Übung zu Computergraphik II

– Übungsblatt 7 –

Lehrstuhl für Computergraphik und Multimediasysteme
Peter Marchel, Julian Bader

Aufgabe 1 [1 Punkt] Solid Modeling

Zur Umsetzung der Boolschen Operation mit polygonalen b-reps sind (effiziente) Schnittberechnungen zwischen Polygonen notwendig.

Gegeben seien zwei ebene Polygone mit Eckpunkten $\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k\}$ bzw. $\{\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_l\}$, sowie die beiden Ebenen E_P, E_Q in denen die Polygone liegen.

E_P, E_Q seien in Hesse-Normalform gegeben:

$$E_P: \quad \hat{\mathbf{n}}_P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d_P = 0, \quad \hat{\mathbf{n}}_P = \begin{pmatrix} a_P \\ b_P \\ c_P \end{pmatrix}$$

$$E_Q: \quad \hat{\mathbf{n}}_Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d_Q = 0, \quad \hat{\mathbf{n}}_Q = \begin{pmatrix} a_Q \\ b_Q \\ c_Q \end{pmatrix}$$

1. Vorüberlegungen zum Vektorprodukt: Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

folgendes gilt:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \tag{1}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \tag{4}$$

mit skalaren Faktoren $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

2. Zur Umsetzung der Schnittberechnung wird eine Funktion `intersectPlane` benötigt, die zwei Ebenen E_P, E_Q schneidet und als Ergebnis eine Gerade G in parametrischer Form liefert.
   Zeigen Sie, dass

$$G : \mathbf{P} + \alpha\vec{\mathbf{l}}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } \mathbf{P} = \frac{(d_Q\hat{\mathbf{n}}_P - d_P\hat{\mathbf{n}}_Q) \times (\hat{\mathbf{n}}_P \times \hat{\mathbf{n}}_Q)}{\|\hat{\mathbf{n}}_P \times \hat{\mathbf{n}}_Q\|^2} \text{ und } \vec{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{n}}_P \times \hat{\mathbf{n}}_Q$$

   das Problem löst!

   Hinweise:

   1. **Überlegen sie sich zunächst, welche Eigenschaft G im Bezug auf die Ebenen hat.**
   2. $\hat{\mathbf{a}} \cdot (\hat{\mathbf{b}} \times (\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{d}})) = (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \cdot (\hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{d}})$

Aufgabe 2 [1 Punkt] L-Systeme

Gegeben sei das Alphabet $V = \{\Delta, s, +, -, [,]\}$, das Axiom $\omega_0 = \Delta$ und die Regel

$$p(\Delta) = s\Delta[+\Delta][-\Delta], \quad \text{sonst } p(x) = x, \forall x \neq \Delta$$

Die geometrische Interpretation eines Wortes wird durch Umsetzung in ein OpenGL-Programm folgendermassen erreicht:

Buchstabe		**OpenGL-Code**

Δ	$\longrightarrow$	`glBegin(GL_TRIANGLES);`
		`glVertex2f(0.0, 0.0);`
		`glVertex2f(1.0, 0.0);`
		`glVertex2f(0.5, sqrt(3.0)/2.0);`
		`glEnd();`

s	$\longrightarrow$	`glScalef(0.5, 0.5, 1.0);`
+	$\longrightarrow$	`glTranslatef(1.0, 0.0, 0.0);`
-	$\longrightarrow$	`glTranslatef(0.5, sqrt(3.0)/2.0, 0.0);`
[	$\longrightarrow$	`glPushMatrix();`
]	$\longrightarrow$	`glPopMatrix();`

Welche Figuren entstehen, wenn die Iteration 0-, 1-, 2- und 3-mal ausgeführt wird? Fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

Abgabe: 27.11.2012, zu Beginn der Übung oder bis 8:30 Uhr im Postkasten des Lehrstuhls (gegenüber Raum H-A 7107)