:

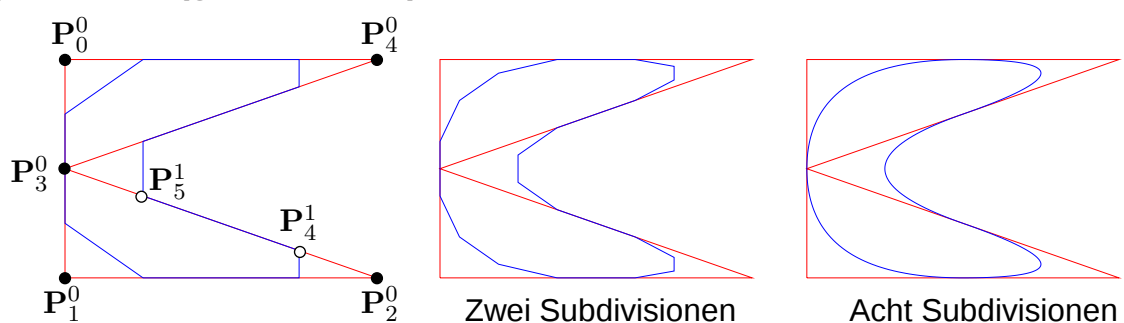
$$P_{2j}^{i+1} = \frac{3}{4}P_j^i + \frac{1}{4}P_{j+1}^i \quad P_{2j+1}^{i+1} = \frac{1}{4}P_j^i + \frac{3}{4}P_{j+1}^i$$

es ergibt sich ein *approximierendes Schema*.

Das Schema entspricht *quadratischen B-Splines*, insb. gilt die Konvexe-Hülle Eigenschaft

7.1 Subdivisions-Kurven ...

Beispiel-Kurve (geschlossen):



Erinnerung: Knoteneinfügen bei quadratischen B-Splines

- Gegeben: Uniformer Knotenvektor $T = 0, 1, 2, \dots, m + 3$
- Einfügen von Knoten bei $i + 0.5, i = 0, \dots, m + 2$ liefert genau das Chaikin-Schema

7.1 Subdivisions-Kurven ...



4-Point Subdivisions-Schema

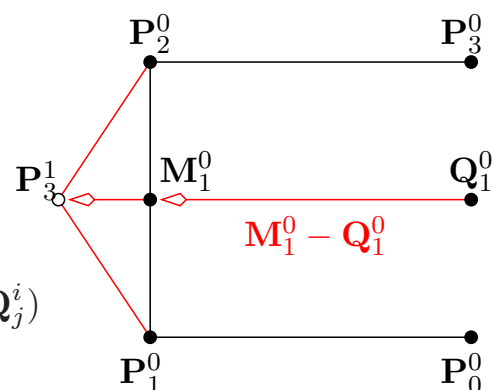
Gegeben: Sequenz von $k + 1$ Punkten $\{P_0^0, \dots, P_k^0\}$

Subdivisionsregel: Ein zusätzlicher neuer Punkt auf jeder Kante:

$$P_{2j}^{i+1} = P_j^i, \quad P_{2j+1}^{i+1} = \left(\frac{1}{2} + w\right) (P_j^i + P_{j+1}^i) - w (P_{j-1}^i + P_{j+2}^i)$$

Erläuterung der Konstruktion.

Kantenmitte $M_j^i = \frac{1}{2}(P_j^i + P_{j+1}^i)$
 Mitte Vor- u. Nachfolger $Q_j^i = \frac{1}{2}(P_{j-1}^i + P_{j+2}^i)$
 dann ist $P_{2j+1}^{i+1} = M_j^i + 2w(M_j^i - Q_j^i)$



7.1 Subdivisions-Kurven ...

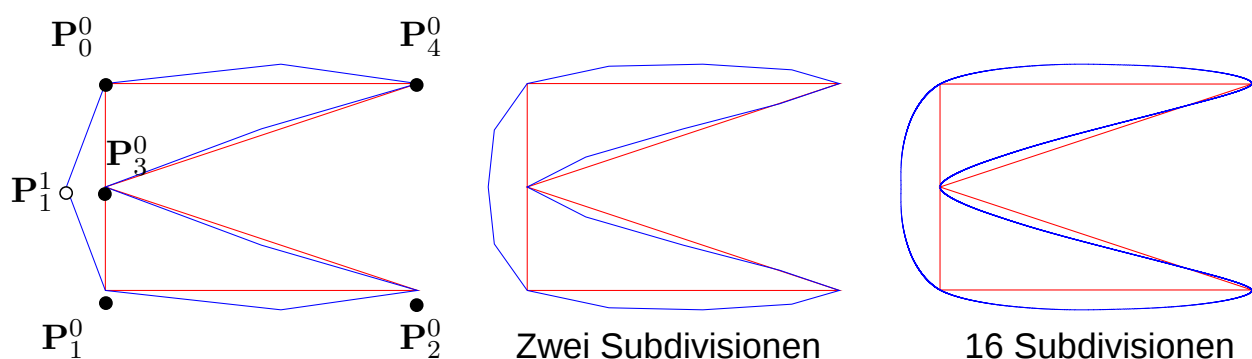


4-Point Subdivisions-Schema (Forts.)

Eigenschaften: Originalpunkte bleiben erhalten (*interpolierendes Schema*)

Für $w = \frac{1}{16}$ entsteht eine visuell glatte Kurve.

Beispiel-Kurve (geschlossen): $w = \frac{1}{16}$



7.2 Subdivisions-Flächen



Doo-Sabin Subdivision

Gegeben: 2-mannigfaltiges Polygon-Netz $\mathcal{P}^0$ mit den Eckpunkten $\mathbf{P}^0$

Subdivisionsregel: Betrachte Polygon $(\mathbf{P}_1^0, \dots, \mathbf{P}_k^0)$ von $\mathcal{P}^0$. Konstruktion:

$$\text{Flächenpunkt: } \mathbf{F} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i^0$$

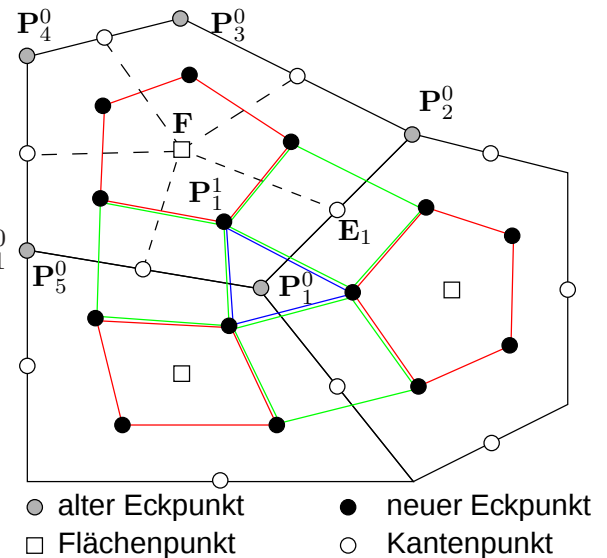
$$\text{Kantenpunkt: } \mathbf{E}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_i^0 + \mathbf{P}_{i+1}^0),$$

$$i = 1, \dots, k, \mathbf{P}_{k+1}^0 = \mathbf{P}_1^0$$

$$\text{Eckpunkt: } \mathbf{P}_i^1 = \frac{1}{4} (\mathbf{F} + \mathbf{E}_{i-1} + \mathbf{E}_i + \mathbf{P}_i^0)$$

In jedem Schritt entsteht

$\mathcal{P}^i$	$\mathcal{P}^{i+1}$
k -seitiges Polygon	k -seitiges Polygon
k -wertiger Eckpunkt	k -seitiges Polygon
Kante	4-seitiges Polygon



7.2 Subdivisions-Flächen ...



Subdivisions-Maske: Matrix-Darstellung eines Subdivisions-Schritts:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_k^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8k} \underbrace{\begin{pmatrix} 4k+2 & k+2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & k+2 \\ k+2 & 4k+2 & k+2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & k+2 & 4k+2 & k+2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 & k+2 & 4k+2 & k+2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & k+2 & 4k+2 & k+2 \\ k+2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & k+2 & 4k+2 \end{pmatrix}}_{=:S} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^0 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_k^0 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Doo-Sabin-Subdivisions-Schema:

- pro Polygon, innerem Eckpunkt und innerer Kante von $\mathcal{P}^0$ entsteht ein Polygon für $\mathcal{P}^1$
- Doo-Sabin Flächen verallgemeinert *quadratischer* B-Splineflächen.
- k -wertige Ecken/ k -seitige Flächen, $k \neq 4$ liefern für $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\infty$ *extraordinäre Punkte*:
 - Außerhalb dieser Punkte: $\mathcal{P}$ ist lokal C^1 -stetige, quadratische B-Splinefläche.
 - Extraordinäre Punkte: U.u. „unschönes“ Verhalten (keine eindeutige Tangentialebene)



7.2 Subdivisions-Flächen ...



Catmull-Clark Subdivisionsflächen

Gegeben: 2-mannigfaltiges Polygon-Netz $\mathcal{P}^0$

Subdivisionsregel: Betrachte Eckpunkt V^0 (Valenz k), angrenzende Punkte P_i^0 und Mittelpunkte F_i^1 , $i = 1, \dots, k$ der angrenzenden Polygone.

$$\text{Kantenpunkt: } P_i^1 = \frac{P^0 + P_i^0 + F_i^1 + F_{i-1}^1}{4}$$

Neue Lage des Eckpunktes:

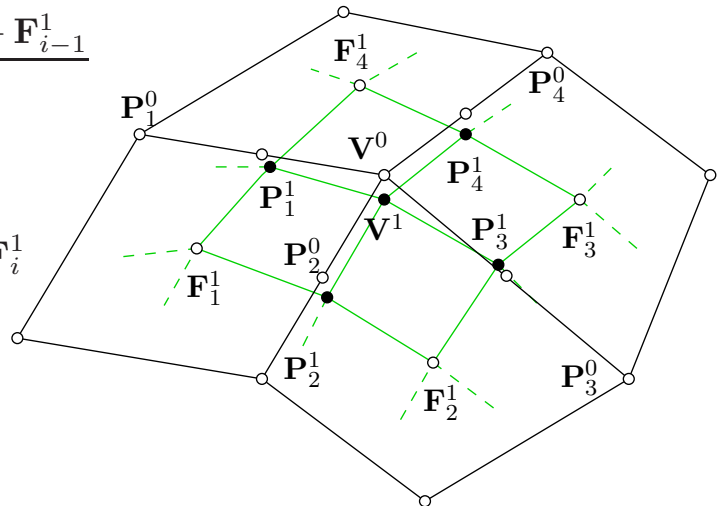
$$V^1 = \frac{k-2}{k} V^0 + \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k P_i^0 + \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k F_i^1$$

In jedem Schritt:

k -seitiges Polygon $\Rightarrow k$ Vierecke

k -wert. Eckp. $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow k$ -wert. Eckp.

k -seit. Polygon $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow k$ -wert. Eckp.

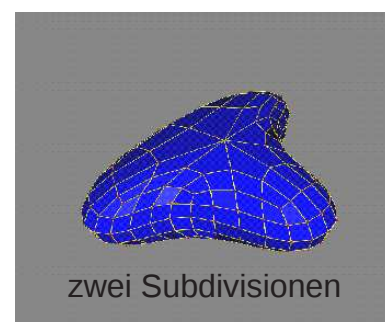
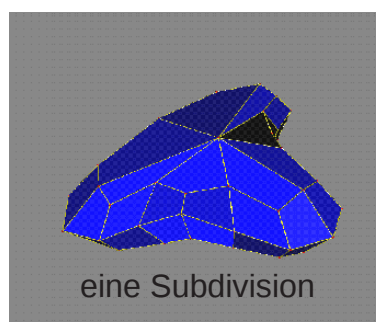
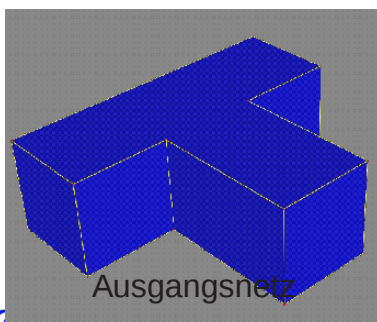


7.2 Subdivisions-Flächen ...



Eigenschaften des Catmull-Clark Subdivisions-Schemas

1. pro k -seitiges Polygon entstehen k Vierecke
2. Catmull-Clark Flächen sind eine Verallgemeinerung kubischer B-Splineflächen.
3. k -wertige Ecken/ k -seitige Flächen, $k \neq 4$ liefern für $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\infty$ extraordinary Punkte:
 - Außerhalb dieser Punkte: $\mathcal{P}$ ist lokal C^2 -stetige, kubische B-Splinefläche.
 - Extraordinäre Punkte: U.u. „unschönes“ Verhalten (geringere Stetigkeit)



7.2 Subdivisions-Flächen ...



Loop Subdivisionflächen (Ch. Loop 87)

Gegeben: 2-mannigfaltiges Dreiecks-Netz $\mathcal{P}^0$

Subdivisionsregel: Betrachte Eckpunkt V^0 (Valenz k) und angrenzende Punkte P_i^0 , $i = 1, \dots, k$

Neue Lage des Eckpunktes:

$$V^1 = (1 - \beta)V^0 + \beta \cdot \frac{1}{k}(P_1^0 + \dots P_k^0)$$

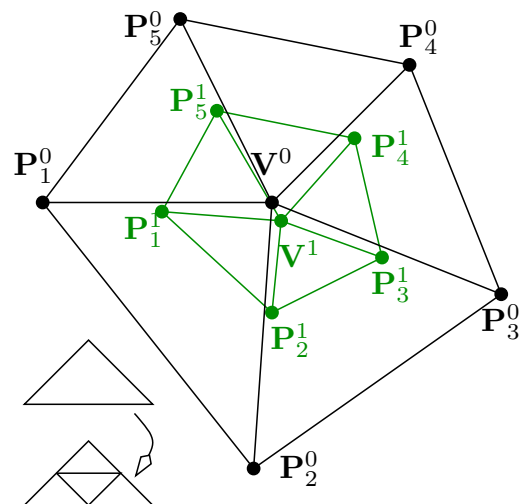
$$\beta = \frac{5}{8} - \frac{(3 + 2 \cos(2\pi/k))^2}{64}$$

Kantenmittelpunkt:

$$P_i^1 = \frac{3V^0 + 3P_i^0 + P_{i-1}^0 + P_{i+1}^0}{8}$$

In jedem Schritt:

Vier neue Dreiecke pro Dreieck



7.2 Subdivisions-Flächen ...



Eigenschaften des Loop-Subdivisions-Schema

1. jedes Dreieck wird in vier Dreiecke unterteilt
2. *extraordinäre Punkte* entstehen bei Eckpunkten mit Valenz $\neq 6$ (reguläre Valenz 6):
 - Außerhalb dieser Punkte: $\mathcal{P}$ ist lokal C^2 -stetig
 - Extraordinäre Punkte: U.u. „unschönes“ Verhalten (geringere Stetigkeit)

