

Aufgabe:	1	2	3	Σ
Punktzahl:	/20	/20	/20	/60

Klausur: Computergraphik I (CG-1) Probeklausur	Prüfer: Kolb	Datum/Zeit:
Semester:	Prüfungsdauer: 60 Minuten	Max. Punktzahl: 60
Hilfsmittel: • Schreibgeräte (kein Bleistift, keine Farbstifte (rot und grün)) • Lineal, Geo-Dreieck • Nicht-programmierbarer Taschenrechner		
Bitte beachten: • Tragen Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matr.-Nr. in die entsprechenden Felder ein. • Benutzen Sie nur das ausgeteilte Papier – kein eigenes Papier. Notizen sind auf den Rückseiten der Klausurblätter zulässig und werden nicht als Lösungsbestandteil gewertet. Die Mitnahme von Klausurbögen aus dem Raum ist nicht gestattet. • Die Klammerung der Klausurbögen darf nicht gelöst werden. • Schreiben Sie deutlich! Doppelte, unleserliche oder mehrdeutige Lösungen sind ungültig. • Erscheint Ihnen eine Aufgabenstellung mehrdeutig, melden Sie sich bitte durch Handzeichen bei einer Aufsichtsperson. • Ein Täuschungsversuch (Abschreiben, Nutzung unerlaubter Hilfsmittel, Kommunikation mit anderen Klausurteilnehmern, etc.) führt umgehend zum Ausschluss und Nichtbestehen. Es erfolgt keine Vorwarnung.		

Bitte ausfüllen:

Name:	Matrikel-Nr.:
--------------	----------------------

Aufgabe 1 Linien und Polygon Rasterisierung (20 Punkte)

1.1. Gegeben ist eine Strecke $\overline{P_1P_2}$ in Raster-Koordinaten:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Welche Anpassung ist durchzuführen, so dass die Einschränkungen des Bresenham-Algorithmus erfüllt sind? Ermitteln Sie Punkte Q_1, Q_2 , die durch die gewählte Anpassung aus P_1, P_2 entstehen.

$$1) P_{1,x} > P_{2,x} \Rightarrow P'_{1,x} := -P_{1,x} \wedge P'_{2,x} := -P_{2,x} \Rightarrow P'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} P'_2 = P_2$$

(An y-Achse spiegeln)

$$2) \Delta y \geq \Delta x \Rightarrow Q_{1,x} := P'_{1,y} \wedge Q_{1,y} := P'_{1,x} \Rightarrow Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_{2,x} := P'_{2,y} \wedge Q_{2,y} := P'_{2,x}$$

(Vertauschen von x- und y-Koordinaten)

1.2. Gegeben sind zwei Punkte:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } Q_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie das für die Strecke $\overline{Q_1Q_2}$ die Bedingungen für den Bresenham-Algorithmus erfüllt sind. Berechnen Sie anschließend die Rasterpunkte die der Bresenham-Algorithmus für die Strecke $\overline{Q_1Q_2}$ liefert. Verwenden Sie zur Durchführung des Algorithmus die folgende Tabelle:

$$\Delta y < \Delta x \quad x_1 < x_2 \quad y_1 \leq y_2$$

$$1 < 4 \quad 0 < 4 \quad 0 < 1$$

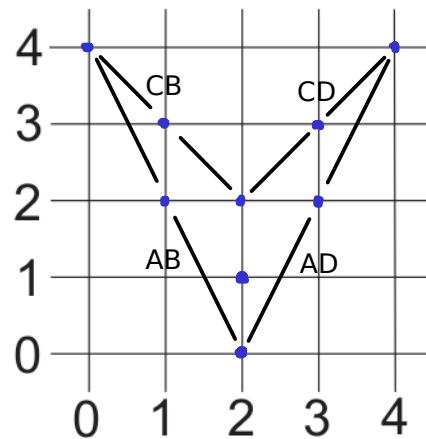
$$d_{init} = -2 \quad inc1 = 2 \quad inc2 = -6$$

x	y	d
0	0	-2
1	0	0
2	1	-6
3	1	-4
4	1	-2

Hinweis: $d_{init} = 2\Delta y - \Delta x$, $inc1 = 2\Delta y$, $inc2 = 2(\Delta y - \Delta x)$.

- 1.3. Die Kantendaten eines Polygons sind in der nachfolgenden Edge-Table gegeben. Die Edge-Table spiegelt den Anfangszustand des Scanline-Algorithmus wider. Für die Steigung der Polygonkanten gilt $\frac{\Delta x}{\Delta y} = dx + \frac{rx}{\Delta y}$ und zusätzlich gilt $x(y) = x + \frac{k}{\Delta y}$. Zeichnen Sie nun das Polygon in das Koordinatensystem ein.

EDGE-TABLE							
ID	x	k	y _{min}	y _{max}	dx	rx	Δy
AB	2	0	0	4	-1	1	2
AD	2	0	0	4	0	1	2
CB	2	0	2	4	-1	0	2
CD	2	0	2	4	1	0	2



gezeichnete Pixel
des Polygons sind
hier blau dargestellt.

x-Wert für linke Kanten immer aufrunden
für rechte Kanten immer abrunden

- 1.4. Führen Sie nun die Rasterisierung für die Edge Table aus Aufgabe 1.?? mit Hilfe des Scanline-Algorithmus durch. Vervollständigen Sie die Active Edge-Table in der folgenden Vorlage, indem Sie den Algorithmus durchführen. Geben Sie anschließend auch die Pixel-Intervalle für alle Scanlines die einen Schnittpunkt mit dem Polygon aufweisen an.

Scanline	ID	x	k	LR: pixel(x)	Scanline	ID	x	k	LR: pixel(x)
y=0	AB	2	0	L: 2					
	AD	2	0	R: 2					
y=1	AB	1	1	L: 2					
	AD	2	1	R: 2					
y=2	AB	1	0	L: 1					
	CB	2	0	R: 2					
	CD	2	0	L: 2					
	AD	3	0	R: 3					
y=3	AB	0	1	L: 1					
	CB	1	0	R: 1					
	CD	3	0	L: 3					
	AD	3	1	R: 3					
y=4	AB	0	0	L: 0					
	CB	0	0	R: 0					
	CD	4	0	L: 4					
	AD	4	0	R: 4					

Spans: y=0: x=2; y=1: x=2; y=2: x=1,2,3; y=3: x=1,3; y=4: x=0,4

Für die Laufvariablen x und k gilt:

$$k + rx < \Delta y : x \leftarrow x + dx; k \leftarrow k + rx$$

$$k + rx \geq \Delta y : x \leftarrow x + dx + 1; k \leftarrow k + rx - \Delta y$$

mit Initial : $k = 0$.

Aufgabe 2 Raycasting, Hierarchien (20 Punkte)

Beim Raycasting wird für jeden Bildpunkt ein Strahl mit den Objekten der Szene geschnitten. Im Folgenden soll ein Point-in-Polygon-Test durchgeführt werden, um zu prüfen, ob der Strahl

$$\mathbf{G}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha \geq 0$$

ein Polygon $\mathcal{P}$ mit den folgenden 5 Eckpunkten trifft.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 2.1. Bestimmen Sie den Schnittpunkt $\mathbf{S}$ der Polygonebene mit dem Strahl $\mathbf{G}(\alpha)$. Stellen sie hierfür zunächst die Ebenengleichung der von $\mathcal{P}$ definierten Ebene auf.

$$\vec{a} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$8\alpha + \alpha - 1 + 3\alpha - 2 = 0$$

$$12\alpha = 3$$

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{G}\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.25 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

- 2.2. Nachfolgend sei ein weiterer Schnittpunkt $\mathbf{S} = (-1, 0.5, 0.5)^T$ gegeben. Projizieren sie das Polygon $\mathcal{P}$ sowie den Schnittpunkt $\mathbf{S}$ zweidimensional auf eine Ebene. Geben sie die projizierten Punkte $\mathbf{P}'_i$ und $\mathbf{S}'$ an und begründen sie ihre Ebenen-Wahl.

Die Ergebnis-Punkte $\mathbf{P}'_i$ und $\mathbf{S}'$ liegen anschließend im (x', y') -Koordinaten-System vor.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Projektion auf Ebene } x=0, \text{ da } |n_x| > |n_y|$$

$$\wedge |n_x| > |n_z|$$

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}'_4 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}'_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 2.3. Verschieben sie anschließend die projizierten Punkte, so dass der Schnittpunkt S' im Ursprung liegt. Führen sie für das verschobene Polygon mit den Punkte P_i'' für die Kanten $\overline{P_i''P_{i+1}''}$ ($i = 1, \dots, 5$, $P_6'' = P_1''$) die Trivial-Reject-Prüfung entlang der x' -Achse durch.

$$P_1'' = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad P_2'' = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad P_3'' = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \quad P_4'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad P_5'' = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bed. S. in TR: } x_i'' < 0 \wedge x_{i+1}'' < 0$$

$$\textcircled{1} y_i'' < 0 \wedge y_{i+1}'' < 0 \Rightarrow$$

$$\textcircled{2} y_i'' \geq 0 \wedge y_{i+1}'' \geq 0$$

$$P_1''P_2'': \text{kein TR}$$

$$P_2''P_3'': \text{TR wg. } \textcircled{2}$$

$$P_3''P_4'': \text{TR wg. } \textcircled{2}$$

$$P_4''P_5'': \text{TR wg. } \textcircled{1}$$

$$P_5''P_1'': \text{TR wg. } \textcircled{3}$$

- 2.4. Bestimmen sie für die verbleibende(n) Kante(n) die Schnittpunkte mit der x' -Achse und überprüfen sie, ob S inner- oder außerhalb des Polygons liegt.

$$P_1''P_2'': \quad (1-\alpha)y_1'' + \alpha y_2'' = 0$$

$$\alpha = \frac{-y_1''}{y_2'' - y_1''} = 0.75 = \frac{3}{4}$$

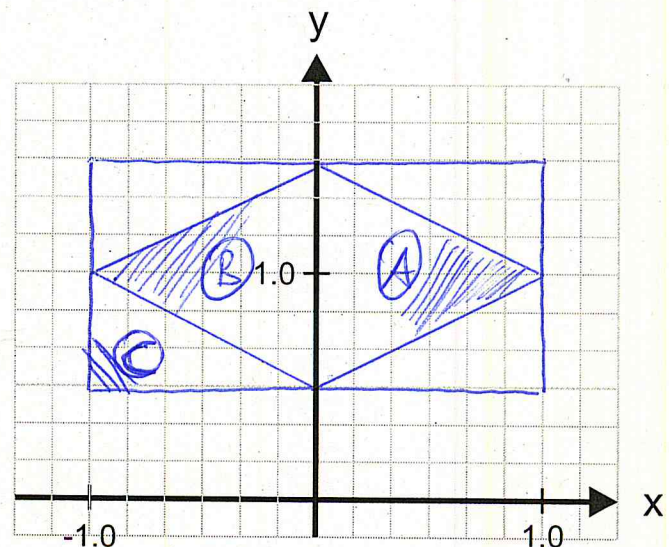
$$\text{Prüfung auf positivem } x\text{-Wert: } (1-\alpha)P_1 + \alpha P_2 = \frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{4}P_2 =$$

$$\Rightarrow S \text{ innerhalb des Polygons}$$

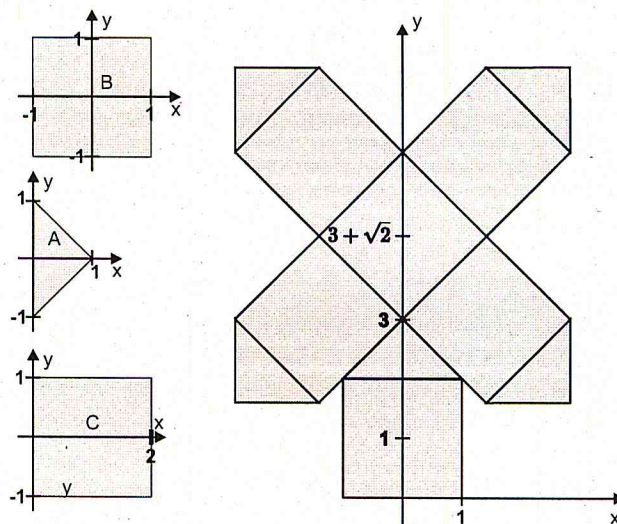
Aufgabe 3 Transformationen, Hierarchien (20 Punkte)

3.1. Zeichnen Sie das Ergebnis der OpenGL-Aufrufe in das (Welt-)Koordinatensystem ein. Kennzeichnen Sie die einzelnen Primitive in der Zeichnung.

```
glTranslatef(-0.5f,0.5f,0);
glPushMatrix();
    glRotatef(-90,0,0,1);
    glTranslatef(0,0.5f,0);
    glScalef(0.5f,1.0f,1.0f);
    // PRIMITIVE 0
    glBegin(GL_TRIANGLES);
        glColor3f(1,0,0);
        glVertex3f(0,0,0);
        glVertex3f(-1,1,0);
        glVertex3f(-2,0,0);
    glEnd();
glPopMatrix();
glPushMatrix();
    glTranslatef(0.5,0.5,0);
    glPushMatrix();
        glRotatef(-180.0f,0,0,1);
        glScalef(1,0.5f,1);
        // PRIMITIVE 1
        glBegin(GL_TRIANGLES);
            glVertex3f(1,0,0);
            glVertex3f(0,1,0);
            glVertex3f(0,-1,0);
        glEnd();
    glPopMatrix();
glPopMatrix();
glRotatef(-90.0f,0,0,1);
// PRIMITIVE 2
glBegin(GL_LINES);
    glVertex3f(-0.5,-1,0);
    glVertex3f(-0.5,1,0);
    glVertex3f(-0.5,1,0);
    glVertex3f(0.5,1,0);
    glVertex3f(0.5,1,0);
    glVertex3f(0.5,-1,0);
    glVertex3f(0.5,-1,0);
    glVertex3f(-0.5,-1,0);
glEnd();
glPopMatrix();
```

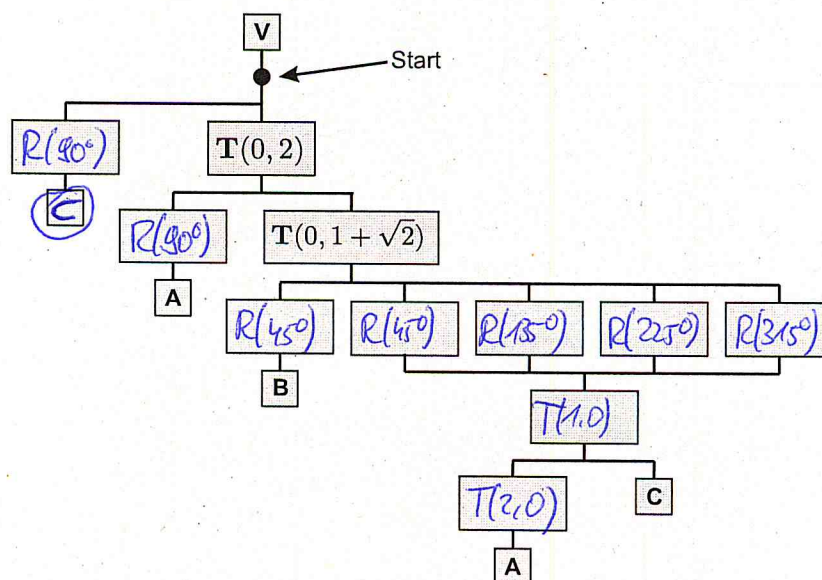


3.2. In dieser Teilaufgabe sind die Objekte A, B und C gegeben, mit deren Hilfe das Windrad als **Tangram**-Objekt konstruiert werden soll (siehe Abbildung).



Ergänzen Sie die folgende **Transformationshierarchie**, so dass genau das vorgegebene Tangram gebildet wird. Die Knoten des Hierarchie-Graphen haben die folgende Bedeutung:

V	Viewing-Transformation (hier: $V = Id$)
$T_{(x,y)}$	Translation um den Vektor (x,y)
R_ϕ	Rotation um den Winkel ϕ gegen den Uhrzeigersinn
$S_{a,b}$	Skalierung um a, b in x - bzw. y -Richtung
A, B, C	Zeichnen des Objektes A, B bzw. C



Hinweise: Objekte dürfen mehrfach verwendet werden. Achten Sie darauf, dass in der Hierarchie die Transformationen bzgl. des **lokalen** Koordinatensystem (Objektkoordinaten) zu interpretieren sind!