Computergraphik II

Winter 2012/2013

2 Grundlagen und Wiederholung

Versionsdatum: 6. Oktober 2012

2 Grundlagen und Wiederholung ...

Motivation: Modellierung

Geometrische Modelle: Grundlegend für alle graphischen 3D-Anwendungen

Kriterien aus Anwendersicht:

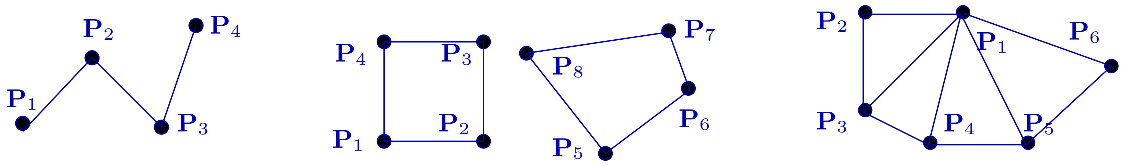
- problem-orientierte Erstellungsmethoden (z.B. Genauigkeit und Freiheit)
- intuitive Erstellungstechnik $\Longrightarrow$ **Kontrollparameter**
- sinnvolle Weiterverarbeitung/Wiederverwendung

Kriterien aus Informations-technischer Sicht:

- Geometrie als Funktion von Modellparametern (interne Repräsentation)
- Unabhängigkeit der Geomtrie von bestimmten Änderungen der Kontrollparameter (z.B. **affine Invarianz**)
- Darstellung von Geometrien in Echtzeit-Graphik oder Offline-Rendering

2.1 Wiederholung CG-I

Bisherige Modellierung: Spezielle Formen polygonaler Geometrien



Bewertung: + beliebige Formen erzeugbar

+/– Manipulation der Geometrie auf feinster Ebene

– keine glatten Oberflächen

Rendering basiert (fast) immer auf Polygonen

2.1 Wiederholung CG-I ...

Bezeichnung: Affiner Raum

Alle geometrischen Objekte werden durch Punkte in einem *Affinen Raum* beschrieben.

Affiner Raum A: Ein um *Punkte* erweiterter Vektorraum.

Für Vektoren $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in A$, Punkte $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in A$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- ❍ $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ ist Vektor
- ❍ $\mathbf{P} + \vec{\mathbf{v}}, \mathbf{P} + a\vec{\mathbf{v}}$ sind Punkte

Koordinatensystem von A: Besteht aus einer Vektorbasis $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n\}$ von A und einem *Ursprungspunkt* $\mathcal{O}$.

Koordinatendarstellung von $\mathbf{P} \in A$ mittels des Ortsvektors $\vec{\mathbf{p}}$ von $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathcal{O} + \vec{\mathbf{p}} = \mathcal{O} + p_1\vec{\mathbf{u}}_1 + p_2\vec{\mathbf{u}}_2 + \ldots + p_n\vec{\mathbf{u}}_n, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Bezeichnung: Affine Kombination, konvexe Hülle

Affine Kombination: Für Punkte $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k \in A$ und skalare Werte $s_1, \ldots, s_k$ mit $\sum_{i=1}^{k} s_i = 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{P}_i \in A \quad \text{ist ebenfalls wieder Punkt, denn}$$

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{P}_i = s_1 \mathbf{P}_1 + s_2 \mathbf{P}_2 + \ldots + s_k \mathbf{P}_k$$

$$= \underbrace{(s_1 + \ldots + s_k)}_{=1} \mathbf{P}_1 + s_2 \underbrace{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)}_{\vec{\mathbf{v}}_2} + \ldots s_k \underbrace{(\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_1)}_{\vec{\mathbf{v}}_k}$$

Konvexe Hülle: Für Punkte $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k \in A$ ist sie die *kleinste, umfassende, konvexe Menge*. Sie besteht aus den Punkten

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{P}_i, \text{ mit } \sum_{i=1}^{k} s_i = 1 \text{ und } s_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, k$$

Beispiel: Affine Kombination

Gerade durch zwei Punkte $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$:

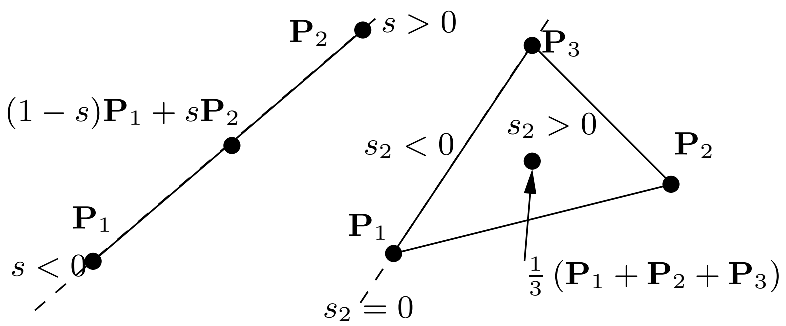
$G : \mathbf{P}_1 + s(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = (1-s)\mathbf{P}_1 + s\mathbf{P}_2, \; s \in \mathbb{R}$

Abbildung ist bijektiv. Konvexe Hülle: Strecke $\overline{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}$

Ebene durch drei nicht kollineare Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$

$$E : \mathbf{P}_1 + s_1(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + s_2(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) = (1 - s_1 - s_2)\mathbf{P}_1 + s_1 \mathbf{P}_2 + s_2 \mathbf{P}_3, \; s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Abbildung ist bijektiv. Konvexe Hülle: Dreieck $\Delta(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$



Bezeichnung: Baryzentrische Koordinaten

Verallgemeinerung der Beispiele Gerade und Ebene

Affine Unabhängigkeit: $\mathbf{P}_i \in A,\ i = 0, \ldots, k$ mit $\dim(A) \geq k$ sind affin unabhängig, wenn

Vektoren $\vec{\mathbf{v}}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_1,\ i = 1, \ldots, k$ linear unabhängig sind

bzw. wenn $\sum_{i=0}^{k} s_i \mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{k} t_i \mathbf{P}_i$ mit $\sum_{i=0}^{k} s_i = \sum_{i=0}^{k} t_i = 1 \Leftrightarrow s_i = t_i\ \forall i = 0, \ldots, k$

Baryzentrische Koordinaten: Eindeutige Gewichte s_i eines Punktes $\mathbf{P}$ bzgl. affine unabhängiger Punkte $\mathbf{P}_i$

Beispiel: Baryzentrische Koordinaten bzgl. Dreieck ($\mathbb{R}^2$)

Gegeben: Dreieck mit Eckpunkten $\mathbf{Q}_i,\ i = 0, 1, 2$ und Punkt $\mathbf{P}$

Gesucht: Baryzentrische Koord. $s_i,\ i = 0, 1, 2$ mit $\mathbf{P} = \sum_{i=0}^{2} s_i \mathbf{Q}_i,\ \sum_{i=0}^{2} s_i = 1$

Ansatz: Mit $s_0 = 1 - s_1 - s_2,\ \vec{\mathbf{u}}_i = \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_0$ und $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}_0$ folgt

$$(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0)\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{1x} & u_{2x} \\ u_{1y} & u_{2y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

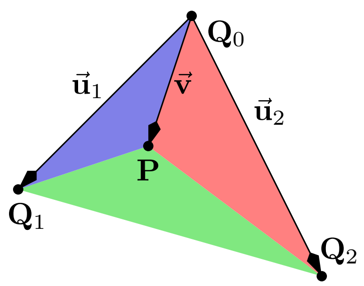
$$\Rightarrow s_1 = \frac{u_{2y} v_x - u_{2x} v_y}{u_{1x} u_{2y} - u_{2x} u_{1y}} \text{ und } s_2 = \frac{u_{1x} v_y - u_{1y} v_x}{u_{1x} u_{2y} - u_{2x} u_{1y}}$$

Geometrische Interpretation: s_i entspricht einem Flächenverhältnis

$$s_1 = \frac{\text{area}(\Delta(\mathbf{Q}_0, \mathbf{P}, \mathbf{Q}_2))}{\text{area}(\Delta(\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2))}$$

$$s_2 = \frac{\text{area}(\Delta(\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{P}))}{\text{area}(\Delta(\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2))}$$

$$\text{analog } s_0 = \frac{\text{area}(\Delta(\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2))}{\text{area}(\Delta(\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2))}$$



Beispiel: Schnitt Gerade mit Ebene in $\mathbb{R}^3$

Gegeben:

- Gerade durch Punkt und Richtung: $\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{P} + \alpha\vec{\mathbf{d}}$
- Ebene durch drei Punkte: $E(s_1, s_2) = (1 - s_1 - s_2)\mathbf{Q}_0 + s_1\mathbf{Q}_1 + s_2\mathbf{Q}_2$

Gesucht: Parameter (baryzentrische Koordinaten) α, s_1, s_2 mit

$$\mathbf{P}(\alpha) = E(s_1, s_2) \Leftrightarrow \mathbf{P} + \alpha\vec{\mathbf{d}} = (1 - s_1 - s_2)\mathbf{Q}_0 + s_1\mathbf{Q}_1 + s_2\mathbf{Q}_2$$
$$\Leftrightarrow -\alpha\vec{\mathbf{d}} + s_1(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) + s_2(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0) = \mathbf{P} - \mathbf{Q}_0$$

... oder in Matrixform als lineares 3×3-System

$$\left(-\vec{\mathbf{d}}, (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0), (\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0)\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}_0$$

Beispiel: Schnitt Gerade mit Ebene in $\mathbb{R}^3$: Zahlenbeispiel

Gegeben: Gerade $\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{P} + \alpha\vec{\mathbf{d}}$ und Ebene durch $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow s_1 = \tfrac{1}{2}(2 + \alpha) = \tfrac{5}{2} \Rightarrow s_2 = 1 - s_1 = -\tfrac{3}{2}$$

2.1 Wiederholung CG-I ...

Affine Abbildung

Eigenschaft: T affine $\Rightarrow$ affine Kombination bleiben unverändert

$$\text{Gegeben: Punkte } \mathbf{P}_i, \text{ Gewichte } s_i, \; i = 1, \ldots, n \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} s_i = 1$$

$$\text{Affine Abbildung: Für } \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{P}_i \text{ ist } T(\mathbf{P}) = T(\sum_{i=1}^{k} s_i \mathbf{P}_i) = \sum_{i=1}^{k} s_i T(\mathbf{P}_i)$$

d.h.: Baryzentrische Koordinaten verändern sich durch T nicht

Charakterisierung: T ist affin, wenn es linear und/oder Translation ist

$$T(\mathbf{P}) = M \cdot \mathbf{P} + \vec{\mathbf{t}}, \text{ mit } M \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; \vec{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^n$$

Homogene Schreibweise für affine Abbildungen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \text{ und } M \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & & & t_x \\ & M & & t_y \\ & & & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Grundlagen

Bezeichnung:

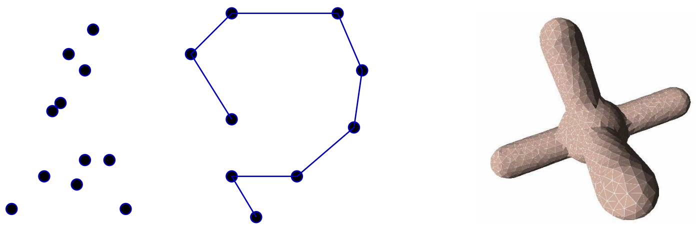
Geometrie: Eine Menge von Punkten (für uns meist im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) ohne spezifische Struktur

Kurve: Eine Geometrie, die (lokal) eine eindimensionale Struktur besitzt.

Fläche: Eine Geometrie, die (lokal) eine zweidimensionale Struktur besitzt.

Körper/Volumen: Eine Geometrie, die (lokal) eine dreidimensionale Struktur besitzt. Körper können durch ihre Begrenzungsflächen beschrieben werden

Modell/Objekt: Eine Geometrie, die eine Semantik besitzt (Modell eines Hauses)



Punkte Kurve Fläche

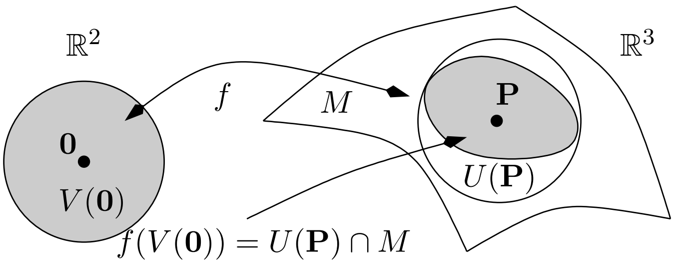
Bezeichnung: Mannigfaltigkeit und Orientierbarkeit

Problem: „Lokal n-dimensionale Struktur" ist eine rein intuitiv Definition

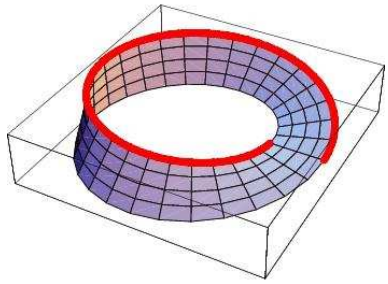
k-Mannigfaltigkeit: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ ist k-mannigfaltig, $k \leq d$ wenn

$$\forall \mathbf{P} \in M \ \exists \text{ Umgebungen } U(\mathbf{P}) \subset \mathbb{R}^d, V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^k \text{ von } \mathbf{P} \text{ bzw. von } \mathbf{0}$$
$$\text{und eine stetige bijektive Abbildung } f : V(\mathbf{0}) \longrightarrow U(\mathbf{P}) \cap M$$

Orientierbarkeit ($k = 2,\ d = 3$): Mannigfaltigkeit (Fläche) mit zwei Seiten



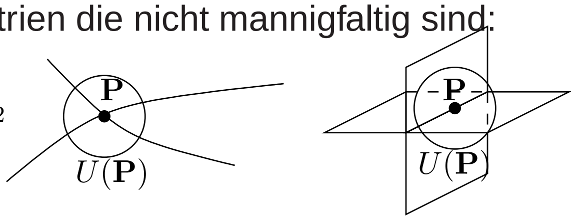
Beispiel 2-Mannigfaltigkeit



Moebius-Band (einseitig)

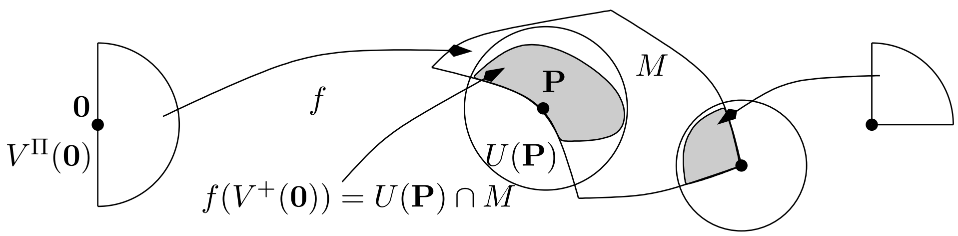
Bemerkung:

- Beispiel für Geometrien die nicht mannigfaltig sind:



- Jede Mannigfaltigkeit ist zunächst unbegrenzt (Beispiel: Kugel, Ebene)
- Der *Rand einer Mannigfaltigkeit* ∂M definieren sich über *halb-offene Umgebungen*

$$\Pi \subset \{1, \ldots, k\}, V^{\Pi}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{Q} \in V(\mathbf{0})\ :\ q_i \geq 0 \forall i \in \Pi\} \subset \mathbb{R}^k$$

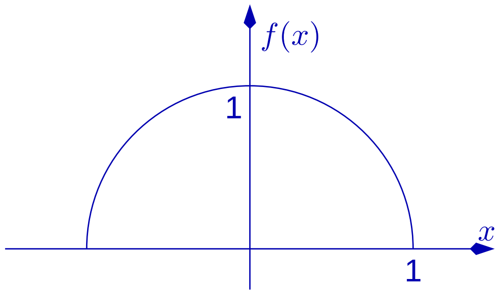


Mathematische Repräsentation von Flächen und Körpern

Polygon: Ebene 2-Mannigfaltigkeit mit Polygonzug als Rand

Polygon-Netz: Polygonverband mit gemeinsamen Ecken und Kanten

Parametrische Repräsentation: Funktionale Beschreibung, z.B. Halbkreis: $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$



Implizite Repräsentation: Definition einer $n-1$-dim. Geometrie in einem n-dim. Raum über Auswertung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n = 2$: Kurve, $n = 3$: Fläche) zu einem *Isowert* a:

Allgemein: $\{\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(\mathbf{P}) = a\}$

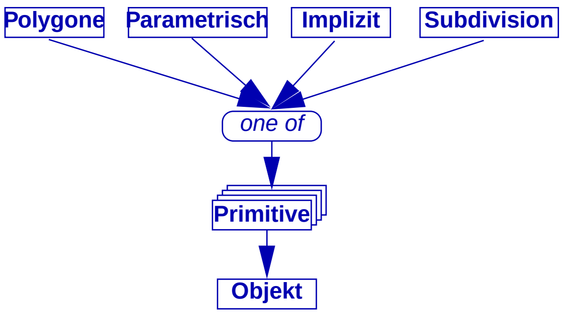
Beispiel: $f(\mathbf{P}) = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \ a = r^2 \Longrightarrow$ Kugel

Subdivisionsflächen: Rekursive Unterteilung eines vorgegebenen Kontrollpolyeders; Grenzfall: glatte Fläche.

Primitiv, Objekt und Modellierungstechnik

Primitiv: ❍ Grundform der Modellierung

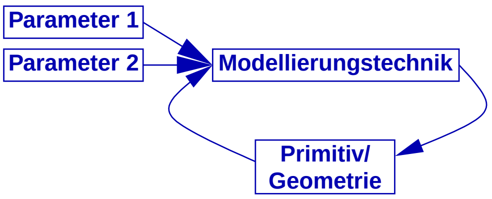
- ❍ beruhen auf **einer** math. Repräsentation
- ❍ Beispiel *Kugel*: exakte Darstellung durch NURBS oder implizit, Approximation durch Polygone



Objekte: Verknüpfung mehrerer Primitive mit Modellierungstechniken, z.B. boolschen Operationen.

Modellierungstechnik: ❍ Verfahren zur Verknüpfung mehrerer Primitive/Objekte

- ❍ Eingabeparameter sind Werte oder andere Geometrie.



Flächenbasierte Modelle: Häufigste Repräsentationsform