

Übung zu Computergraphik I

– Übungsblatt 1 –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme

Hochstetter Hendrik, Marchel Peter

Abgabe: bis spätestens 25. April 2013, 10 Uhr

Besprechung: 2. und 8. Mai 2013

Aufgabe 1 (Vektorrechnung) 1 Punkt

Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind, und begründen Sie Ihre Aussage.

- a) Aus $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ folgt, dass mindestens einer der beiden Vektoren ein Nullvektor ist.
- b) Es gilt: $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$
- c) Orthonormalbasen bilden stets Rechtssysteme.
- d) Es gilt: $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$
- e) Ist der Vektor $\vec{a}$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{b}$, so gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Aufgabe 2 (Vektorrechnung) 1 Punkt

Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(-\vec{b}) \times \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.
- b) Zeigen Sie, dass $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ paarweise orthogonal sind. Bilden die Vektoren in der Reihenfolge $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ein Links- oder ein Rechtssystem?

Aufgabe 3 (Abstandsberechnung) 1 Punkt

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei g_1 die Gerade durch $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ und g_2 die Gerade durch $\mathbf{R}$ mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = (1, 0, 1)^T$. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\mathbf{P}$ von der Geraden g_2 , sowie den Abstand der Geraden g_1 von g_2 .

Hinweis: Bestimmen Sie Punkte minimalen Abstands mit Hilfe der Eigenschaft, dass die kürzeste Strecke zwischen den beiden Geraden orthogonal zu den Richtungsvektoren steht.

Aufgabe 4 (Ebenen) 1 Punkt

Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Ebene

$$E: \mathbf{P}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Es sei X die zu E parallele Ebene durch den Punkt $\mathbf{A} = (-4, 2, 2)^T$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von X .
- Welcher Punkt $\mathbf{B}$ der Ebene E besitzt den kleinsten Abstand zum Punkt $\mathbf{A}$ und wie groß ist dieser Abstand?
- Zeigen Sie, dass die Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C} = (-3, 0, 4)^T$ ein gleichschenkliges Dreieck bilden.
- Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathbf{C} = (-3, 0, 4)^T$ in der Ebene X liegt. Lösen Sie hierzu ein einfaches Lineares Gleichungssystem.
- Formen Sie die Ebene E in Hesse'sche Normalform um, d.h. in eine Gleichung der Form $\vec{p} \cdot \hat{n} = c$, wobei $\hat{n}$ ein normierter Normalenvektor und $\mathbf{p}$ ein Punkt in der Ebene ist.