Kontrollblatt zu Computergraphik I
– Lineare Abbildungen, Vektorräume und Untervektorräume –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme
Hochstetter Hendrik, Marchel Peter

Abgabe:	Für Studenten mit 5 LP verpflichtend bis spätestens 13. Mai 2013, 18 Uhr
Besprechung:	22. Mai 2013

Aufgabe 1 (Lineare Abbildungen) **1 Punkt**

1. Welche der folgenden Funktionen von $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)^T$ sind lineare Abbildungen? Geben Sie für die linearen Abbildungen jeweils die zugehörige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an. Ist die Matrix invertierbar? Jeweils mit Begründung.
   a) $f_a(\vec{\mathbf{v}}) = (v_2, v_1)^T$
   b) $f_b(\vec{\mathbf{v}}) = (v_1, v_1)^T$
   c) $f_c(\vec{\mathbf{v}}) = (0, 1)^T$
2. Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ einer linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{x}}$, welche den Vektor $\vec{\mathbf{x}}_1 = (1, 2)^T$ auf $\vec{\mathbf{w}}_1 = (7, 0)^T$ und $\vec{\mathbf{x}}_2 = (-2, 2)^T$ auf $\vec{\mathbf{w}}_2 = (4, -6)^T$ abbildet.

Aufgabe 2 (Kern, Rang, Vektorräume) **1 Punkt**

a) Bestimmen Sie für jede freie Variable der Matrix $\mathbf{A}$ eine spezielle Lösung. Wie lautet der Kern von $\mathbf{A}$. Wie lautet die vollständige Lösung zu $\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Wie lauten der Spaltenraum, der Zeilenraum, der Kern und der Linkskern für die folgenden beiden Matrizen? Bestimmen Sie auch den Rang der Matrizen.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (Basistranformation) **1 Punkt**

Sei $B = \{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\}$ die natürliche Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ und es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{x}}$ eine lineare Abbildung.

a) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ der linearen Abbildung f, welche die Basisvektoren wie folgt abbildet:

$$f(\vec{\mathbf{e}}_1) = e_1 + e_2\,,\ \ f(\vec{\mathbf{e}}_2) = -2e_1 - 3e_2 + e_3\,,\ \ f(\vec{\mathbf{e}}_3) = f(\vec{\mathbf{e}}_1) \times \vec{\mathbf{e}}_3$$

b) Auf welchen Vektor wird der Vektor $v = (1, 2, 3)^T$ mit der linearen Abbildung f abgebildet?

c) Welchen Rang hat die Matrix $\mathbf{A}$?