Übung zu Computergraphik I

– Übungsblatt 4 –

Lehrstuhl für Computergraphik und Multimediasysteme
Hochstetter Hendrik, Marchel Peter

Abgabe: bis spätestens 13. Juni 2013, 10 Uhr
Besprechung: 19. und 20. Juni 2013

Hinweis: Werfen Sie Ihre Bearbeitung bitte zusammengeheftet in den Briefkasten bzw. Pappkarton vor Raum H-A 7115/2.

Aufgabe 1 (Kay-Kayjia) **1 Punkt**

Für das Raytracing-Verfahren ist der Schnitt eines Strahls mit einer Geometrie ein wesentlicher Aspekt. Zur Beschleunigung wird im Kay-Kayjia-Ansatz der Schnitt mit einer achsenparallelen, die Geometrie umfassende Bounding-Box gebildet. Wird die Bounding-Box vom Strahl nicht geschnitten, so ist ein weiterer Test nicht notwendig.

Gegeben seien eine Bounding-Box $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}] \times [y_{\text{min}}, y_{\text{max}}] \times [z_{\text{min}}, z_{\text{max}}]$ und ein Strahl g. Der Strahl g führt durch den Anfangspunkt $\mathbf{V} = (0,2,-4)^{\mathsf{T}}$ mit Richtung $\vec{\mathbf{r}} = (0,1,-5)^{\mathsf{T}}$. Die Bounding-Box ist durch folgende Grenzen definiert:

$$
\begin{aligned}
x_{\text{min}} &= -1, & x_{\text{max}} &= 2 \\
y_{\text{min}} &= -1, & y_{\text{max}} &= 2 \\
z_{\text{min}} &= -1, & z_{\text{max}} &= -3
\end{aligned}
$$

Führen Sie einen Schnitt zwischen Gerade und Bounding-Box durch, indem Sie nacheinander – wie in der Vorlesung – die drei Koordinatenachsen x, y, z betrachten.

Aufgabe 2 (Reihenfolge affiner Transformationen) **1 Punkt**

a) Affine Transformationen sind im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h. die Reihenfolge der Ausführung zweier Transformation ist für das Ergebnis relevant. Prüfen Sie dies für die folgenden Paare von Transformationen:
Rotation - Skalierung, Translation - Skalierung, Rotation - Translation.
Hinweis: Es reicht aus, eine Rotationsmatrix (bspw. um die x-Achse) zu prüfen.
b) Begründen Sie anhand eines einfachen Beispiels, warum eine Folge von Transformationen in unterschiedlicher Reihenfolge zu interpretieren ist, je nachdem ob man die Transformationen bzgl. des globalen oder lokalen Koordinatensystems durchführt.

Aufgabe 3 (Affine Transformationen und homogene Koordinaten) **2 Punkte**

a) Sei $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt im 3-dimensionalen Raum und $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_4$ eine beliebige Folge von vier Transformationsmatrizen. Bei der Berechnung des transformierten Punktes $\mathbf{P}' = \mathbf{T}_1 \cdots \mathbf{T}_4\mathbf{P}$ sind folgende Klammerungen zulässig:

$$\mathbf{P}' = (((\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)\mathbf{T}_3)\mathbf{T}_4)\mathbf{P} \qquad (1)$$
$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}_1(\mathbf{T}_2(\mathbf{T}_3(\mathbf{T}_4\mathbf{P}))) \qquad (2)$$

Welche Gründe sprechen für die eine oder für die andere Variante?

b) Zeigen Sie induktiv, dass die Multiplikation einer beliebigen Folge $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n$ von n Translationsmatrizen wieder eine Translationsmatrix ist.

c) Alle Punkte einer Einheitskugel sind in homogenen Koordinaten durch die folgende parametrische Form mit zwei Winkeln $\theta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$ gegeben:

$$\mathbf{F}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

Leiten Sie diese Formel her, indem Sie zwei Rotationsmatrizen $\mathbf{R}_\phi$ und $\mathbf{R}_\theta$ finden, so dass die folgende Gleichung gilt:

$$\mathbf{F}(\theta, \phi) = \mathbf{R}_\phi\, \mathbf{R}_\theta \cdot [0,\ 0,\ 1,\ 1]^\mathsf{T}$$

Begründen Sie Ihre Wahl von $\mathbf{R}_\phi$ und $\mathbf{R}_\theta$.