Mathematische Grundlagen

Fachgruppe Computergraphik & Multimediasysteme

Universität Siegen

Version vom 29. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Zielsetzung . . . 1

1.2 Bezeichnungen . . . 2

2 Analysis **5**

2.1 Funktionen . . . 5

2.2 Mengen . . . 6

2.3 Eindimensionale, reellwertige Funktionen einer Variablen . . . 8

2.3.1 Stetigkeit . . . 8

2.3.2 Differenzierbarkeit . . . 9

2.4 Mehrdimensionale, reellwertige Funktionen einer Variablen . . . 10

2.5 Eindimensionale, reellwertige Funktionen mehrerer Variablen . . . 12

2.6 Dreidimensionale, reellwertige Funktionen zweier Variablen . . . 13

3 Lineare Algebra **15**

3.1 Vektoren, Matrizen, Vektorraum . . . 15

3.2 Vektor- und Matrixoperationen . . . 17

3.3 Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme . . . 20

3.4 Invertierbarkeit von Matrizen . . . 21

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Zielsetzung

Dieses Manuskript beschreibt die mathematischen Grundlagen, die zu den Vorlesungen der Fachgruppe Computergraphik & Multimediasysteme als bekannt vorausgesetzt werden.

Teilweise werden hier besprochene Inhalte auch in der Vorlesung detailiert behandelt bzw. in Übungen aufgegriffen.

Zudem dient das Manuskript der Festlegung einheitlicher Bezeichnungen und Verwendung von Fachtermini.

Disclosure - Was dieses Skript NICHT ist

Das Studium dieses Skriptes ist nicht für die Erarbeitung der Inhalte gedacht, wenn keinerlei Vorkenntnisse vorhanden sind. Hierzu werden Verweise auf entsprechende Fachliteratur gegeben.

In vielen Themenfeldern finden sich in der Fachliteratur alternative Bezeichnungen für Sachverhalte, teilweise sogar unterschiedliche Verwendungen eines Begriffes. Hierauf wird i.a. nicht eingegangen.

Hinweis

Dieses Skript ist im Aufbau begriffen und wird daher regelmäßig erweitert, angepaßt und ggf. korrigiert.

1.2 Bezeichnungen

Bezeichnung: Allgemeine Schreibweisen

Zahlenräume:

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1,2,3,4\ldots\}$	$\mathbb{N}^+$	natürliche Zahlen mit 0 $\{0,1,2,3\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$		
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen $\{p/q\ :\ p,q \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{Q}^+,\mathbb{Q}^-$	positive bzw. nagetive rationale Zahlen, z.B. $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q}\ :\ q > 0\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	$\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^-$	positive bzw. nagetive reele Zahlen, z.B. $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}\ :\ r > 0\}$
$\mathbb{R}_0^+,\mathbb{R}_0^-$	nicht-negative bzw. nicht-positive reelle Zahlen, z.B. $\mathbb{R}_0^- = \{a \in \mathbb{R}\ :\ r \leq 0\}$	$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen mit imaginärer Einheit i: $\mathbb{C} = \{a+ib\ :\ a,b \in \mathbb{R}\}\ i^2 = -1$

Vektorräume und Affine Räume:

A	allgemeiner affiner Raum	V	allgemeiner Vektorraum
M	allgemeine Menge (Großbuchstabe)	s	Skalar (Kleinbuchstabe)
$\mathbf{P}$	Punkt	$\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$	allgemeiner Vektor
$\hat{\mathbf{v}}$	normierter vektor (Länge 1)	α	Winkel (griechischer Buchstabe)
$\mathbf{M}$	allgemeine Matrix		

Operatoren für Vektoren:

$\vec{\mathbf{v}}^T = (v_1,\ldots,v_n)$	transponierter Vektor
$\lVert\vec{\mathbf{a}}\rVert = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$	Vektornorm (Länge des Vektors)
$\lvert s\rvert$	absoluter Betrag des Skalars
$\left(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$	inneres Produkt oder Punktprodukt
$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$	Vektorprodukt

Mengen:

$A \subset B,\ a \in A$	A ist Teilmenge von B, a ist Element von A
$[a,b] = \{c \in \mathbb{R} \ : \ a \leq c \leq b\}$	abgeschlossenes reelles Intervall
$]a,b[= \{c \in \mathbb{R} \ : \ a < c < b\}$	offenes reelles Intervall
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler affiner Raum über $\mathbb{R}$
$U_\varepsilon(\mathbf{P}) = \{\mathbf{Q} \ : \ \|\mathbf{Q}-\mathbf{P}\| < \varepsilon\}$	ε-Umgebung von $\mathbf{P}$ mit reellem $\varepsilon > 0$
∂M	Rand der Menge M
$\overline{M}$	Abschluß der Menge M
$\overset{\circ}{M}$	Inneres der Menge M

Quantoren:

$\exists$ „es existiert“; Beispiel:
$\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$: „es gibt ein reelles x, dessen Quadrat 4 ergibt“ (nämlich 2 und -2)

$\exists_1$ „es existiert genau ein“; Beispiel:
$\exists_1\, x \in \mathbb{R}^+ : x^2 = 4$: „es gibt genau ein positives reelles x, dessen Quadrat 4 ergibt“ (nämlich 2)

$\forall$ „für alle gilt“; Beispiel:
$\forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{R}$: „für jedes natürliche n gilt, dass es auch eine reelle Zahlen ist“

■

Kapitel 2

Analysis

Im folgenden werden ausschließlich *metrische Räume* A, also z.B. $A = \mathbb{R}^n$, betrachtet. Weiterführende Betrachtungen finden sich z.B. in [Heuser 1986, Höllig 2003].

2.1 Funktionen

Definition:

Gegeben sei ein metrischer Raum A.

Eine *Funktion* f ordnet jedem Element $\mathbf{X}$ einer *Definitionsmenge* $D \subset A$ genau ein Element $\mathbf{Y}$ der *Wertemenge* $W \subset A$ zuordnet[1].

Zeichen:

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & W \\ \mathbf{X} & \mapsto & \mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \end{array}$$

Die Funktion f ist

1. *injektiv* $:\Longleftrightarrow$ für jedes Paar $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_i \in D$ gilt: $f(\mathbf{X}_1) \neq f(\mathbf{X}_2)$
2. *surjektiv* $:\Longleftrightarrow$ für jedes $\mathbf{Y} \in W$ $\exists \mathbf{X} \in D$ mit $f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$
3. *bijektiv* $:\Longleftrightarrow$ sie injektiv und surjektiv ist

■

Lemma:

f ist genau dann bijektiv, wenn

1. $f(D) = W$ und
2. $\forall \mathbf{Y} \in W \; \exists_1 \mathbf{X} \in D : f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$

■

[1] Hier werden bewußt **potentiell mehrdimmensionale** Elemente (Punkte) $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ verwendet.

2.2 Mengen

Definition: Folgen

1. Eine *Folge* $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ ist eine Funktion

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ i & \mapsto & \mathbf{P}_i = f(i) \end{array}$$

2. Die Folge $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen* $\mathbf{Q}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon : \mathbf{P}_n \in U_\varepsilon(\mathbf{Q})$$

   $\mathbf{Q}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes*.

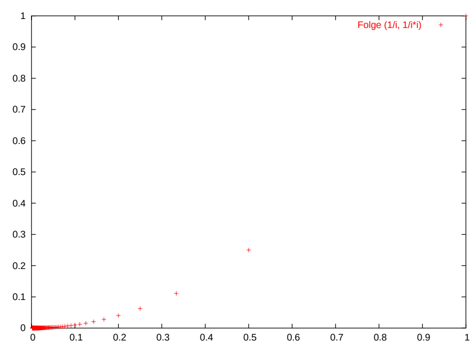
$\blacksquare$

Beispiel: Konvergente Folge

Für $A = \mathbb{R}^2$ ist die Folge

$$\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ \mathbf{P}_i = (1/i, 1/i^2)$$

konvergent gegen den Ursprung $(0,0)$.



$\blacksquare$

Definition: Offene und geschlossene Menge

1. Eine Menge $M \subset A$ ist *offen*, falls

$$\forall \mathbf{P} \in M\ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\mathbf{P}) \subset M \tag{2.1}$$

2. Eine Menge $M \subset A$ ist *abgeschlossen*, falls

$$\forall \{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergente Folge in } M \text{ mit Grenzwert } \mathbf{Q} : \mathbf{Q} \in M \tag{2.2}$$

$\blacksquare$

Beispiel:

1. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(\mathbf{P})$ von $\mathbf{P}$ ist selbst eine offene Menge, da $\forall \mathbf{Q} \in U_\varepsilon(\mathbf{P})$ die Umgebung $U_{\varepsilon_Q}(\mathbf{Q}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{P})$, falls $\varepsilon_Q < \varepsilon - \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\|$.

2. Nimmt man zu einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(\mathbf{P})$ die Punkte auf dem Kreis hinzu, also

$$M = U_\varepsilon(\mathbf{P}) \cup \{\mathbf{Q} \,:\, \|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\| = \varepsilon\} = \{\mathbf{Q} \,:\, \|\mathbf{P}-\mathbf{Q}\| \leq \varepsilon\}$$

so erhält man eine angeschlossene Menge

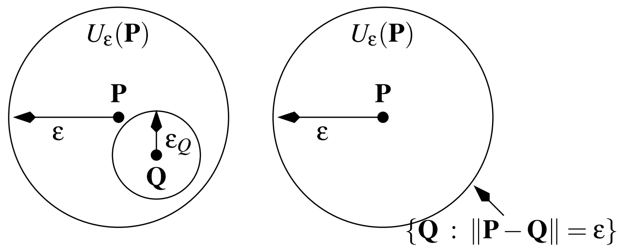


Abbildung 2.1: ε-Umgebung als offene Menge (links) und geschlossener Kreis (rechts)

■

<u>Definition:</u> Rand und Inneres einer Menge

1. Ein Punkt $\mathbf{P}$ ist ein *Randpunkt* der Menge $M \subset A$, falls für jedes $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(\mathbf{P})$ mindestens einen Punkt aus M und mindestens ein Punkt aus $A \backslash M$ enthält.

   Beachte: $\mathbf{P}$ muß nicht selbst Element von M sein!

2. Der *Rand einer Menge* M, ∂M, ist die Menge aller Randpunkte von M.

3. Ein Punkt $\mathbf{P} \in M$ ist ein *innerer Punkt* der Menge $M \subset A$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(\mathbf{P}) \subset M$.

4. Das *Innere* $\overline{M}$ *einer Menge* M ist die Menge aller inneren Punkte von M.

■

<u>Beispiel:</u>

1. $(0,0)$ ist ein Randpunkt der Menge $\{(1/i, 1/i^2 \,:\, i \in \mathbb{N}\}$ (vgl. Besipiel zu konvergenten Folgen).

2. Die Vereinigung einer Menge M mit ihrem Rand, also $M \cup \partial M$ ist stets abgeschlossen, da für jede konvergente Folge $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$ mit Grenzwert $\mathbf{Q}$ eine der Aussagen gilt:

   2.1. $\mathbf{Q} \in M$ oder

   2.2. $\mathbf{Q} \notin M$; in diesem Fall ist aber $\mathbf{Q}$ auf dem Rand von M, da $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ gegen $\mathbf{Q}$ konvergiert.

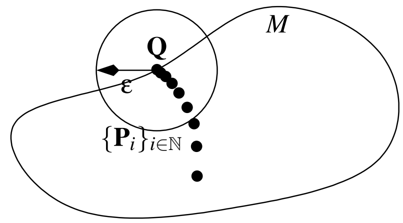


Abbildung 2.2: Eine gegen den Randpunkt **Q** konvergente Folge $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

■

2.3 Eindimensionale, reellwertige Funktionen einer Variablen

Im folgenden werden Funktionen in einer Variablen (hier x) in einer Dimension, also nach $y = f(x)$ betrachtet:

$$f : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

2.3.1 Stetigkeit

<u>**Definition:**</u> **Stetigkeit von Funktionen mit reeller Definitionsmenge**

Gegeben sei eine Funktion $f : D \longrightarrow W$, $D \subset \mathbb{R}$ und ein innerer Punkt $x \in D$.

f ist im Punkt $x \in D$

1. *linksseitig stetig* $:\Longleftrightarrow$ jede gegen x konvergente Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_i < x \;\forall i$ gilt
   1.1. die Folge $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist konvergent in W
   1.2. der Grenzwert von $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist $f(x)$
2. *rechtsseitig stetig* $:\Longleftrightarrow$ jede gegen x konvergente Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_i > x \;\forall i$ gilt
   2.1. die Folge $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist konvergent
   2.2. der Grenzwert von $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist $f(x)$
3. *stetig* $:\Longleftrightarrow$ f sowohl links- als auch rechtseitig stetig ist.

■

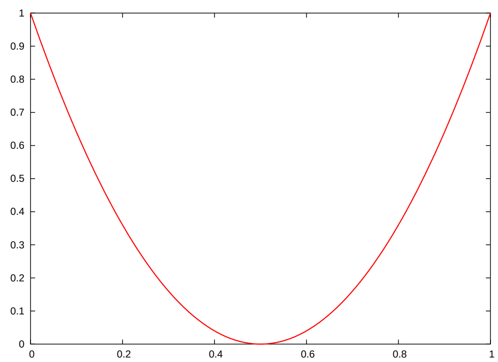
<u>**Beispiel:**</u>

1. Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$

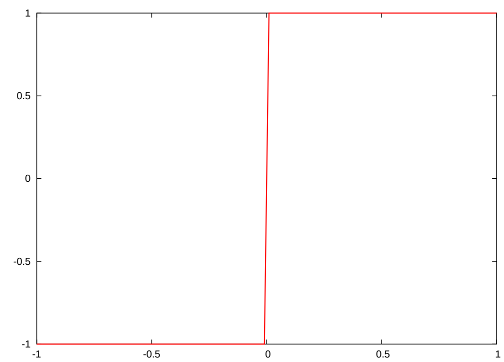
2. die Heavyside-Funktion

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

ist in $x = 0$ unstetig



Polynom vom Grad 2



Heavyside-Funktion

■

2.3.2 Differenzierbarkeit

<u>Definition:</u> Differenzierbarkeit

Gegeben sei die reelle Funktion $f: D \longrightarrow W$, $W, D \subset \mathbb{R}$ und der innere Punkt $x \in \mathring{D}$, d.h. $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset D$.

1. f ist in x *rechtsseitig differenzierbar* $:\Longleftrightarrow$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert und ist eindeutig.

2. f ist in x *linksseitig differenzierbar* $:\Longleftrightarrow$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert und ist eindeutig.

3. f ist in x *differenzierbar* $:\Longleftrightarrow$ der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert und ist eindeutig.

f' wird *Ableitung von* f genannt.

■

Bezeichnung:

1. $C(D)$ ist die Menge der über der Definitionsmenge D stetigen Funktionen
2. f heißt *stetig differenzierbar*, wenn
   2.1. f differenzierbar ist und
   2.2. f' stetig ist
3. $f^{(k)}(x),\ k \in \mathbb{N}$ ist die *k-te Ableitung von f* in x (so sie existiert)
4. f heißt *k-mal stetig differenzierbar*, wenn
   4.1. f k-mal differenzierbar ist und
   4.2. $f^{(k)}$ stetig ist
5. $C^k(D),\ k \in \mathbb{N}$ ist die Menge der über der Definitionsmenge D k-mal stetig differenzierbaren Funktionen

■

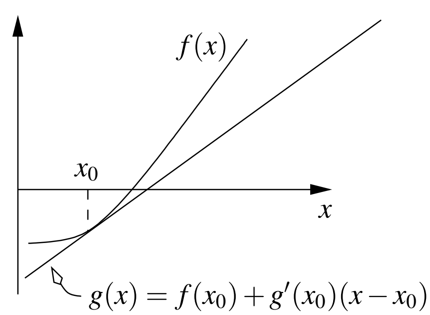
Lokale Linearisierung

Mit Hilfe der Ableitung f' einer Funktion

$$f : D \longrightarrow R, \quad D, W \subset \mathbb{R}$$

kann eine lokale Linearisierung $g(x)$ (oder „linare Approximation", „bestangepaßte Gerade") in einem Punkt $x_0 \in D$ bestimmt werden:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



2.4 Mehrdimensionale, reellwertige Funktionen einer Variablen

Im folgenden werden Funktionen in einer Variablen u in m Dimensionen mit $m > 1$ betrachtet:

$$\mathbf{f} : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R}^m \\ u & \mapsto & \mathbf{f}(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ \vdots \\ f_m(u) \end{pmatrix} \end{array}$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Für mehrdimensionale Funktionen reduziert sich die Stetigkeitsbetrachtung auf die Komponentenfunktionen f_i, d.h.:

$$\mathbf{f} \text{ ist in } u_0 \in D \text{ stetig} :\Longleftrightarrow f_i \text{ ist in } u_0 \in D \text{ stetig } \forall\, i = 1, \ldots, m$$

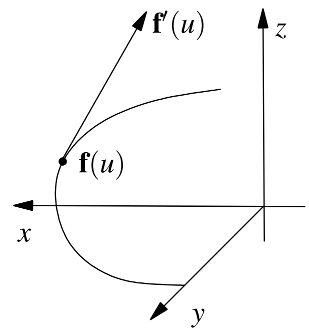
2. Analoges gilt für die Differenzierbarkeit:

$$\mathbf{f} \text{ ist in } u_0 \in D \text{ differenzierbar} :\Longleftrightarrow f_i \text{ ist in } u_0 \in D \text{ differenzierbar } \forall\, i = 1, \ldots, m$$

Konkret ist

$$\mathbf{f}'(u) = \begin{pmatrix} f_1'(u) \\ f_2'(u) \\ \vdots \\ f_m'(u) \end{pmatrix}$$

der *Tangentenvektor* an die Kurve im Punkte $\mathbf{f}(u)$

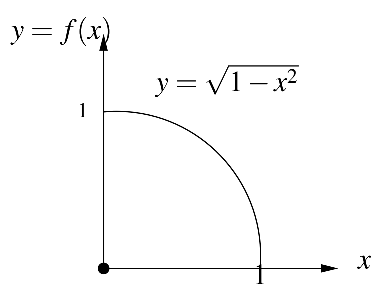


3. Die lokale Linearisierung für den Parameter u_0 ergibt sich analog zur eindimensionalen Funktion als Gerade im $\mathbb{R}^m$:

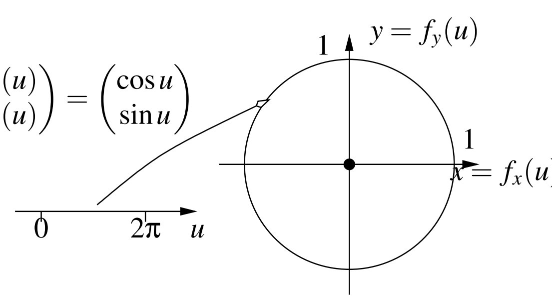
$$\mathbf{g}(u) = \mathbf{f}(u_0) + \mathbf{f}'(u_0)(u - u_0)$$

Bemerkung: Darstellung & Differenzierbarkeit

1. Anders als bei eindimensionalen Funktionen werden mehrdimensionale Funktionen i.a. nicht als Graph dargestellt. Die Darstellung erfolgt entkoppelt von der freien Variablen u.



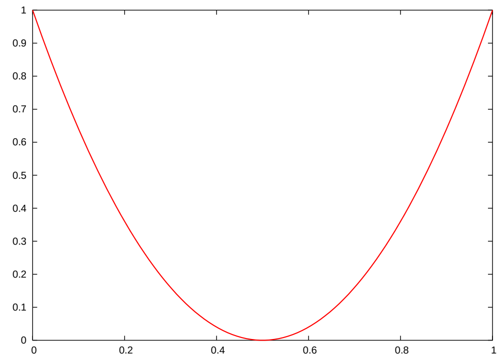
$$\mathbf{f}(u) = \begin{pmatrix} f_x(u) \\ f_y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$$



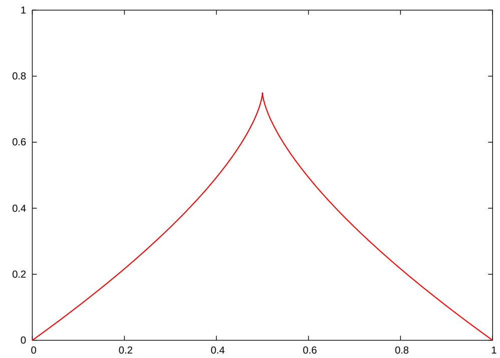
2. Durch die andere Darstellung gibt es andere Zusammenhänge zwischen der Ableitung $\mathbf{f}'$ und der geometrischen Form:

   2.1. Bei eindimensionalen Funktionen entspricht $f'(u) = 0$ einer *horiziontalen Tangente* an den Graphen von f

   2.2. Bei mehrdimensionalen Funktionen ist $\mathbf{f}'(u) = \vec{\mathbf{0}}$ eine *Singularität* der Kurve von $\mathbf{f}$, in der die weitere „Entwicklungsrichtung“ der Kurve unbestimmt ist. Damit kann auch für eine differenzierbare Funktion z.B. eine Spitze entstehen



Graph eines eindimensionalen Polynoms



Zweidimensionale Polynomkurve mit Spitze

■

2.5 Eindimensionale, reellwertige Funktionen mehrerer Variablen

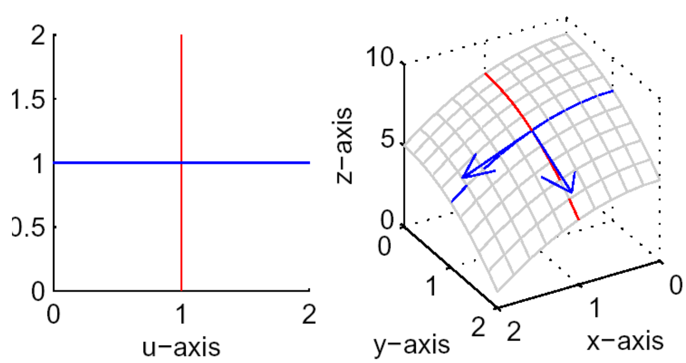
Eindimensionale Funktionen in n Variablen $\mathbf{X}$ stellen sich wie folgt dar:

$$f : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R} \\ \mathbf{X} & \mapsto & f(\mathbf{X}) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Im weiteren wird von $n = 2$ ausgegangen und die Benennung der Parameter auf (u, v) angepaßt. Damit entsteht eine Fläche, deren Graph angezeigt werden kann.

Partielle Ableitung

Wird nur einer der Parameter u, v verändert, entstehen Kurven auf der Fläche.



Die Ableitung dieser Kurven im Parameter (u_0, v_0) wird *partielle Ableitung* genannt[2]:

$$f_u(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u_0 + h, v_0) - f(u_0, v_0)}{h}$$
$$f_v(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u_0, v_0 + h) - f(u_0, v_0)}{h}$$

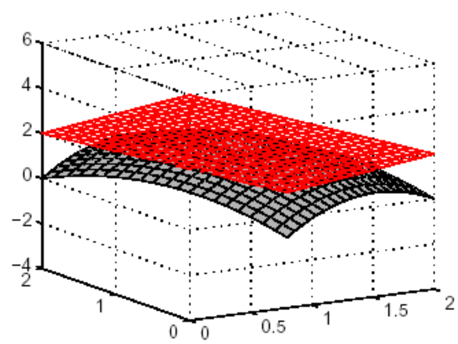
[2]Die Kurzform f_u, f_v ist nicht mit den Komonenten einer mehrdimensionalen Funktionen zu verwechseln

$f_u(u_0, v_0)$ entspricht der Steigung der Kurve in Richtung u (analog für v).

Lokale Linearisierung

In dem konkreten Fall $n = 2$ wird durch die beiden partiellen Ableitungen die *Tangentialebene* an den zugehörigen Punkt definiert:

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f(u_0,v_0) + f_u(u_0,v_0)(u-u_0) + f_v(u_0,v_0)(v-v_0) \\ &= f(u_0,v_0) + (f_u(u_0,v_0), f_v(u_0,v_0)) \cdot \begin{pmatrix} u-u_0 \\ v-v_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Die Normale $\hat{\mathbf{n}}$ an die Tangentialebene ist die *Flächennormale*.

2.6 Dreidimensionale, reellwertige Funktionen zweier Variablen

Folgender Funktionstypus wird bei der Modellierung von Flächen verwendet:

$$f: \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & W \subset \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & \mathbf{f}(u,v) = \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \\ f_3(u,v) \end{pmatrix} \end{array}$$

Bemerkung:

- die partiellen Ableitungen $f_u(u_0,v_0), f_v(u_0,v_0)$ sind *Tangentialvektoren*, die tangential an der Fläche anliegen und die Tangentialebene aufspannen
- wie bei Funktionen einer Variablen (Kurven) treten *Singularitäten* für $f_u(u_0,v_0) = \vec{\mathbf{0}}$ oder $f_v(u_0,v_0) = \vec{\mathbf{0}}$ auf, die Spitzen oder Kanten bilden können, obwohl die Funktion differenzierbar ist
- sind $f_u(u_0,v_0) \neq \vec{\mathbf{0}}$ und $f_v(u_0,v_0) \neq \vec{\mathbf{0}}$, dann berechnet sich der Normalenvektor zu

$$\hat{\mathbf{n}}(u_0,v_0) = \frac{f_u(u_0,v_0) \times f_v(u_0,v_0)}{\|f_u(u_0,v_0) \times f_v(u_0,v_0)\|}$$

■

Kapitel 3

Lineare Algebra

Das folgende Kapitel ist eine knappe Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe der Linearen Algebra. Weiterführende Betrachtungen finden sich z.B. in [Fischer 2003, Stöcker 1995].

3.1 Vektoren, Matrizen, Vektorraum

Definition: $\mathbb{R}$-Vektorraum

Eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen
$+ \;:\; V \times V \to V; \quad (\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}) \mapsto \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} \quad$ (Addition)
$\cdot \;:\; \mathbb{R} \times V \to V; \quad (\alpha, \vec{\mathbf{x}}) \mapsto \alpha\vec{\mathbf{x}} \quad$ (Skalarmultiplikation)
heißt *Vektorraum*, wenn gilt:

1. $(V, +)$ ist eine abelsche (kommutative) Gruppe, d.h. es gilt:
   a) *Abgeschlossenheit* $\quad (\forall\, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in V : \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} \in V)$
   b) *Assoziativität* $\quad (\forall\, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}} \in V : (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}))$
   c) Es gibt ein eindeutiges *Neutrales Element* (Identität) $\quad (\exists_1\, \vec{\mathbf{0}} \in V : \;\forall\, \vec{\mathbf{a}} \in V : \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{a}})$
   d) Es gibt ein eindeutiges *Inverses Element* $\quad (\forall\, \vec{\mathbf{a}} \in V : \exists_1\, (-\vec{\mathbf{a}}) \in V$ mit $\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{a}}) = -\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{0}})$
   e) *Kommutativität* $\quad (\forall\, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in V : \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}})$
   ($\vec{\mathbf{0}}$ ist der *Nullvektor* und $-\vec{\mathbf{x}}$ das *Negative*)
2. Es gelten außerdem folgende Gesetze bzgl. der Skalarmultiplikation:
   a) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \vec{\mathbf{x}} \in V :\ \alpha(\beta\vec{\mathbf{x}}) = (\alpha\beta)\vec{\mathbf{x}}$
   b) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in V :\ \alpha(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = \alpha\vec{\mathbf{x}} + \alpha\vec{\mathbf{y}}$
   c) $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \vec{\mathbf{x}} \in V :\ (\alpha + \beta)\vec{\mathbf{x}} = \alpha\vec{\mathbf{x}} + \beta\vec{\mathbf{x}}$
   d) $\forall\, \vec{\mathbf{x}} \in V :\ 1\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}$

■

Definition: Reeller Vektor, Matrix

Elemente eines Vektorraumes heißen Vektoren.
Ein Element des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ heißt reeller Vektor und entspricht einer Liste von n Zahlen

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Eine reelle $m \times n$-Matrix ist ein rechteckiges Schema von reellen Zahlen mit m Zeilen und n Spalten (merke: <u>Z</u>eile <u>z</u>uerst, <u>S</u>palte <u>s</u>päter):

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

■

<u>Definition:</u> Transponierte Vektoren, Matrizen

Man unterscheidet zwischen Zeilen- und Spaltenvektor. Ein Zeilenvektor wird durch Transposition zum Spaltenvektor:

$$(x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Im Falle einer $m \times n$-Matrix entspricht eine Transposition der Vertauschung aller Indizes bzw. der Spiegelung an der Diagonalen:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

■

<u>Definition:</u> Linearkombination

Seien $\vec{\mathbf{w}}_1, \dots, \vec{\mathbf{w}}_k \in V$ Vektoren in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ reelle Skalare. Man nennt eine Summe $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{w}}_i$ Linearkombination der Vektoren $\vec{\mathbf{w}}_1, \dots, \vec{\mathbf{w}}_k$.

■

<u>Definition:</u> Basis eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes

Eine Menge von Vektoren $B = \{\vec{\mathbf{w}}_1, \dots, \vec{\mathbf{w}}_k\} \subseteq V$ eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V heißt *Basis von* V, wenn:

1. die Vektoren $\vec{\mathbf{w}}_1, \dots, \vec{\mathbf{w}}_k$ linear unabhängig sind, d.h. wenn kein Vektor $\vec{\mathbf{w}}_i$ mit $i \in \{1, \dots, k\}$ als Linearkombination $\vec{\mathbf{w}}_i = \sum_{j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{i\}} \alpha_j \vec{\mathbf{w}}_j$ der übrigen Vektoren dargestellt werden kann,

2. und wenn die Vektoren $\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_k$ den gesamten Raum V aufspannen, d.h. wenn es für alle $\vec{\mathbf{v}} \in V$ Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt mit:
$$\vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{\mathbf{w}}_i.$$
Bemerkung: $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ sind durch B und $\vec{\mathbf{v}}$ eindeutig bestimmt.

■

Definition: Dimension eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes

Sei $B = \{\vec{\mathbf{w}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{w}}_k\} \subseteq V$ eine Basis eines Vektorraumes V. Dann ist k die *Dimension* des Vektorraumes V.

■

Beispiel: Basis

1. Die Vektorenmenge
$$\left\{ \vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3 \in \mathbb{R}^3$$
bildet eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Man nennt diese Basis die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.
2. Die Menge $\{x^0, x^1, x^2\}$ bildet eine Basis des Vektorraumes aller quadratischer Polynome.
3. Die Menge
$$\left\{ \vec{\mathbf{w}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{w}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{w}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2, \vec{\mathbf{w}}_3 \in \mathbb{R}^3$$
ist *keine* Basis von $\mathbb{R}^3$, da $\vec{\mathbf{w}}_3$ von $\vec{\mathbf{w}}_2$ linear abhängig ist.
4. Die Menge
$$\left\{ \vec{\mathbf{w}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{w}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit } \vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2 \in \mathbb{R}^3$$
ist *keine* Basis von $\mathbb{R}^3$, da beispielsweise $\vec{\mathbf{v}} = (0,0,2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{\mathbf{w}}_1, \vec{\mathbf{w}}_2$ dargestellt werden kann.

■

3.2 Vektor- und Matrixoperationen

Definition: Inneres Produkt zweier Vektoren

Seien $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren. Dann ist das *innere Produkt* (auch *Skalarprodukt*) $(\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}})$ definiert als eine Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit:
$$(\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

■

Definition: **Länge eines Vektors**

Sei $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. dann ist die Länge von $\vec{\mathbf{x}}$ gegeben durch:

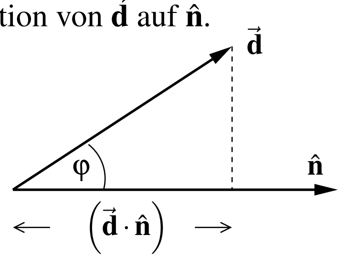
$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \sqrt{(\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{x}})}$$

Man nennt einen Vektor der Länge 1 einen *normierten* Vektor. Man schreibt für normierte Vektoren $\hat{\mathbf{x}}$ anstelle von $\vec{\mathbf{x}}$.

■

Bemerkung:

1. Das innere Produkt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ oder im $\mathbb{R}^3$ ist genau dann 0, wenn beide Vektoren orthogonal zueinanderstehen.
2. Das innere Produkt zweier Vektoren $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ hängt auch mit dem Cosinus des Winkels φ zwischen den beiden Vektoren zusammen:
$$(\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{y}}) = \|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\| \cdot \cos\varphi$$
3. Seien $\vec{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{n}}$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ normiert ist. Dann entspricht $\left(\vec{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\right)$ der Länge der orthogonalen Projektion von $\vec{\mathbf{d}}$ auf $\hat{\mathbf{n}}$.



■

Definition: **Kreuzprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$**

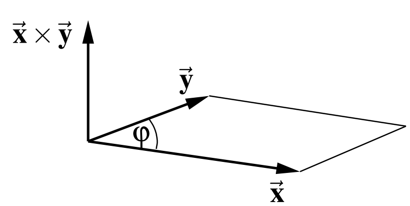
Seien $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren. Dann ist das *Kreuzprodukt* (auch Vektorprodukt) $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}$ definiert als eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

■

Bemerkung:

1. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ im $\mathbb{R}^3$ entspricht einem Vektor, der sowohl orthogonal zu $\vec{\mathbf{x}}$ als auch zu $\vec{\mathbf{y}}$ ist. Die Richtung dieses Vektors hängt von der Reihenfolge der Operanden ab.



2. Es gilt für Vektoren $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$ im $\mathbb{R}^3$
$$\|\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{y}}\| = \|\vec{\mathbf{x}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{y}}\| \cdot \sin(\varphi),$$
wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

■

Definition: Matrix-/Vektormultiplikation

Seien $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine $m \times n$-Matrix und $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit reellen Komponenten. Die Multiplikation $\mathbf{M}\vec{\mathbf{v}}$ ist definiert als Abbildung $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{M}\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}x_1 + x_{12}x_2 + \dots + x_{1n}x_n \\ x_{21}x_1 + x_{22}x_2 + \dots + x_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_{m1}x_1 + x_{m2}x_2 + \dots + x_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

■

Definition: Matrizenmultiplikation

Seien $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ Matrizen mit reellen Komponenten. Die Multiplikation $\mathbf{MN}$ ist definiert als Abbildung $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}^{m\times p}$:

$$\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} + \dots + x_{1n}y_{n1} & x_{11}y_{12} + \dots + x_{1n}y_{n2} & \dots & x_{11}y_{1p} + \dots + x_{1n}y_{np} \\ x_{21}y_{11} + \dots + x_{2n}y_{n1} & x_{21}y_{12} + \dots + x_{2n}y_{n2} & \dots & x_{21}y_{1p} + \dots + x_{2n}y_{np} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}y_{11} + \dots + x_{mn}y_{n1} & x_{m1}y_{12} + \dots + x_{mn}y_{n2} & \dots & x_{m1}y_{1p} + \dots + x_{mn}y_{np} \end{pmatrix}$$

■

Bemerkung: Multiplikation von Matrizen

1. Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ, d.h.:
$$\exists\, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p} : \quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$
2. Es gilt für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$:
$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$
3. Das Neutrale Element bzgl. der Matrizenmultiplikation ist die Matrix $\mathbf{Id}$:
$$\mathbf{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
Es gilt für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$:
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Id} = \mathbf{Id} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

■

3.3 Lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme

Definition: Lineare Abbildung

Eine Abbildung $L: V \to W$ über $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W heißt *linear*, falls gilt:

1. $\forall\, \vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}} \in V: \; L(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}) = L(\vec{\mathbf{x}}) + L(\vec{\mathbf{y}})$
2. $\forall\, \vec{\mathbf{x}} \in V, \alpha \in \mathbb{R}: \; L(\alpha\vec{\mathbf{x}}) = \alpha L(\vec{\mathbf{x}})$

■

Bemerkung: Lineare Abbildung

Jede lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist eine Matrixabbildung, d.h. es gibt eine (bzgl. einer festen Basis) eindeutige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $L(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}$. ■

Definition: Lineares Gleichungssystem

Ein Lineares Gleichungssystem (kurz LGS) hat die Form $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, wobei $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$. Falls $\vec{\mathbf{b}}$ der Nullvektor ist, so spricht man von einem *homogenen* Gleichungssystem. Man spricht von einem Gleichungssystem, weil die Lösung $\vec{\mathbf{x}}$ als Liste von skalaren Lösungen einzelner skalarer Gleichungen betrachtet werden kann:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zu:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

■

Bemerkung: Lösen eines LGS

Falls ein LGS eine Lösung besitzt, so kann diese mit Hilfe des *Gaußschen Eliminationsverfahren* bestimmt werden. Dabei wird die linke Seite der Gleichung durch *Zeilenoperationen* auf eine reduzierte Zeilentreppenform gebracht. Je nach Anzahl nicht-leerer Zeilen gibt es eine, unendlich viele oder keine Lösungen. ■

Beispiel: Gaußsches Eliminationsverfahren

Wir wollen folgendes Gleichungssystem mit reellen Komponenten und unbekannten Größen $x_1, x_2, x_3 \in R$ lösen:

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 6 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = & 4 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

1. Schritt: Elimination von x_1 in den letzten beiden Gleichungen (Zeile 2 + 3 mal Zeile 1, Zeile 3 − Zeile 1):

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ & 2x_2 & +7x_3 & = & 12 \\ & 2x_2 & +2x_3 & = & 2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

2. Schritt: Elimination von x_2 aus der dritten Gleichung (Zeile 3 − Zeile 2):

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ & 2x_2 & +7x_3 & = & 12 \\ & & -5x_3 & = & -10 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

■

3.4 Invertierbarkeit von Matrizen

Definition: Inverse einer Matrix

Sei $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $n \times n$-Matrix. Für die *inverse* Matrix $\mathbf{M}^{-1}$ gilt:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Bemerkung: Inverse

Ein LGS $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ (mit $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$) kann umgeformt werden zu $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{b}}$, falls die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

■

Bemerkung: Schema zur Berechnung der Inversen

Falls die Inverse einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ existiert, dann kann sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens berechnet werden. Hierzu ein einfaches Beispiel:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\mathbf{A}|\mathbf{Id}} \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)}_{\mathbf{Id}|\mathbf{A}^{-1}}$$

■

Definition: Determinante einer Matrix

Die *Determinante* einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ mit reellen Komponenten a_{ij} (mit $i, j \in \{1, \dots n\}$) ist eine reelle Zahl, die die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

1. Falls $\mathbf{A}$ eine obere Dreiecksmatrix ist (d.h. die Komponenten unterhalb der Diagonalen sind 0), dann ist die Determinante von $\mathbf{A}$ das Produkt ihrer Diagonalkomponenten:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdots a_{nn}$$

2. Es gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$$

3. Sei B eine weitere $n \times n$-Matrix, dann gilt:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$$

■

Bemerkung: Determinante

1. Die Determinante einer 2×2-Matrix wird nach dem folgenden Schema berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. Die Determinante einer 3×3-Matrix wird nach dem folgenden Schema berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

■

Bemerkung: Wichtige Eigenschaften der Determinante

1. Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0$$

2. Falls $\mathbf{A}^{-1}$ existiert, dann gilt:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

■

Literaturverzeichnis

[Fischer 2003] FISCHER, G., 2003. Lineare Algebra. Vieweg-Verlag, 14. Auflage.

[Heuser 1986] HEUSER, H. 1986. *Lehrbuch der Analysis (Band 1 und 2)*. Teubner.

[Höllig 2003] HÖLLIG, K., 2003. Mathematik Online Kurs – Analysis mehrerer Veränderlicher.
http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs15/kurs15_broschuere.pdf.

[Stöcker 1995] STÖCKER, H., 1995. Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Verlag Harri Deutsch.