Übung zu Computergraphik I

– Übungsblatt 5 –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme
Hochstetter Hendrik, Marchel Peter, Cespi Roberto

Abgabe: bis spätestens 27. Juni 2013, 10 Uhr
Besprechung: 03. und 04. Juli 2013

Hinweis: Werfen Sie Ihre Bearbeitung bitte zusammengeheftet in den Briefkasten bzw. Pappkarton vor Raum H-A 7115/2.

Aufgabe 1 (Inverse Transformationen) **1 Punkt**

Sei $\mathbf{M}$ gegeben durch eine Skalierung, eine Translation und eine Rotation:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}_{s_x,s_y,s_z} \cdot \mathbf{T}_{(t_x,t_y,t_z)} \cdot \mathbf{R}_{\phi,(r_x,r_y,r_z)}$$

Die Transformation von globalen Koordinaten in lokale Koordinaten kann mit Hilfe der Inversen $\mathbf{M}^{-1}$ durchgeführt werden. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Inversen von $\mathbf{M}$ an.

Aufgabe 2 (Transformation von Normalen) **1 Punkt**

Zur Berechnung der Beleuchtung einer transformierten Geometrie werden die transformierten Normalenvektoren benötigt. Im Allgemeinen können Punkte und Normalen jedoch nicht in gleicher Weise transformiert werden.
Es sei $\hat{\mathbf{n}}$ die Normale der Ebene E, welche durch die Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ definiert wird. Die Transformation der Punkte sei gegeben durch die Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4\times4}$.

$$\mathbf{P}_i' = \mathbf{M}\mathbf{P}_i \quad \text{für alle } \; i \in \{1,2,3\}$$

Um den transformierten Normalenvektor $\vec{\mathbf{n}}'$ zu berechnen, wird die Inverse der Transponierten von $\mathbf{M}$ gebildet. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung tatsächlich das gewünschte Ergebnis liefert:

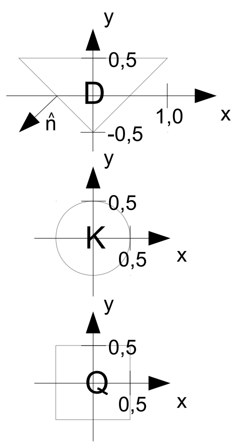
$$\vec{\mathbf{n}}' = (\mathbf{M}^{\mathsf{T}})^{-1}\hat{\mathbf{n}}$$

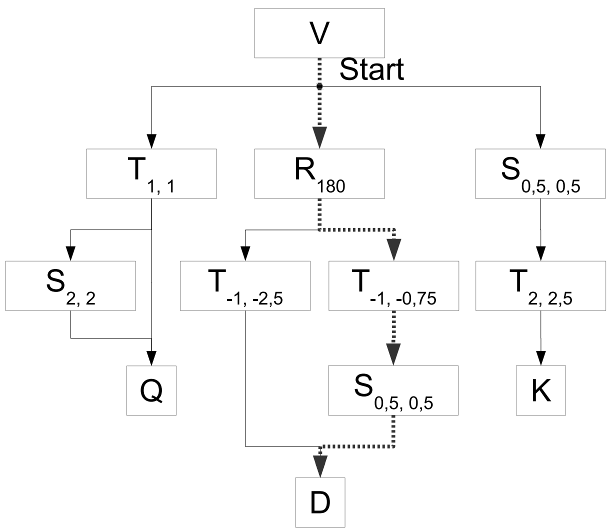
Hinweis: Sie können zur Lösung dieser Aufgabe die folgende Eigenschaft verwenden: Es gilt für eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und zwei Vektoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{M}\vec{\mathbf{b}})\right) &= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} m_{11} \ldots m_{1n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ m_{n1} \ldots m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)\right) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11}b_1 + \ldots + m_{1n}b_n \\ \vdots \\ m_{n1}b_1 + \ldots + m_{nn}b_n \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{matrix} a_1 m_{11} b_1 + \ldots + a_1 m_{1n} b_n + \\ \vdots \\ a_n m_{n1} b_1 + \ldots + a_n m_{nn} b_n \end{matrix} = \begin{matrix} a_1 m_{11} b_1 + \ldots + a_n m_{n1} b_1 + \\ \vdots \\ a_1 m_{1n} b_n + \ldots + a_n m_{nn} b_n \end{matrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_{11}a_1 + \ldots + m_{n1}a_n \\ \vdots \\ m_{1n}a_1 + \ldots + m_{nn}a_n \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} m_{11} \ldots m_{1n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ m_{n1} \ldots m_{nn} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right)^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= (\mathbf{M}^{\mathsf{T}}\vec{\mathbf{a}})^{\mathsf{T}}\vec{\mathbf{b}} = \left((\mathbf{M}^{\mathsf{T}}\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{b}}\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (Szenengraphen und Transformationen) **1 Punkt**

Gegeben seien die drei geometrischen Primitive D, K und Q und ein Szenengraph. Die Knoten





des Hierarchie-Graphen haben die folgende Bedeutung:

V	Viewing-Transformation, hier identische Abbildung
$T_{x,\ y}$	Translation um den Vektor (x, y)
R_ϕ	Rotation um den Winkel ϕ
$S_{a,\ b}$	Skalierung um a, b in x-, y-Richtung
D, K, Q	Zeichnen des Objekts D,K,Q

a) Zeichnen Sie die Szene nach, die durch den Graphen beschrieben wird.

b) Im Szenengraph ist ein Pfad gestrichelt gekennzeichnet. Bestimmen Sie die dem Pfad zugehörige Gesamttransformationsmatrix M, die D von lokalen Koordinaten ins globale Koordinatensystem überführt.

c) Das Dreieck D hat zusätzlich für eine Seite eine Flächennormale $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ eingezeichnet. Berechnen Sie die transformierte Flächennormale des Dreicks, das durch die Matrix M aus Aufbabenteil a) transformiert wird, und zeichnen Sie sie in Ihrer Szene ein.