



Virtual Reality

Sommer 2012

5 Echtzeitanimation und -simulation

Versionsdatum: 18. Juni 2012



Prof. Dr. Andreas Kolb
Computer Graphics & Multimedia Systems

-Folie 5-1-

Virtual Reality

5 Echtzeitanimation und -simulation ...



Ziele:

Realitätsnahe Bewegung: Beobachter und anderer Objekte

Systemreaktion: Korrektes Verhalten bei Ausnahmesituationen, insb. Kollision

Weitergehend: ○ physikalisch basierte Interaktion, z.B. Greifen
○ physikalische Simulation, z.B. Strömungsvisualisierung

Simulationsschleife: Darstellung und Animation in Echtzeit gekoppelt.

1. Sensoren einlesen: Beobachterposition in CAVE, Mausposition bei Desktop-VR
2. Simulation: Neue Positionen und Orientierungen aufgrund
 - 2.1. dynamischer Bewegung (z.B. fahrendes Auto mit Fahrrichtung und Geschwindigkeit)
 - 2.2. Sensoren-Information (z.B. veränderter Beobachter)
 - 2.3. Reaktion auf Kollision
3. Szenengraph aktualisieren und rendern



Prof. Dr. Andreas Kolb
Computer Graphics & Multimedia Systems

-Folie 5-2-

Virtual Reality

5.1 Einfache Bewegungsmodelle



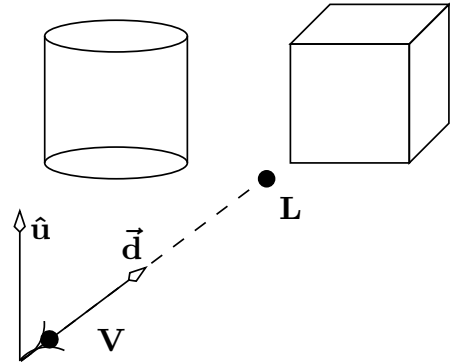
Ziel:

Einfaches Bewegungsmodell für Beobachter (Desktop-VR)

Interaktionsdevice: 2D-Maus.

Umsetzung: Manipulation von

- Beobachterposition V
- Bewegungsrichtung \vec{d} bzw. Lookat-Punkt L
- up-Vektor \hat{u} ist fix



Ansatz: Walk-Bewegung

Bewegung auf einer Ebene (*ground*; hier $z - x$ -Ebene)

Interaktion: Horizontale bzw. vertikale Mausbewegung; Interaktionsdaten:

1. $\alpha \in [-1, 1]$ Geschwindigkeit in Blickrichtung
2. $\beta \in [-1, 1]$ Rotation der Blickrichtung ($\beta < 0$ math. negativ=rechts)



5.1 Einfache Bewegungsmodelle ...

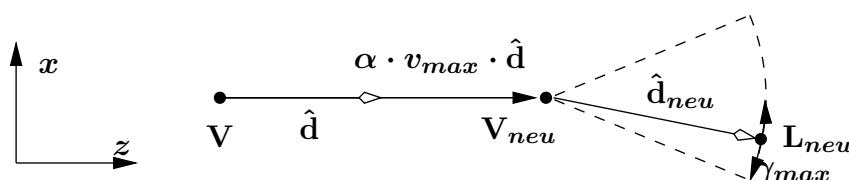


Ansatz: Walk Bewegung (Forts.)

Integration: Annahme einer konstanten Geschwindigkeit über das Intervall $\Delta t \Rightarrow$ Euler-Integration

Linearbewegung: aktuelle Richtung (normiert): \hat{d} , $L = V + \hat{d}$
 max. Geschwindigkeit: v_{max} in $[m/s]$
 akt. Geschwindigkeit: $\vec{v}(\alpha) = \alpha v_{max} \hat{d}$, $\alpha \in [-1, 1]$
 Zeitschritt: $V_{neu} = V_{alt} + \vec{v}(\alpha) \Delta t$, $L_{neu} = V_{neu} + \hat{d}$

mit Orientierung: max. Winkelgeschwindigkeit: γ_{max} in $[Grad/s]$
 akt. Winkelgeschwindigkeit: $\gamma(\beta) = \beta \gamma_{max}$, $\beta \in [-1, 1]$
 Zeitschritt: $V_{neu} = V + \vec{v}(\alpha) \Delta t$, $\hat{d}_{neu} = R_{y, \gamma(\beta) \cdot \Delta t} \hat{d}$,
 und $L_{neu} = V_{neu} + \hat{d}_{neu}$



5.1 Einfache Bewegungsmodelle ...



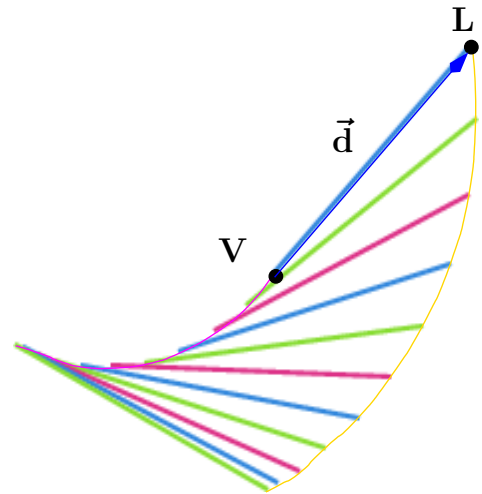
Beispiel: Walk-Bewegung

Ausgangssituation ($z - x$ -Ebene):

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$v_{max} = 200 \quad \gamma_{max} = 100 \quad \Delta t = 0.1$$

α	β	$\vec{v}(\alpha)$ (v_z, v_x)	$\gamma(\beta)$	\mathbf{V}_{neu} (d_z, d_x)	\vec{d}_{neu} (v_z, v_x)
-1.00	-1.00	(-141,-141)	-100	(285,285)	(115,81)
-0.99	-0.99	(-162,-113)	-99	(269,274)	(128,59)
-0.96	-0.96	(-173,-81)	-96	(252,266)	(136,37)
-0.91	-0.91	(-175,-48)	-91	(234,261)	(140,15)
-0.84	-0.84	(-166,-18)	-84	(218,259)	(141,-4)
-0.75	-0.75	(-149,5)	-75	(203,260)	(139,-23)
-0.64	-0.64	(-126,21)	-64	(190,262)	(136,-38)
-0.51	-0.51	(-98,27)	-51	(180,265)	(132,-50)
-0.36	-0.36	(-67,25)	-36	(173,267)	(128,-58)
-0.19	-0.19	(-34,15)	-19	(170,269)	(126,-63)
0.00	0.00	(0,0)	0	(170,269)	(126,-63)



5.1 Einfache Bewegungsmodelle ...



Weitere Bewegungsarten

Walk: Kollision führt u.U. zu Anpassung der y -Werte („erklettern“).

Fly: Wie Walk, nur ohne Schwerkraft, d.h. \vec{v} hat „echte“ y -Komponente

Examine: Lookat-Punkt \mathbf{L} bleibt fixiert, Variation des Beobachterpunktes:

Orientierung: max. Winkelgeschwindigkeit: γ_{max} (x -Achse), δ_{max} (y -Achse)
in [Grad/s]

akt. Winkelgeschwindigkeit: $\gamma(\alpha) = \alpha \gamma_{max}$, $\delta(\beta) = \beta \delta_{max}$

Zeitschritt: $\hat{d}_{neu} = R_{y,\delta(\beta) \cdot \Delta t} R_{x,\gamma(\alpha) \cdot \Delta t} \hat{d}$

$\mathbf{V}_{neu} = \mathbf{L} - \hat{d}_{neu}$

Problem: Rotation jeweils in Weltkoordinaten (besser in VC)



5.2 Keyframebasierter Ansatz



Einsatz: Vorgabe deterministischer Positionspfade (keine/eingeschränkte Interaktion)

Gegeben: Zeitpunkte t_i , $i = 1, \dots, N$, sowie *Key-Parameter*, z.B. Positionswerte P_i , aber auch Farben oder andere Attribute

Gesucht: Kurve C , die bei t_i die vorgegebenen Werte interpoliert: $C(t_i) = P_i$

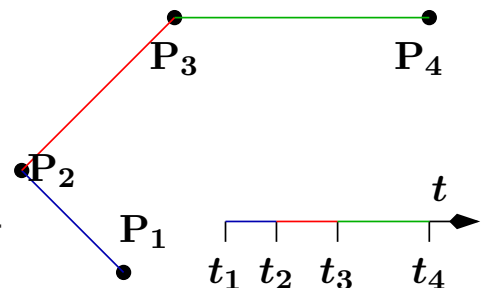
Ansatz: Lineare Interpolation

Sehr einfache Möglichkeit zur Interpolation:

$$C(t) = (1 - s)P_i + sP_{i+1},$$

$$s = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \text{ falls } t \in [t_i, t_{i+1}[$$

- konstante Geschwindigkeit zwischen Positionen
- keine glatte Bewegung (Geschwindigkeits-Sprung)



5.3 Rigid Body Simulation

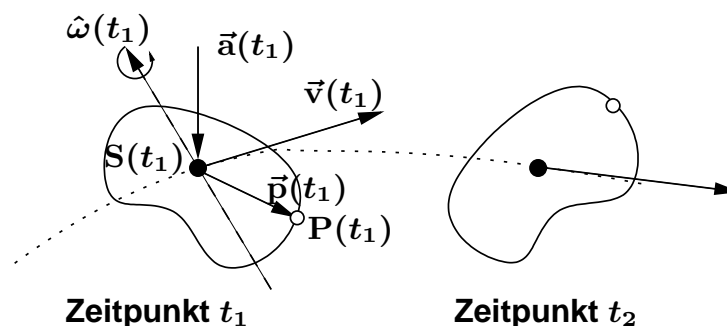


Ansatz: Betrachte Bewegung *starrer Objekte*; später: Kollisionsbehandlung

Zerlegung der Objektgeschwindigkeit in

Lineare Bewegung: Bewegung des Schwerpunkts S

Rotationsbewegung: Relative Bewegung zum Schwerpunkt: Rotation um Achse $\hat{\omega}$



Schwerpunkt S

Ortsvektor \vec{p}

Lineare Geschw. \vec{v}

Partikel P

Beschleunigung \vec{a}

Drehachse $\hat{\omega}$

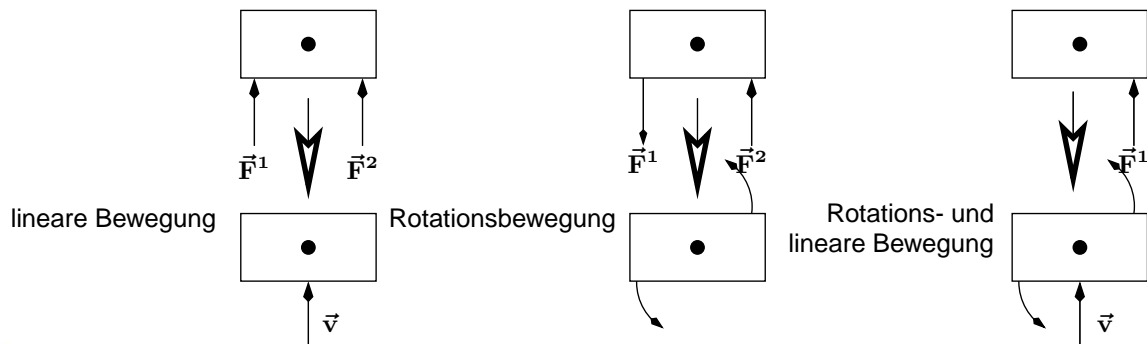


5.3 Rigid Body Simulation ...



Voraussetzung: Starrkörper

- Objekt besteht aus Partikeln P^i (Massepunkte ohne Ausdehnung)
- Attribute des Partikels P^i
 - Masse m^i
 - feste Position bzgl. des Schwerpunkts S mit Ortsvektor \vec{p}_0^i bzgl. Objektkoordinaten
- Krafteinfluß: Kräfte versetzen ein Objekt in Bewegung:



5.3 Rigid Body Simulation ...



Lineare Bewegung

Physikalische Größen:

Masse:	m , Einheit $[kg]$	Position:	P , Einheit $[m]$
Geschwindigkeit:	\vec{v} , Einheit: $[m/s]$	Beschleunigung:	\vec{a} , Einheit: $[m/s^2]$
Kraft:	\vec{F} , Einheit: $[\frac{kg \cdot m}{s^2}]$	Impuls:	\vec{P} , Einheit: $[\frac{kg \cdot m}{s}]$

Grundsätzliche Zusammenhänge:

- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ („Kraft ist Masse mal Beschleunigung“)
- $\vec{P} = m \cdot \vec{v}$ („Impuls ist Masse mal Geschwindigkeit“), $\dot{\vec{P}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$

Zeitliche Abhängigkeit mit Euler-Integration über Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt \quad \vec{a} \equiv_{=} const \quad \vec{v}(t_0) + \Delta t \cdot \vec{a}$$

$$P(t_1) = P(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) dt \quad \vec{v} \equiv_{=} const \quad P(t_0) + \Delta t \cdot \vec{v}$$



5.3.1 Die 2D-Situation



Bewegung in 2D

Betrachtung eines Partikels P auf dem Körper (in WC)

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{R}(t)\vec{p}_0 = \mathbf{S}(t) + \vec{p}(t)$$

mit Schwerpunkt S , Ortsvektor \vec{p}_0 , \vec{p} von P in MC bzw. WC relativ zu S und Rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$.

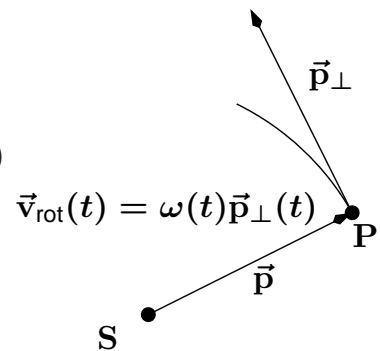
Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des Körpers: P auf Kreisbahn um S

- Winkelgeschwindigkeit: Ableitung des Drehwinkels
- Partikelgeschwindigkeit relativ zu $S(t)$:

$$\vec{v}_{rot}(t) = \omega(t)\vec{p}_\perp(t) = \omega(t) \|\vec{p}_0\| \hat{p}_\perp(t)$$

- Gesamtgeschwindigkeit eines Partikels:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}_S(t) + \omega(t)\vec{p}_\perp(t) \\ \dot{\vec{v}}(t) &= \dot{\mathbf{P}}(t) = \vec{v}_S(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)\vec{p}_0 \end{aligned}$$



5.3.1 Die 2D-Situation ...



Masse, Drehmoment, Drehimpuls eines Partikels

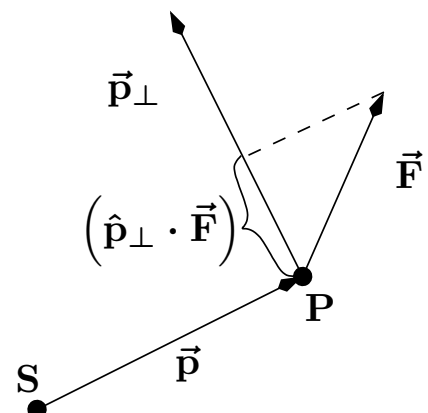
Zunächst: Betrachte nur ein Partikel P mit Masse m

Drehmoment M : Rotationsanteil einer auf P wirkenden Kraft \vec{F} bzgl. S :

$$M(t) = (\vec{p}_\perp(t) \cdot \vec{F}) = (\vec{p}_\perp(t) \cdot m\vec{a}(t)), \quad M(t) \text{ ist skalar}$$

Drehimpuls L : Rotationsanteil des linearen Impulses \vec{P} von P relativ zum Schwerpunkt S :

$$\begin{aligned} L(t) &= (\vec{p}_\perp(t) \cdot \vec{P}) = (\vec{p}_\perp(t) \cdot m\vec{v}(t)) \\ \Rightarrow M(t) &= \dot{L}(t), \quad L(t) \text{ ist skalar} \end{aligned}$$



5.3.1 Die 2D-Situation ...



Masse, Drehmoment, Drehimpuls eines Körpers

Jetzt: Körper bestehend aus Partikel P^i mit Masse m^i

Masse und Schwerpunkt:

$$m = \sum_i m^i \quad S = \frac{1}{m} \sum_i m^i P^i \quad (\text{Ursprung Modell-Koordinaten})$$

Gesamt Drehimpuls L : ergibt sich als

$$L(t) = \sum_i L^i(t) = \sum_i (\vec{p}_\perp^i(t) \cdot \vec{P}^i) = \sum_i m^i (\vec{p}_\perp^i(t) \cdot \vec{v}^i(t))$$

Aus $(\vec{p}_\perp^i(t) \cdot \vec{v}^i(t)) = (\vec{p}_\perp^i(t) \cdot \vec{v}_{rot}^i(t))$ und $\|\vec{p}_0^i\| = \|\vec{p}_\perp^i(t)\|$ folgt:

$$L(t) = \sum_i m^i (\vec{p}_\perp^i(t) \cdot \omega(t) \vec{p}_\perp^i(t)) = \omega(t) \underbrace{\sum_i m^i \|\vec{p}_0^i\|^2}_{=: I}$$



I heißt *Massenträgheit*.

5.3.2 Die 3D-Situation

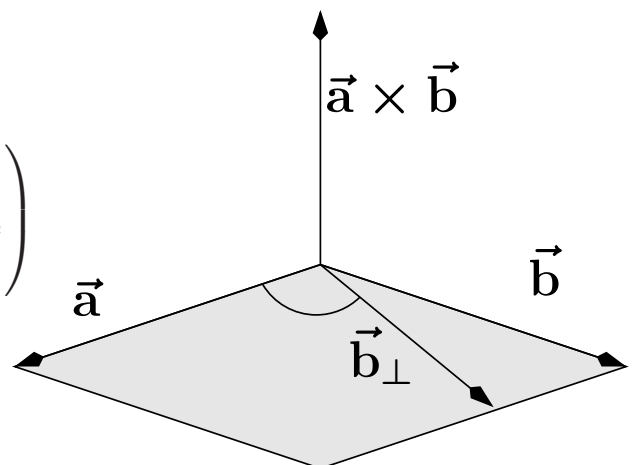


Bemerkung: Hinweise zum Kreuzprodukt

Für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}\}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}^* \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{a}^* = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \text{Fläche des Parallelogramms}$$
$$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_\perp \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp$$



Eigenschaften von \vec{a}^* :

- \vec{a}^* ist *schiefsymmetrisch*, d.h. $\vec{a}^* = -(\vec{a}^*)^T$



5.3.2 Die 3D-Situation ...



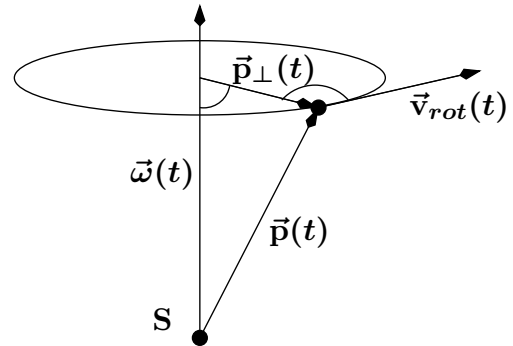
Bewegung in 3D

Bewegung eines Partikels des Körper (in WC): Mit 3D-Rotationsmatrix $R(t)$

$$\text{Position: } \mathbf{P}(t) = \mathbf{S}(t) + \vec{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{S}(t) + R(t)\vec{\mathbf{p}}_0$$

Winkelgeschwindigkeit: $\hat{\omega}(t) \hat{=}$ Rot.-Achse, $\|\vec{\omega}(t)\| \hat{=}$ Rot.-Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \vec{\mathbf{v}}_S(t) + \dot{R}(t)\vec{\mathbf{p}}_0 \\ &= \vec{\mathbf{v}}_S(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{p}}_{\perp}(t) \end{aligned}$$



Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}_{rot}$ von P ist

1. tangential zum Rotationskreis, also $\vec{\mathbf{v}}_{rot}(t) \perp \{\vec{\omega}(t), \vec{\mathbf{p}}_{\perp}(t)\}$
2. proportional zu $\|\vec{\omega}(t)\|$ und $\|\vec{\mathbf{p}}_{\perp}\|$

Ableitung der Rotationsmatrix:

$$\dot{R}(t) = \vec{\omega}(t)^* \cdot R(t)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}}(t) &= R(t)\vec{\mathbf{p}}_0 \\ \vec{\mathbf{v}}_{rot}(t) &= \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{p}}(t) \end{aligned}$$



5.3.2 Die 3D-Situation ...

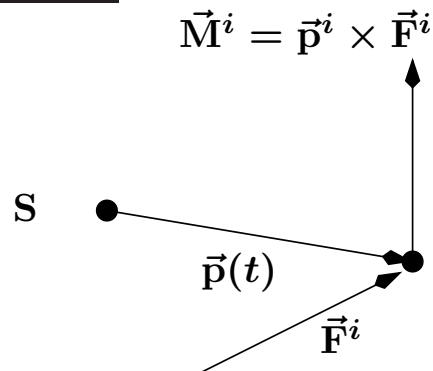


Drehmoment und Drehimpuls eines Partikels (3D)

Drehmoment $\vec{\mathbf{M}}^i(t)$: (vektoriell!!) Kraft $\vec{\mathbf{F}}^i$ auf \mathbf{P}^i bewirkt Drehmoment $\vec{\mathbf{M}}^i$:

$$\vec{\mathbf{M}}^i(t) = \vec{\mathbf{p}}^i(t) \times \vec{\mathbf{F}}^i$$

- $\hat{\mathbf{M}}^i \hat{=}$ Drehachse um S aufgrund von $\vec{\mathbf{F}}^i$
- $\|\vec{\mathbf{M}}^i\| \hat{=}$ Betrag des Drehmoments



Drehimpuls $\vec{\mathbf{L}}^i(t)$ des Partikels \mathbf{P}^i (vektoriell!!)

- entspricht wie in 2D dem Rotationsanteil des Impulses:

$$\vec{\mathbf{L}}^i = \vec{\mathbf{p}}^i \times \vec{\mathbf{p}}^i = m^i \cdot \vec{\mathbf{p}}^i \times \vec{\mathbf{v}}_{rot}^i$$

- unter Verwendung der Massenträgheitsmatrix I^i

$$\vec{\mathbf{L}}^i = m^i \cdot \vec{\mathbf{p}}^i \times \vec{\mathbf{v}}_{rot}^i = m^i \cdot \vec{\mathbf{p}}^i \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{p}}^i) = \underbrace{m^i \cdot (\vec{\mathbf{p}}^i)^* (-\vec{\mathbf{p}}^i)^*}_{=: I^i} \cdot \vec{\omega}(t)$$



5.3.2 Die 3D-Situation ...



Drehmoment und Drehimpuls eines Partikels (3D) (Forts.)

Drehimpuls $\vec{L}(t)$ (Forts.): Ausrechnen der Massenträgheitsmatrix:

$$I^i = m^i \begin{pmatrix} (p_y^i)^2 + (p_z^i)^2 & -p_y^i p_x^i & -p_z^i p_x^i \\ -p_x^i p_y^i & (p_x^i)^2 + (p_z^i)^2 & -p_z^i p_y^i \\ -p_x^i p_z^i & -p_y^i p_z^i & (p_x^i)^2 + (p_y^i)^2 \end{pmatrix}$$

Drehmoment und Drehimpuls (3D)

Objekt bestehend aus Partikel P^i

Drehmoment $\vec{M}(t)$:

$$\vec{M}(t) = \sum_i \vec{M}^i(t) = \sum_i \vec{p}^i(t) \times \vec{F}^i$$

Drehimpuls $\vec{L}(t)$:

$$\vec{L}(t) = \sum_i \vec{L}^i(t) = \left(\sum_i I^i \right) \vec{\omega}(t), \quad I = \sum_i I^i \text{ Gesamtträgheitsmatrix}$$



5.3.2 Die 3D-Situation ...



Beispiel: Würfel

Würfel $[0, 1]^3$ mit $(n + 1)^3$ Partikel P^{ijk} $i, j, k \in \{0, \dots, n\}$:

Position: $P^{ijk} = (i/n, j/n, k/n)$, Masse: $m^{ijk} = m/(n + 1)^3$

Gesamtmasse: $\sum_{ijk} m^{ijk} = \sum_{ijk} \frac{m}{(n + 1)^3} = m$

Schwerpunkt: $S = \frac{1}{m} \cdot \sum_{ijk} m^{ijk} P^{ijk} = \frac{1}{(n + 1)^3 n} \sum_{ijk} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Trägheitsmatrix:

$$I_{MC} = m \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{3n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} - \frac{1}{3n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} - \frac{1}{3n} \end{pmatrix} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} m \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Drehimpulsachse $\hat{L}(t)$ und Rotationsachse $\hat{\omega}(t)$ sind identisch



5.3.2 Die 3D-Situation ...



Ein Simulationsschritt

1. Ermittle äußere Kräfte und Momente (Interaktion, Kollision, etc.):

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}^i \quad \vec{M} = \sum_i \vec{M}^i = \sum_i \vec{p}^i \times \vec{F}^i, \text{ Angriffspunkt } \vec{p}^i$$

2. Neue Position und Rotation (hier: Euler-Integration):

$$S(t + \Delta_t) = S(t) + \Delta_t \vec{v}_S(t) \quad R(t + \Delta_t) = R(t) + \Delta_t \vec{\omega}(t) * R(t)$$

3. Ermittle neue Impulse (hier: Euler-Integration):

$$\vec{P}(t + \Delta_t) = \vec{P}(t) + \Delta_t \vec{F} \quad \vec{L}(t + \Delta_t) = \vec{L}(t) + \Delta_t \vec{M}$$

4. Neue Geschwindigkeiten:

$$\vec{v}_S(t + \Delta_t) = \vec{P}(t + \Delta_t) / m \quad \vec{\omega}(t + \Delta_t) = I^{-1}(t + \Delta_t) \vec{L}(t + \Delta_t)$$



5.4 Kollision



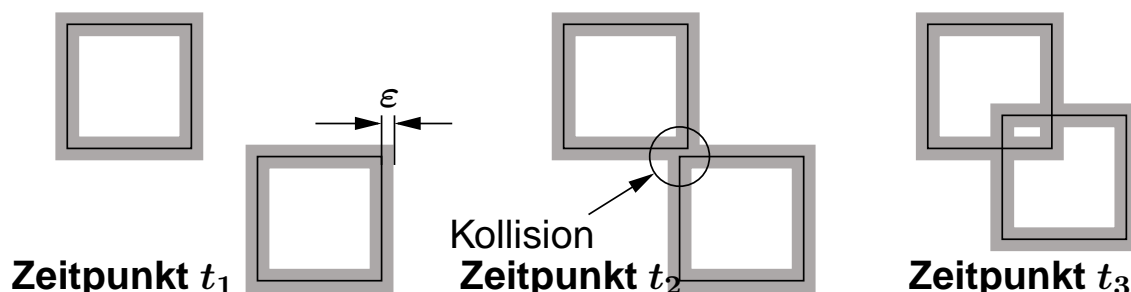
Ziel: Reaktion auf Berührung/Durchdringung geschlossener, bewegter Körper

Unterscheidung: 1. Kollisionserkennung: Kollidieren zwei gegebene Objekte?

Ja \Rightarrow ermittle *Kollisionspunkt* P^K und *Kollisionsnormale* \hat{n}^K .

2. Kollisionsreaktion: Wie wird auf eine Kollision reagiert?

Kollisionsebenen: Kollision ist ein Grenzfall einer Durchdringung



Initial: Anfangs kollidieren/durchdringen sich keine Objekte

Schrittweite so klein, dass Kollision innerhalb einer vorgegebenen Toleranz ϵ immer erkannt wird



5.4.1 Kollisionserkennung



Grundsätzlich können für Rendering und Kollision unterschiedliche Geometrien verwendet werden

Kollisionserkennung hängt von Repräsentation des Kollisionsgeometrie ab

- Rendergeometrie = Kollisionsgeometrie: i.a. aufwändig
- vereinfachte Kollisionsgeometrie: Fehler bei Kollision

Häufige Situation: Rendergeometrie ist polygonal

- Kollisionstest gegen komplexe Polygoneometrie aufwändig
- verwende einfachere Bounding-Geometrie, z.B. axis-aligned oder object-aligned Bounding-Box

Sonderfälle: Für manche Objekte (z.B. Kugel) kann Kollision exakt bestimmt werden.

Weitere Details siehe CG-II



5.4.2 Kollisionsreaktion

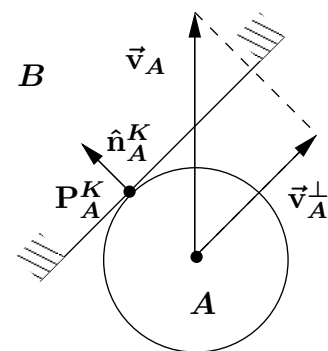


Aufgabe: Verarbeitung einer Kollision im Rahmen der Bewegungssimulation

Einfache Ansätze: (siehe CG-II)

- Bewegungsunterbindung: Letzte Nicht-Kollisionsposition wird beibehalten
- Enlanggleiten: Geschwindigkeitsanteil \vec{v}^{\parallel} in Kollisionsrichtung unterdrücken
Geschwindigkeitskorrektur für A:

$$\vec{v}_A^{\perp} = \vec{v}_A - (\vec{v}_A \cdot \hat{n}^K) \hat{n}^K$$



Elastische Kollision: Stoß entspr. schlagartiger Änderung des Impulses in Richtung Kollisionsnormale

Beachte: Umwandlung lineare in Rotationsbewegung i.w. durch Reibung



5.4.2 Kollisionsreaktion ...



Elastische Kollision - elastischer Stoß

Idee: Stoß entspr. schlagartiger Impulsänderung in Richtung \hat{n}^K :

$$\text{Kollisionsimpuls: } \vec{P}^K = \alpha \hat{n}_A^K$$

Impuls für Objekte A, B : $-\vec{P}^K$ bzw. \vec{P}^K (Impulserhaltung!).

Wirkung auf B : Zerlegung in lineare und Rotations-Komponente:

$$\vec{P}^K = \vec{P}_{\perp}^K + \vec{P}_{\parallel}^K \text{ bzgl. Schwerpunkt von } B$$

Anpassung der Geschwindigkeiten (\vec{p}_A^K Ortsvektor von P^K bzgl. A):

$$\text{linear: } \vec{P}_B \leftarrow \vec{P}_B + \vec{P}_{\parallel}^K, \quad \vec{v}_S \leftarrow \vec{v}_S + \vec{P}_{\parallel}^K / m_B$$

$$\text{Rot.: } \vec{L}_B \leftarrow \vec{L}_B + \vec{L}_{\perp}^K = \vec{L}_B + \vec{p}_B^K \times \vec{P}^K, \quad \vec{\omega} \leftarrow \vec{\omega} + I_B^{-1}(\vec{p}_B^K \times \vec{P}^K)$$

Analoges Vorgehen für A , nur anderes Vorzeichen



5.4.2 Kollisionsreaktion ...



Satz: Ermittlung von \vec{P}^K

Einschränkungen: Zunächst nur lineare Geschwindigkeiten

Relative Geschwindigkeit der Objekte zueinander bei Kollision in Normalenrichtung

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_B - \vec{v}_A, \quad \vec{v}_{rel}^{neu} = \vec{v}_B^{neu} - \vec{v}_A^{neu}, \quad \text{dann } (\hat{n}_A^K \cdot \vec{v}_{rel}^{neu}) = -\varepsilon (\hat{n}_A^K \cdot \vec{v}_{rel})$$

Stoßzahl $\varepsilon \in [0, 1]$ kontrolliert Elastizität der Kollision

Berechnung der Geschwindigkeitsanpassung durch Impuls:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A^{neu} &= \vec{v}_A - \frac{\alpha \hat{n}_A^K}{m_A}, \quad \vec{v}_B^{neu} = \vec{v}_B + \frac{\alpha \hat{n}_A^K}{m_B} \Rightarrow \vec{v}_{rel}^{neu} = \vec{v}_{rel} + \left(\frac{\alpha \hat{n}_A^K}{m_A} + \frac{\alpha \hat{n}_A^K}{m_B} \right) \\ &\Rightarrow -\varepsilon (\hat{n}_A^K \cdot \vec{v}_{rel}) = (\hat{n}_A^K \cdot \vec{v}_{rel}^{neu}) = \left(\hat{n}_A^K \cdot \left(\vec{v}_{rel} + \left(\frac{\alpha \hat{n}_A^K}{m_A} + \frac{\alpha \hat{n}_A^K}{m_B} \right) \right) \right) \\ &\Rightarrow -(1 + \varepsilon) (\vec{v}_{rel} \cdot \hat{n}_A^K) = \frac{\alpha}{m_A} + \frac{\alpha}{m_B} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-(1 + \varepsilon) (\vec{v}_{rel} \cdot \hat{n}_A^K)}{\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}} \end{aligned}$$





Satz: Ermittlung von \vec{P}^K (Forts.)

Allgemeiner Fall: Berücksichtigung der Rotation liefert:

$$\alpha = \frac{-(1 + \varepsilon)(\vec{v}_{rel} \cdot \hat{n}_A^K)}{\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} + \left(\hat{n}_A^K \cdot \left(\left(I_A^{-1}(\vec{p}_A^K \times \vec{n}_A^K)\right) \times \vec{p}_A^K\right)\right) + \left(\hat{n}_A^K \cdot \left(\left(I_B^{-1}(\vec{p}_B^K \times \vec{n}_A^K)\right) \times \vec{p}_B^K\right)\right)}$$

wobei $\vec{p}_A = \mathbf{P}_A^K - \mathbf{S}_A$ Ortsvektor des Kollisionspunktes rel. zum Schwerpunkt

Hinweis: In diesem Fall bestimmt sich α mittels:

- Ermittlung der Geschwindigkeiten $\vec{v}_A(\mathbf{P}^K)$, $\vec{v}_B(\mathbf{P}^K)$ unter Berücksichtigung der Rotation
- Anwendung des Kollisionsimpulses auf lineare und Rotationsgeschwindigkeit

