

Klausur: Computergraphik II Probeklausur	Prüfer:	Datum/Zeit:
Semester:	Prüfungsdauer: 180 Minuten	Max. Punktzahl: 200
Hilfsmittel: Schreibgeräte, Lineal, nichtprogrammierbarer Taschenrechner		

HINWEIS:

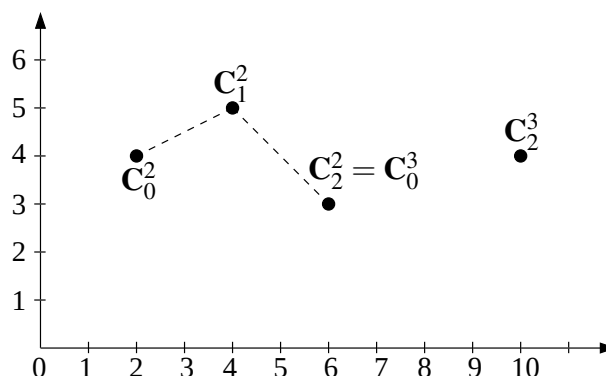
Bitte beachten Sie, dass die Themengebiete der eigentlichen Klausur von den hier gewählten Themen gegebenenfalls abweichen können. **Prinzipiell sind alle in der Vorlesung besprochenen Themen klausurrelevant.** Die Besprechung der Probeklausur wird in der Vorlesung am 31.01.2013 stattfinden. Hierbei werden jedoch nur die Aufgaben(teile) besprochen zu denen auch konkrete Fragen vorliegen.

Aufgabe 1 Splines (36 Punkte)

1.1. Zwei *quadratische Bézier-Spline*-Segmente seien durch die Kontrollpunkte

$$\mathbf{C}_0^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_1^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{C}_0^3, \mathbf{C}_1^3, \mathbf{C}_2^3$ definiert, von denen nur $\mathbf{C}_0^3 = \mathbf{C}_2^2$ und $\mathbf{C}_2^3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ bekannt sind.



- a) Berechnen Sie den fehlenden Kontrollpunkt $\mathbf{C}_1^3$, damit die Bézier-Spline-Kurve zwischen den beiden Segmenten C^1 -stetig ist.

- b) Prüfen Sie *rechnerisch* mit Hilfe des De-Boor-Algorithmus, dass die *uniforme, quadratische B-Spline-Kurve* $\mathbf{D}(u)$ mit den folgenden De-Boor-Punkten den Punkt $\mathbf{C}_0^2$ interpoliert.

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wählen Sie u so, dass $\mathbf{D}(u) = \mathbf{C}_0^2$ gleich dem Startpunkt der B-Spline-Kurve ist. Die im Algorithmus benötigten Gewichte $\alpha_i^j(u)$ können mit Hilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$\alpha_i^j(u) = \frac{u - t_i}{t_{i-j+3} - t_i} \quad \text{mit } i = j, \dots, 2 \quad \text{und } j = 1, 2$$

- 1.2. Gegeben seien beliebige paarweise verschiedene Punkte $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ im zwei-dimensionalen Raum, die durch eine Kurve interpoliert werden sollen (siehe Skizze).



- a) Sei der erste De-Boor-Punkt $\mathbf{D}_0$ einer uniformen, C^1 -stetigen *quadratischen* B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ gegeben. Bestimmen Sie vier weitere De-Boor-Punkte $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4$ der B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ in Abhängigkeit der gegebenen Punkte, so dass $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_3$ von der B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ interpoliert werden.
- b) Zur Definition einer interpolierenden *kubischen* Bézier-Spline-Kurve können mit Hilfe des Catmull-Rom-Ansatzes zu jedem Segment Kontrollpunkte einer kubischen Bézier-Kurve bestimmt werden. Die resultierende Bézier-Spline-Kurve ist an den interpolierten Kontrollpunkten C^1 -stetig.
Bestimmen Sie die Bézier-Kontrollpunkte $\mathbf{C}_0^1, \mathbf{C}_1^1, \mathbf{C}_2^1, \mathbf{C}_3^1$ des Kurvensegments $\mathbf{C}^1(u)$ zwischen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ in Abhängigkeit der Punkte $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_3$.
- c) Finden Sie eine Repräsentation

$$\mathbf{C}^1(u) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{X}_k(u)$$

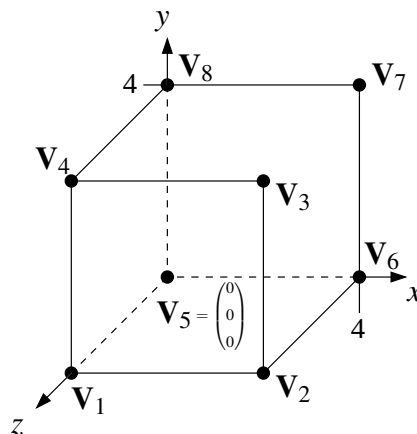
des Kurvensegments $\mathbf{C}^1(u) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{C}_k^1 \mathbf{B}_k^3(u)$, die einzig von den Punkten $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_3$ und den Bernstein-Bézier-Polynomen $\mathbf{B}_0^3, \mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_2^3, \mathbf{B}_3^3$ abhängt. Bestimmen Sie hierzu die Polynome $\mathbf{X}_0(u), \mathbf{X}_1(u), \mathbf{X}_2(u), \mathbf{X}_3(u)$ in Abhängigkeit der Bernstein-Bézier-Polynome.

Aufgabe 2 Marching Cubes (20 Punkte)

Gegeben sei folgende Ebene in impliziter Form:

$$\left\{ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : h(x, y, z) = -x + 3y + \frac{3z}{2} + 1 = 0 \right\}$$

Im Folgenden soll die gegebene Geometrie in dem Voxel mit den Eckpunkten $(2 \pm 2, 2 \pm 2, 2 \pm 2)$ mit Hilfe des *3D-Marching-Cube*-Algorithmus polygonalisiert werden:



- 2.1. Finden Sie heraus, welche Kanten des Voxels die implizite Geometrie schneiden.
- 2.2. Berechnen Sie die entsprechenden Schnittpunkte mittels linearer Interpolation anhand der Funktionswerte von h .

Aufgabe 3 Polygon-Meshes (28 Punkte)

- 3.1. Gegeben sei ein *geschlossenes*, 2-mannigfaltiges Polygonnetz mit *Genus* 0, für das die *Euler-Formel* gilt:

$$N_V - N_E + N_F = 2$$

wobei N_V , N_E und N_F die Anzahl der Eckpunkte, Kanten und Flächen bezeichnen.

- a) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der Eigenschaften 2-mannigfaltiger Polygonnetze, dass im Allgemeinen gilt:

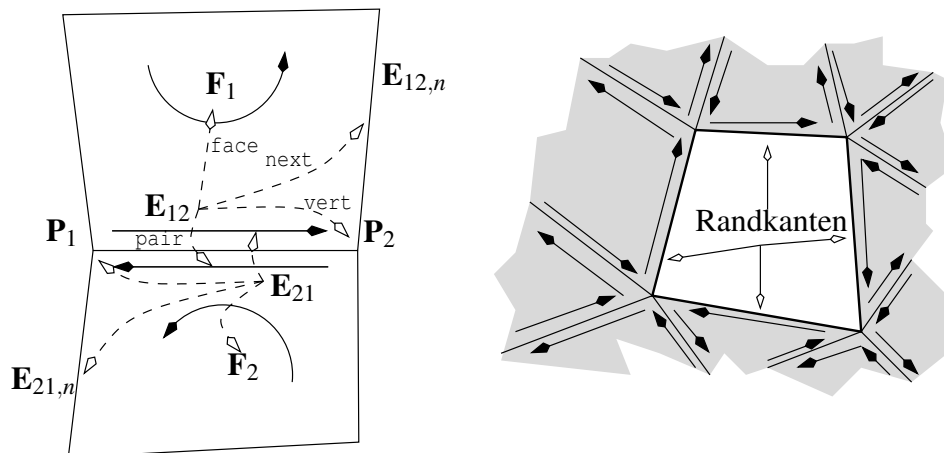
$$N_V \geq 4 \text{ und } N_F \geq 4$$

- b) Für welches Polygonnetz mit den oben genannten Eigenschaften gilt genau:

$$N_V = 4 \text{ und } N_F = 4$$

- c) Leiten Sie aus den (größtmöglichen) Unterschränken aus Teilaufgabe a) eine größtmögliche Unterschränke für N_E ab!

- 3.2. Die *Half-Edge*-Datenstruktur arbeitet hauptsächlich mit Referenzen bzgl. Kanten. Zusätzlich sei zu jedem Vertex V eine Referenz $V.\text{edge}$ auf eine ausgehende Halbkante gegeben, sowie zu jeder Fläche F eine Referenz $F.\text{edge}$ auf eine beliebige zugeordnete Halbkante gegeben.



Entwickeln Sie unter Verwendung der Referenznamen einen Pseudocode für folgende Aufgaben:

- Gegeben ist ein Polygon, gesucht sind alle Halbkanten zu dem Polygon.
- Gegeben ist ein Vertex, gesucht sind alle Halbkanten um diesen Vertex.
- Gegeben ist ein Vertex auf einem Randpolygonzug, gesucht sind alle Halbkanten des Randpolygonzuges.

Aufgabe 4 Quaternionen (28 Punkte)

Gegeben seien zwei Orientierungen in Euler-Winkel-Repräsentation:

$$\vec{\phi}_1 = (\pi, 0, \pi), \quad \vec{\phi}_2 = (\pi, \frac{3\pi}{2}, \pi)$$

Gegeben seien außerdem zwei Quaternionen $\mathbf{q}_1 = (0, (0, -1, 0))$ und $\mathbf{q}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0))$, wobei $\mathbf{q}_1$ die Orientierung ϕ_1 beschreibt und $\mathbf{q}_2$ die Orientierung ϕ_2 beschreibt.

Sei $\vec{\phi}_1$ dem Zeitpunkt $t_1 = 0$ und $\vec{\phi}_2$ dem Zeitpunkt $t_2 = 1$ zugeordnet.

- Welches Problem besteht bei der linearen Interpolation von Quaternionen? Begründen Sie Ihre Aussage anhand einer Skizze.
- Bestimmen Sie nun mit Hilfe einer *sphärischen Interpolation* (slerp) das Quaternion $\mathbf{q}_{\text{slerp}}$ für $t = \frac{1}{3}$. Verwenden Sie hierfür die im Anhang gegebene Formel.
- Prüfen Sie, ob dass das Quaternion $\mathbf{q}_{\text{slerp}}$ der interpolierten Orientierung $\vec{\phi}_t = (\pi, \frac{\pi}{2}, \pi)$ entspricht.
- Die Orientierung $\vec{\phi}_t = (\pi, \frac{\pi}{2}, \pi)$ ist ein Beispiel für eine sogenannte *Gimbal-Lock*-Situation. Was ist die Eigenschaft einer solchen Orientierung?

Aufgabe 5 Abstand Punkt-Dreieck (28 Punkte)

Gegeben seien ein Punkt $\mathbf{P}$ und ein Dreieck D : $\mathbf{D}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V} + \alpha_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \vec{\mathbf{e}}_2$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \in [0, 1]$ mit

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden soll der Abstand zwischen $\mathbf{P}$ und D mit Hilfe einer quadratischen Abstandsfunktion berechnet werden.

5.1. Bestimmen Sie die *quadratische Abstandsfunktion*

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = \|\mathbf{D}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{P}\|^2$$

für die gegebenen Werte. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich, so dass Sie einen skalaren Term in Abhängigkeit von α_1 und α_2 erhalten.

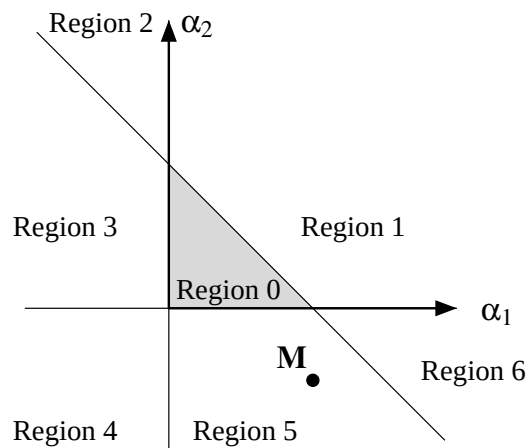
5.2. Für die Berechnung des globalen Minimums von Q wird der *Gradient* der Funktion Q benötigt. Bestimmen Sie den Gradienten

$$\text{grad}[Q](\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2), \frac{\partial Q}{\partial \alpha_2}(\alpha_1, \alpha_2) \right)$$

für die zuvor berechnete Funktion Q .

5.3. Bestimmen Sie rechnerisch das *globale Minimum* $\mathbf{M} = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ der quadratischen Abstandsfunktion Q .

5.4. Bestimmen Sie einen Punkt $\mathbf{D}(\alpha_1^P, \alpha_2^P)$ des Dreiecks mit minimalem Abstand zu $\mathbf{P}$. Betrachten Sie hierfür die in der Abbildung dargestellte Situation im (α_1, α_2) -Parametergebiet.



Aufgabe 6 Kollisionserkennung (36 Punkte)

Zur *Kollisionserkennung* kommen Bounding Boxes zum Einsatz. Bounding Boxes können relativ zum Weltkoordinaten-System (Axis Aligned Box (AAB)) oder mit Bezug zum Objekt (Object Aligned Box (OAB)) beschrieben werden.

Grundsätzlich kann eine Durchdringung zweier konvexer Objekte ausgeschlossen werden, wenn es eine separierende Ebene zwischen ihnen gibt. Existiert eine separierende Ebene zwischen den Bounding Boxes der Objekte gilt dies gleichsam für die Objekte selbst.

Gegeben seien zwei Objekte in Form von Quadern ($\mathbf{Q}^1$ und $\mathbf{Q}^2$) mit den Zentren

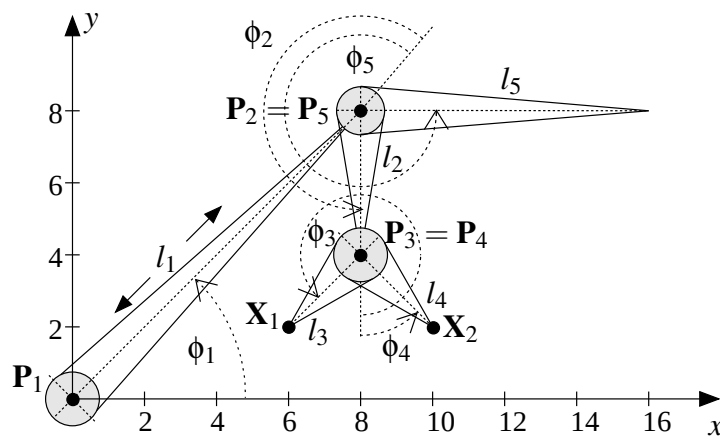
$$\mathbf{C}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beide Quader erstrecken sich entlang ihrer orthonormalen Vektoren über eine Länge von 1:

$$\hat{\mathbf{e}}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_1^1 = \mathbf{r}_2^1 = \mathbf{r}_3^1 = 1$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 \\ -3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3^2 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_1^2 = \mathbf{r}_2^2 = \mathbf{r}_3^2 = 1$$

- 6.1. Bestimmen Sie die kleinstmögliche Axis Aligned Box für $\mathbf{Q}^1$ und $\mathbf{Q}^2$.
- 6.2. Prüfen Sie beide Objekte auf Durchdringung bzw. Kollision auf Basis der AABs.
- 6.3. Nutzen Sie die OABs der gegebenen Quader zur Kollisionsprüfung. Stellen Sie fest, ob sich eine separierende Ebene zwischen $\mathbf{Q}^1$ und $\mathbf{Q}^2$ finden lässt, indem Sie die Normalen der Seitenflächen von $\mathbf{Q}^2$ untersuchen.

Aufgabe 7 2D-Skelettanimation (24 Punkte)

Gegeben sei das abgebildete zweidimensionale, mehrgliedrige Skelettmodell mit folgenden Werten:

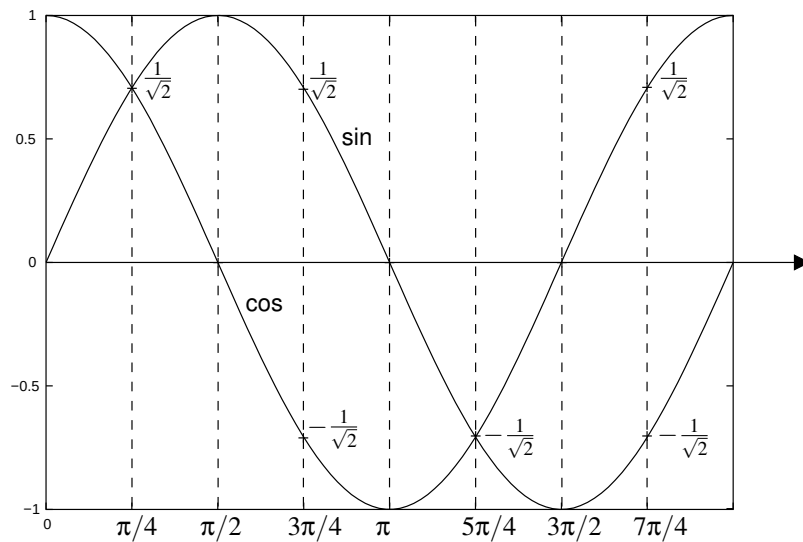
$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 = \pi + \frac{\pi}{4}, \quad \phi_3 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$l_1 = 8\sqrt{2}, \quad l_2 = 4, \quad l_3 = 2\sqrt{2}, \quad l_4 = 2\sqrt{2}$$

- 7.1. Berechnen Sie den Endeffektor $\mathbf{X}_1$, indem Sie die Zwischenpunkte $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ *sukzessive in globalen Koordinaten* berechnen.
- 7.2. Geben Sie eine *Hierarchie von Transformationen* für das gegebene Modell an, mit denen die lokalen Koordinatensysteme der einzelnen Segmente berechnet werden können.
Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Bezeichner.
 $T(x, y)$: Translation
 $R(\phi)$: Rotation um den Mittelpunkt
- 7.3. Geben Sie den *Arbeitsbereich* des Endeffektors $\mathbf{X}_1$ an für die gegebenen Längen und Winkel. Begründen Sie kurz Ihre Behauptung.

Anhang

Sinus und Cosinus:



Ein Quaternion $q \in \mathbb{H}$ hat folgende Form:

$$q = (s, \vec{v}) = (s, (v_1, v_2, v_3)) \hat{=} s + v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

Multiplikation der Imaginärteile:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \text{ und } ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

Multiplikation zweier Quaternionen $q_1 = (s_1, \vec{v}_1)$ und $q_2 = (s_2, \vec{v}_2)$:

$$\underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = (s_1 s_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2), s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$$

Beachte: Die Multiplikation von Quaternionen ist nicht kommutativ!

Sphärische Interpolation zweier Quaternionen $q_1 = (s_1, \vec{v}_1)$ und $q_2 = (s_2, \vec{v}_2)$:

$$\underline{\mathbf{q}}_{\text{slerp}} = \frac{\sin\left(\left(1 - \frac{t}{t_2 - t_1}\right)\alpha\right)}{\sin \alpha} \underline{\mathbf{q}}_1 + \frac{\sin\left(\frac{t}{t_2 - t_1}\alpha\right)}{\sin \alpha} \underline{\mathbf{q}}_2, \quad \cos \alpha = s_1 s_2 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$$