

Visualisierung: 2D Vektorfelder

Andreas Kolb und Martin Lambers

computergraphik und multimedia systeme
universität siegen



Review: Letzte Stunde

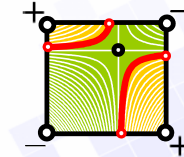
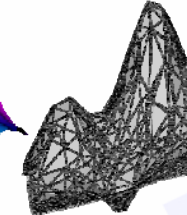
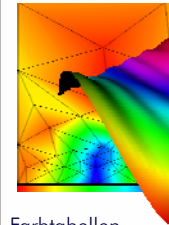
2

2D Skalarfelder

Farbkodierung

Oberflächen

Isolinien



Farbtabelle
Rasterisierung
per-Vertex Lookup
per-Pixel Lookup

Wireframe
HiddenLines
Flat-Shading
Gouraud-Shading

Sequentielles Verfahren
Contour Tracing
Midpoint Decoder
Asymptotic Decoder

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Review: Der Gradientenvektor

3

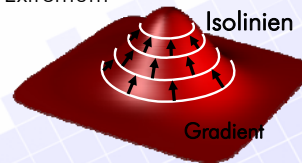
1. Ableitung eines 2D Skalarfeldes: Der Gradient

$$\text{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Gradientenvektors:

- zeigt in die Richtung des größten Anstiegs
- steht senkrecht auf den Isolinien
- ist gleich Null bei lokalem Extremum

Beispiel:
2D Höhenfeld

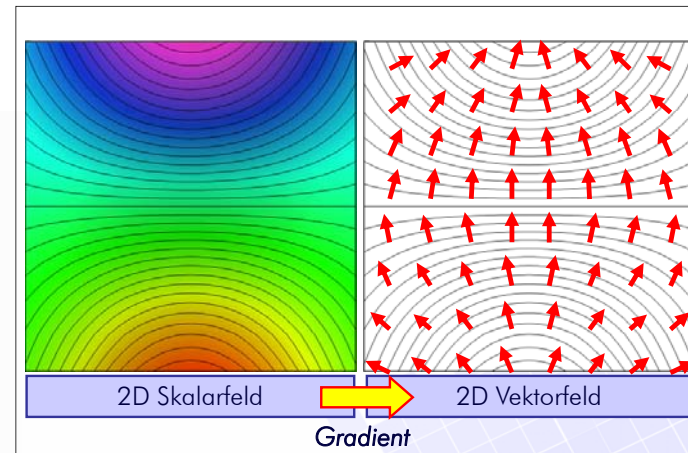


Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Das Gradientenfeld

4



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

2D Vektorfelder: Definition

5

2D Vektorfeld:

- selten analytisch gegeben:

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \\ x, y \in \mathbb{R}$$

- üblicherweise als diskrete Daten:

$$(x_i, y_i) \mapsto \vec{v}_i = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}_i$$

$$i \in [0, \dots, N]$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

2D Vektorfelder

6

- Ableitungen eines Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Betrachte partielle
Ableitungen der
Vektor-Komponenten

„wie stark ändert
sich v_x in
x-Richtung“

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

wie stark ändert
sich v_x in
y-Richtung

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

„wie stark ändert
sich v_y in
x-Richtung?“

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}$$

wie stark ändert
sich v_y in
y-Richtung

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

2D Vektorfelder

7

- Ableitungen eines Vektorfeldes

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix}$$

- Totales Differenzial:

$$J_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die **Jacobi-Matrix (Fundamental-Matrix)**
beschreibt *vollständig* „wie stark sich das
Vektorfeld in Punkt (x,y) ändert“

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Die Jacobi-Matrix

8

Wozu braucht man die Jacobi-Matrix?

- **Richtungsableitungen** in Richtung $\vec{h}$:

$$\frac{\partial \vec{v}(x, y)}{\partial \vec{h}} = J_{\vec{v}} \vec{h} \quad \text{mit} \quad |\vec{h}| = 1$$

Beispiele:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Lokale Eigenschaften

9

Als **Divergenz** bezeichnet man die Summe der Diagonalelemente der Jacobimatrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

- Die Divergenz erlaubt Aussagen über die Stärke von **Quellen** und **Senken** im Vektorfeld, bzw. über das „Auseinanderströmen“

Quelle bei $\vec{x}_0$

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0) > 0$$

Senke bei $\vec{x}_0$

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0) < 0$$

weder Quelle
noch Senke

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0) = 0$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

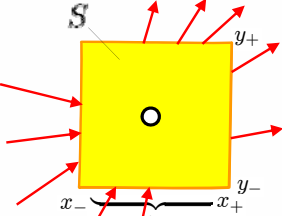
Visualisierung

Die Divergenz (anschaulich)

10

Betrachte ein kleines Flächenstück S um $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$

- Was ist die Differenz der ein- und ausfließenden Strömung?



$$\begin{aligned} \frac{1}{|S|} \int_{\partial S} (\vec{v}(x, y) \cdot \hat{n}(x, y)) dx dy \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left\{ \int_{y_-}^{y_+} (v_x(x_+, y) - v_x(x_-, y)) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_-}^{x_+} (v_y(x, y_+) - v_y(x, y_-)) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta y} \int_{y_-}^{y_+} \frac{v_x(x_+, y) - v_x(x_-, y)}{\Delta x} dy \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_-}^{x_+} \frac{v_y(x, y_+) - v_y(x, y_-)}{\Delta y} dx \end{aligned}$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Die Divergenz (anschaulich)

11

Betrachte ein kleines Flächenstück S um $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$

- Was ist die Differenz der ein- und ausfließenden Strömung?
- Lasse das Flächenstück S infinitesimal klein werden.

$\bigcirc$
 (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S|} \int_{\partial S} (\vec{v}(x, y) \cdot \hat{n}(x, y)) dx dy \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left\{ \int_{y_-}^{y_+} (v_x(x_+, y) - v_x(x_-, y)) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_-}^{x_+} (v_y(x, y_+) - v_y(x, y_-)) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta y} \int_{y_-}^{y_+} \frac{v_x(x_+, y) - v_x(x_-, y)}{\Delta x} dy \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_-}^{x_+} \frac{v_y(x, y_+) - v_y(x, y_-)}{\Delta y} dx \\ &\stackrel{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0}{=} \frac{\partial v_x}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v_y}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{div} \vec{v}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Lokale Eigenschaften

12

Als **Rotation** bezeichnet man (in 2D) die Differenz der Elemente der Gegendiagonale der Jacobimatrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

- Die Rotation (engl. auch curl) erlaubt Aussagen über die **lokale Rotation**, d.h. die **Wirbelhaftigkeit** (Vorticity) der Strömung.

Keine Rotation um $\vec{x}_0$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}_0) = 0$$

Lokale Rotation um $\vec{x}_0$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}_0) \neq 0$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

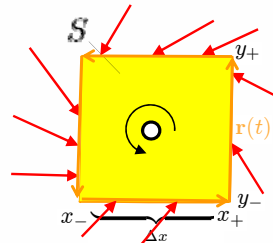
Die Rotation (anschaulich)

13

Betrachte ein kleines Flächenstück S um (x_0, y_0)

Was ist die Strömung entlang des Randes $r(t)$?

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S|} \int_{\partial S} \left(\vec{v}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(x(t), y(t)) \right) dt \\ = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left\{ \int_{y_-}^{y_+} (v_y(x_+, y) - v_y(x_-, y)) dy \right. \\ \left. + \int_{x_-}^{x_+} (v_x(x, y_-) - v_x(x, y_+)) dx \right\} \\ = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_-}^{y_+} \frac{v_y(x_+, y) - v_y(x_-, y)}{\Delta x} dy \\ - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_-}^{x_+} \frac{v_x(x, y_+) - v_x(x, y_-)}{\Delta y} dx \end{aligned}$$



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Die Rotation (anschaulich)

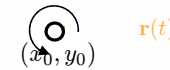
14

Betrachte ein kleines Flächenstück S um (x_0, y_0)

Was ist die Strömung entlang des Randes $r(t)$?

Lasse das Flächenstück S infinitesimal klein werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S|} \int_{\partial S} \left(\vec{v}(x(t), y(t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(x(t), y(t)) \right) dt \\ = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left\{ \int_{y_-}^{y_+} (v_y(x_+, y) - v_y(x_-, y)) dy \right. \\ \left. + \int_{x_-}^{x_+} (v_x(x, y_-) - v_x(x, y_+)) dx \right\} \\ = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_-}^{y_+} \frac{v_y(x_+, y) - v_y(x_-, y)}{\Delta x} dy \\ - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_-}^{x_+} \frac{v_x(x, y_+) - v_x(x, y_-)}{\Delta y} dx \\ \stackrel{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0}{=} \frac{\partial v_y}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(x_0, y_0) = \text{rot } \vec{v}(x_0, y_0) \end{aligned}$$



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Analytische Beispiele

15

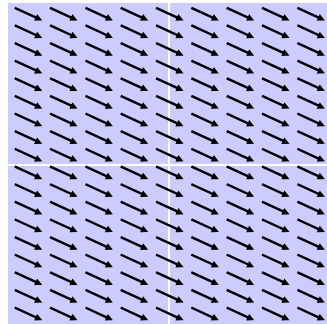
Konstantes Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \vec{v}(x, y) = 0$$

$$\text{rot } \vec{v}(x, y) = 0$$



Gleichförmige, laminare Strömung,
kein Auseinanderströmen (keine Divergenz),
keine Verwirbelung (keine Rotation)

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Analytische Beispiele

16

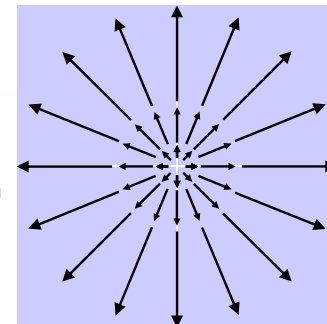
Identitäts-Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \vec{v}(x, y) = 2$$

$$\text{rot } \vec{v}(x, y) = 0$$



Keine Verwirbelung (Rotation),
Konstant positive Divergenz: Auseinanderströmen
jeder Punkt ist Quelle

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Analytische Beispiele

17

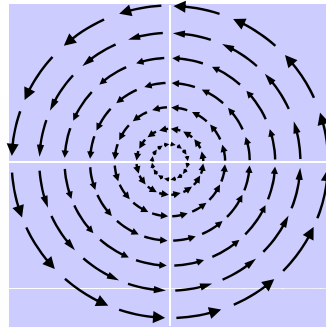
Zirkulares Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$J_{\vec{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y) = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y) = 2$$



Kein „Auseinanderströmen“ (keine Divergenz),
Lokale Rotation in jedem Punkt

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Analytische Beispiele

18

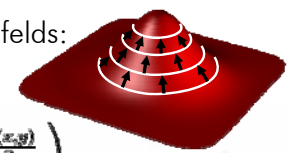
Gradient eines Skalar(Höhen-)felds:

$$\vec{v}(x, y) = \operatorname{grad} f(x, y)$$

$$J_{\vec{v}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y) = 0$$



Gradientenfelder sind **konservativ**, d.h. generell **rotationsfrei**
(Zirkulationen sind nicht möglich)

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

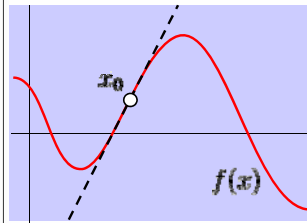
Grundlagen

19

● Taylorentwicklung:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

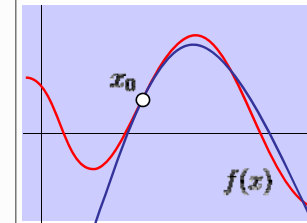
Grundlagen

20

● Taylorentwicklung:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$



● Approximiere $f(x)$ im
Punkt x_0 lokal durch eine
Parabel

Taylorentwicklung erlaubt
die Approximation beliebiger
Funktionen durch Polynome.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Lokale Eigenschaften

21

● Kritische Punkte (Fixpunkte):

Punkte im Vektorfeld, an denen die Strömung gleich null ist, d.h.

$$\vec{v}(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

● Die Taylorentwicklung liefert

$$\vec{v}(\vec{x}_0 + \vec{h}) \approx \vec{v}(\vec{x}_0) + J_{\vec{v}}(\vec{x}_0) \vec{h}$$

und somit

$$\vec{v}(\vec{x}_0 + \vec{h}) \approx J_{\vec{v}}(\vec{x}_0) \vec{h}$$

Die Eigenschaften der Strömung in unmittelbarer Umgebung des kritischen Punkt wird allein durch $J_{\vec{v}}(\vec{x}_0)$ bestimmt.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Lokale Eigenschaften

22

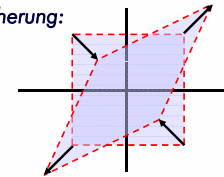
● Jede Matrix kann als Summe einer symmetrischen und einer asymmetrischen Matrix dargestellt werden:

$$J_{\vec{v}} = J_{\vec{v}}^{(\text{sym})} + J_{\vec{v}}^{(\text{asym})}$$

$$J_{\vec{v}}^{(\text{sym})} = \frac{J_{\vec{v}} + J_{\vec{v}}^T}{2}$$

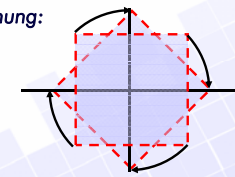
$$J_{\vec{v}}^{(\text{asym})} = \frac{J_{\vec{v}} - J_{\vec{v}}^T}{2}$$

Scherung:



„Stress-Strain-Tensor“

Drehung:



„Rotation“, „Vorticity“

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenwerte einer Matrix

23

Als Eigenwert einer $n \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet man Skalarwerte λ , die die Gleichung

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

erfüllen.

Diese Gleichung ist für bestimmte Paare von Eigenwerten λ und Eigenvektoren $\vec{x}$ erfüllt.

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda \text{Id} \vec{x}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \text{Id})\vec{x} = \vec{0}$$

charakteristisches Polynom

$$\text{lösbar für } \det(\mathbf{A} - \lambda \text{Id}) = 0$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenwerte einer Matrix

24

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(3 - \lambda) + 2 = 0 \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Zwei Lösungen: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenwerte einer Matrix

25

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = y$$

$$2x = y$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bzw. jedes Vielfache

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzw. jedes Vielfache

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenwerte einer Matrix

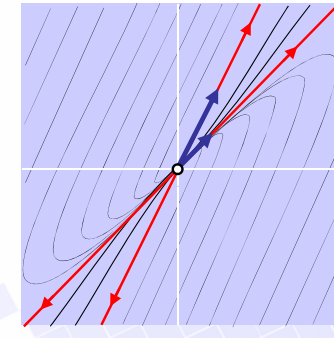
26

Betrachte das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbf{A} \vec{x}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenwerte einer Matrix

27

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(2 - \lambda) + 10 = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

Zwei Lösungen im Komplexen: $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$$\lambda_1 = 1 + 3i$$

$$\lambda_2 = 1 - 3i$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenwerte einer Matrix

28

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 + 3i \quad \begin{pmatrix} -1 - 3i & 2 \\ -5 & 1 - 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{1}{2}(1 + 3i)x$$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenwerte einer Matrix

29

Ein weiteres Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 + 3i$$

$$\lambda_2 = 1 - 3i$$

$$y = \frac{1}{2}(1 + 3i)x$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - 3i)x$$

Eigenvektor

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 3i \end{pmatrix}$$

bzw. jedes Vielfache

Eigenvektor

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 3i \end{pmatrix}$$

bzw. jedes Vielfache

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenwerte und Eigenvektoren

30

Für jede reelle $n \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$ gilt:

- die Matrix $\mathbf{A}$ hat genau n (möglicherweise komplexe) Eigenwerte.
(jeder Eigenwert wird entsprechend seiner Vielfachheit gezählt)
[Fundamentalsatz der Algebra]
- Komplexe Eigenwerte treten nur als Paare konjugiert komplexer Zahlen $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ auf.
(Dies bedeutet auch, dass bei ungeradem n mindestens ein reeller Eigenwert existiert.)
- Der Nullvektor zählt nicht als Eigenvektor

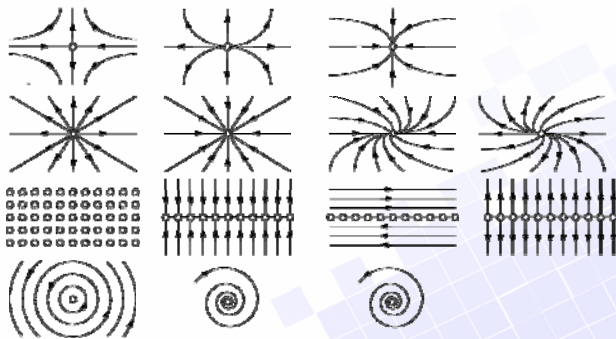
Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Vektorfeld-Topologie

31

- Der Verlauf der Flußlinien in unmittelbarer Umgebung eines Fixpunktes läßt sich in bestimmte **topologische** Kategorien einordnen:



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Vektorfeld-Topologie

32

Vorgehensweise:

- Bestimme **kritische Punkte** (Fixpunkte) im Vektorfeld
 - Bestimme die **Jacobimatrix** für jeden Fixpunkt (z.B. durch zentrale Differenzen)
 - Bestimme die **Eigenwerte** der Jacobimatrix und klassifiziere nach der Topologie (= Einordnung in eine der topologischen Kategorie)
 - Bestimme die **Eigenvektoren** zu den Eigenwerten (= Bestimmung der exakten Topologie, Scherung)

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

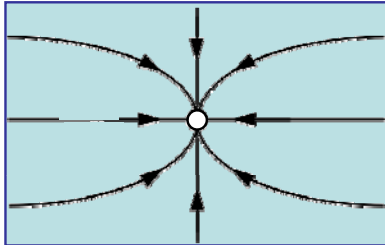
Kritische Punkte

33

Kategorie 1:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte
2 reelle Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Kategorie 1A:
 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



Senke (sink, attracting node).
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

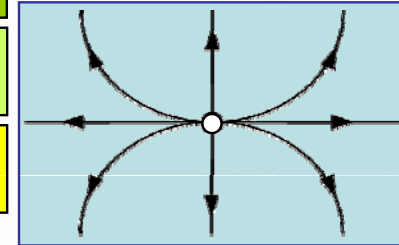
34

Kategorie 1:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte
2 reelle Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Kategorie 1A:
 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Kategorie 1B:
 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$



Quelle (source, repelling node).
Fixpunkt ist *instabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

35

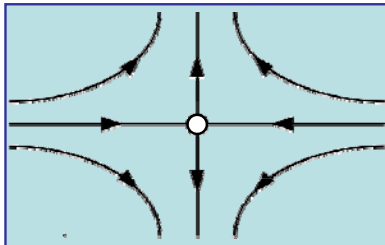
Kategorie 1:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte
2 reelle Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Kategorie 1A:
 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Kategorie 1B:
 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Kategorie 1C:
 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



Sattelpunkt (saddle).
Fixpunkt ist *instabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

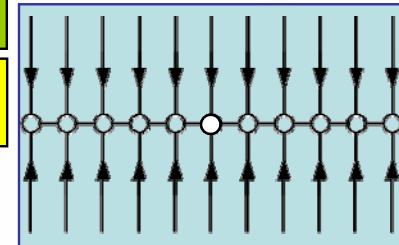
Kritische Punkte

36

Kategorie 2:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte,
einer davon ist 0
2 reelle Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Kategorie 2A:
 $\lambda < 0$



Senken auf einer Gerade
Fixpunkt ist *stabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

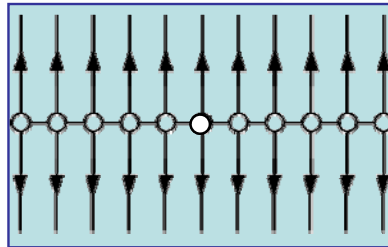
37

Kategorie 2:
Jacobimatrix besitzt
2 reelle Eigenwerte,
einer davon ist 0
2 reelle Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Kategorie 2A:
 $\lambda < 0$

Kategorie 2B:
 $\lambda > 0$



Quellen auf einer Gerade
Fixpunkt ist *instabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

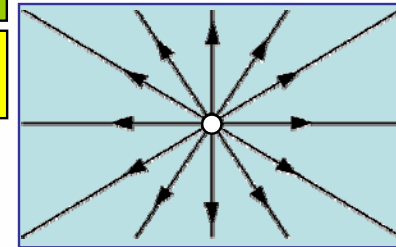
Kritische Punkte

38

Kategorie 3:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
2 reelle Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Kategorie 3A:
 $\lambda > 0$



Quelle (source, attracting node).
Fixpunkt ist *instabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

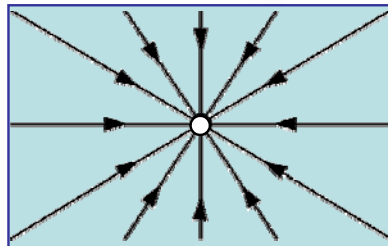
39

Kategorie 3:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
2 reelle Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Kategorie 3A:
 $\lambda > 0$

Kategorie 3B:
 $\lambda < 0$



Senke (sink, attracting node).
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

40

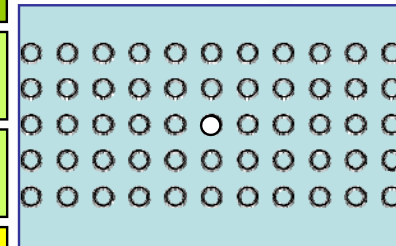
Kategorie 3:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
2 reelle Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Kategorie 3A:
 $\lambda > 0$

Kategorie 3B:
 $\lambda < 0$

Kategorie 3C:
 $\lambda = 0$



keine Strömung (alles Fixpunkte)
Fixpunkt ist *stabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

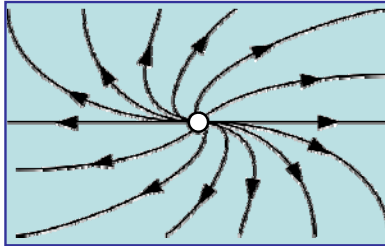
Kritische Punkte

41

Kategorie 4:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
1 reellen Eigenvektor

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Kategorie 4A:
 $\lambda > 0$



Quelle (source, repelling focus)
Fixpunkt ist *instabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

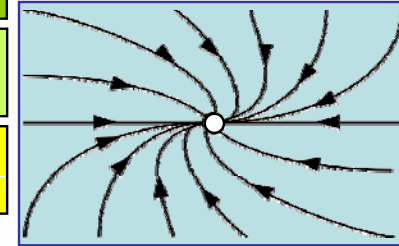
42

Kategorie 4:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
1 reellen Eigenvektor

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Kategorie 4A:
 $\lambda > 0$

Kategorie 4B:
 $\lambda < 0$



Senke (sink, attracting focus)
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

43

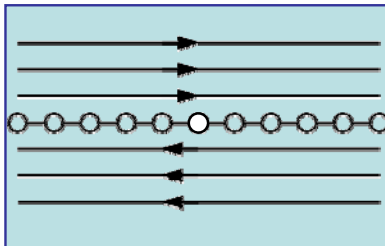
Kategorie 4:
Jacobimatrix besitzt
1 reellen Eigenwert
1 reellen Eigenvektor

Beispiel: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Kategorie 4A:
 $\lambda > 0$

Kategorie 4B:
 $\lambda < 0$

Kategorie 4C:
 $\lambda = 0$



Gerade von Fixpunkten
Fixpunkt ist *stabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

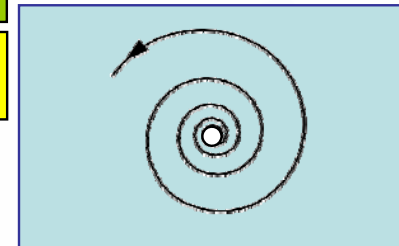
Kritische Punkte

44

Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl. Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Kategorie 5A:
 $\beta \neq 0 < \alpha$



Quellwirbel (repelling whirl)
Fixpunkt ist *instabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Bemerkung

45

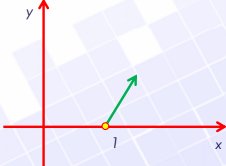
- Strömungsfeld ist lokal um kritische Punkte $\vec{x}_0$ durch Jakobi-Matrix charakterisiert

$$\vec{v}(\vec{x}_0 + \vec{h}) \approx J_{\vec{v}}(\vec{x}_0) \vec{h}$$

- Hierbei werden Punkte $\vec{x}_0 + \vec{h}$ in Vektoren in Strömungsrichtungen transformiert

- D.h.: Eine Rotationsmatrix liefert nicht zwangsläufig eine reine Zirkulation.

Rotation um 60° : $J_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}(\vec{x}_0 + \vec{h}) \approx J_{\vec{x}_0} \vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

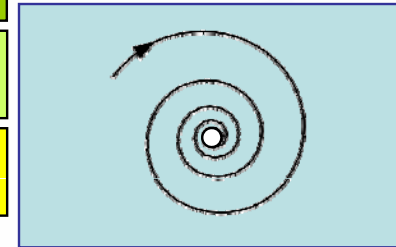
46

Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl.Eigenvektoren

Kategorie 5A:
 $\beta \neq 0 < \alpha$

Kategorie 5B:
 $\alpha < 0 \neq \beta$

Beispiel: $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$



Wirbelsenke (attracting whirl)
Fixpunkt ist *asymptotisch stabil*.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

47

Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl.Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Kategorie 5A:
 $\beta \neq 0 < \alpha$

Kategorie 5B:
 $\alpha < 0 \neq \beta$

Kategorie 5C:
 $\alpha = 0$

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

48

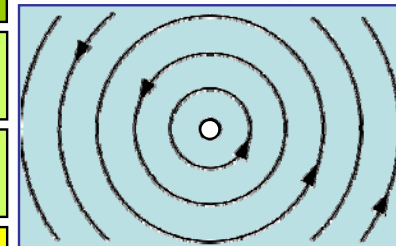
Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl.Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Kategorie 5A:
 $\beta \neq 0 < \alpha$

Kategorie 5B:
 $\alpha < 0 \neq \beta$

Kategorie 5C:
 $\alpha = 0$



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Kritische Punkte

49

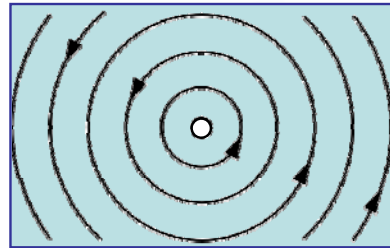
Kategorie 5:
Jacobimatrix besitzt
2 komplexe Eigenwerte
2 kompl. Eigenvektoren

Beispiel: $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Kategorie 5A:
 $\beta \neq 0 < \alpha$

Kategorie 5B:
 $\alpha < 0 \neq \beta$

Kategorie 5C:
 $\alpha = 0$



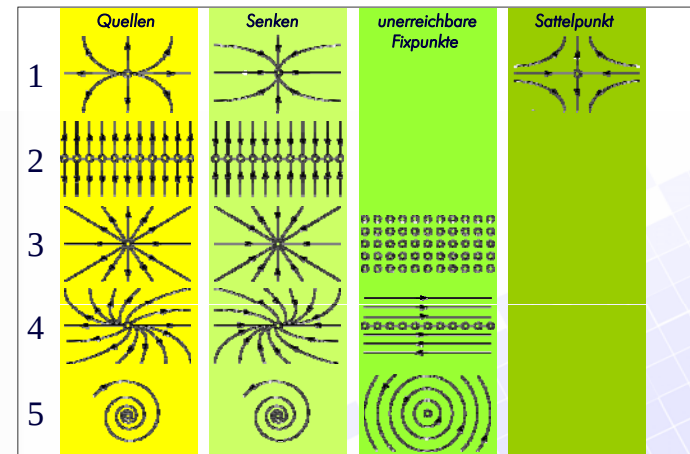
Zirkulare Strömung (center)
Fixpunkt ist stabil.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Vektorfeld-Topologie

50



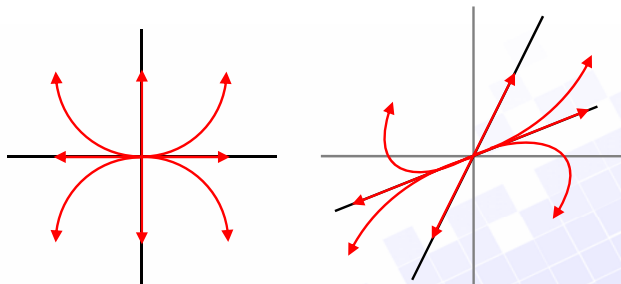
Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Eigenvektoren

51

Welche Rolle spielen die **reellen Eigenvektoren**?
(komplexe Eigenvektoren sollen hier nicht betrachtet werden)



Bei den Beispielmatrixen waren die
Eigenvektoren die Einheitsvektoren
der Koordinatenachsen

Bei beliebigen Jacobimatrizen
bestimmen die Eigenvektoren die
Scherung der Koordinatenachsen

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Stabilität

52

Stabilität bzw. Instabilität wird durch den **Realteil der Eigenwerte** bestimmt:

Ein lineares System ist (asymptotisch) stabil,
wenn für alle Eigenwerte gilt:

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0$$

Ein lineares System ist instabil, wenn für mindes-
tens einen Eigenwert gilt:

$$\operatorname{Re} \lambda_k > 0$$

Anmerkung: Asymptisch stabil heißt, dass es **unendlich viele** Pfade zu
dem Fixpunkt gibt.

Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Stabilität

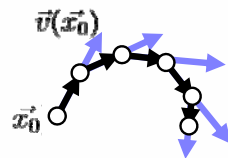
53

Was bedeutet *stabil*, *instabil*, und *asymptotisch stabil*?

Numerische Bestimmung einer Partikelbahn

(vgl. nächste Stunde):

- Beginne an einem bestimmten Startpunkt $\vec{x}_0$
- Bestimme die Strömung $\vec{v}(\vec{x}_0)$ an diesem Punkt.
- Gehe einen kleinen Schritt in Richtung der Strömung



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Stabilität

54

Im kritischen Punkt ist die Strömung gleich null.

Beginne ich die Berechnung einer Partikelbahn in der Nähe eines kritischen Punkts führt mich die Strömung...

stabil

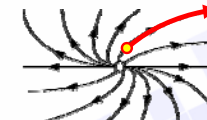
„...immer direkt in die Umgebung Fixpunkts“



„Der Fehler wird geringer bzw. bleibt konstant“

instabil

„...immer aus der Umgebung des Fixpunkts heraus“



„Der Fehler wird größer“

asympt. stabil

„...immer zu dem Fixpunkt hin, aber evtl. auf Umwegen“



„Der Fehler wird irgendwann stabil“

Andreas Kolb, Martin Lambers

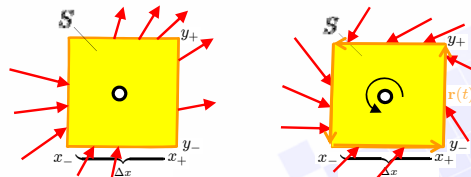
Visualisierung

Zusammenfassung

55

2D Vektorfelder

- Differenzieren vektorwertiger Funktionen
 - Totales Differenzial: **Jacobi-Matrix**
 - Richtungsableitung (über Jacobi-Matrix)
- **Divergenz**: beschreibt die Intensität von Quellen und Senken
- **Rotation**: beschreibt die „Wirbelhaftigkeit“



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung

Zusammenfassung

56

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Eigenvektoren sind Vektoren, die durch die Matrix „auf sich selbst abgebildet“ und dabei mit dem Eigenwert skaliert werden.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

- Löse das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$$

- Bestimme die Eigenvektoren anschließend durch einsetzen

Andreas Kolb, Martin Lambers

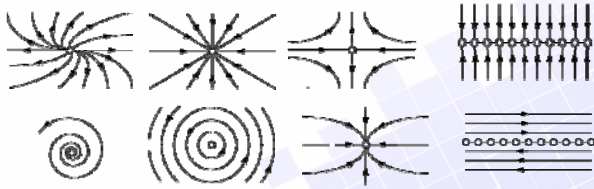
Visualisierung

Zusammenfassung

57

Kritische Punkte (Fixpunkte)

- charakterisiert durch $\vec{v}(\vec{x}_0) = \vec{0}$
- Eigenschaften der Strömung in Umgebung des Fixpunktes wird durch **Jacobi-Matrix** bestimmt.
- Die **Eigenwerte** der Jacobi-Matrix erlauben Klassifikation von kritischen Punkten (Topologie).



Andreas Kolb, Martin Lambers

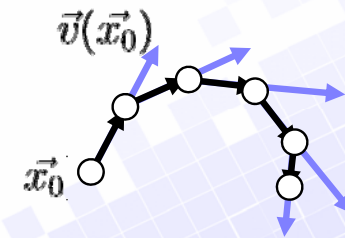
Visualisierung

Nächste Stunde

58

2D Vektorfelder

- **Numerische Integration**
 - Runge-Kutta-Verfahren
- **Zeitabhängige Vektordaten**
 - Particle Tracing
 - Streamlines
 - Streaklines
 - Pathlines



Andreas Kolb, Martin Lambers

Visualisierung