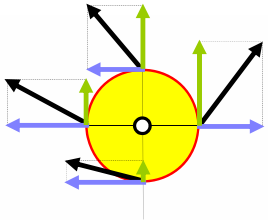
Visualisierung: 2D Vektorfelder II

Andreas Kolb und Martin Lambers

computergraphik und multimedia systeme
universität siegen

Letzte Stunde: *div* und *rot*

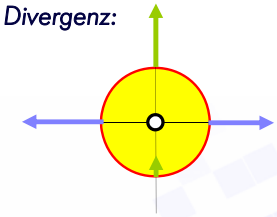
- Betrachte ein infinitesimal kleines Flächenstück S



Totales Differenzial:

$$J_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Divergenz:

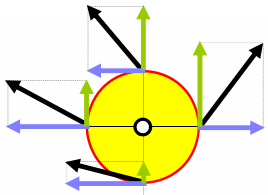


$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

- *„Quelle“* oder *„Senke“*?
- *„Auseinanderströmen“*

Letzte Stunde: *div* und *rot*

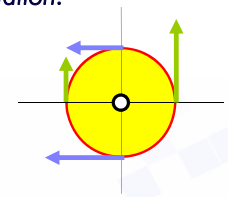
- Betrachte ein infinitessimal kleines Flächenstück S



Totales Differenzial:

$$J_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Rotation:



$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

- *„Lokale Rotation“*
- *„Verwirbelung“*

Eigenwerte einer Matrix

Als Eigenwert einer n×n-Matrix $\mathbf{A}$ bezeichnet man Skalarwerte λ, die die Gleichung

$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

erfüllen.

Diese Gleichung ist für bestimmte Paare von Eigenwerten λ und Eigenvektoren $\vec{x}$ erfüllt.

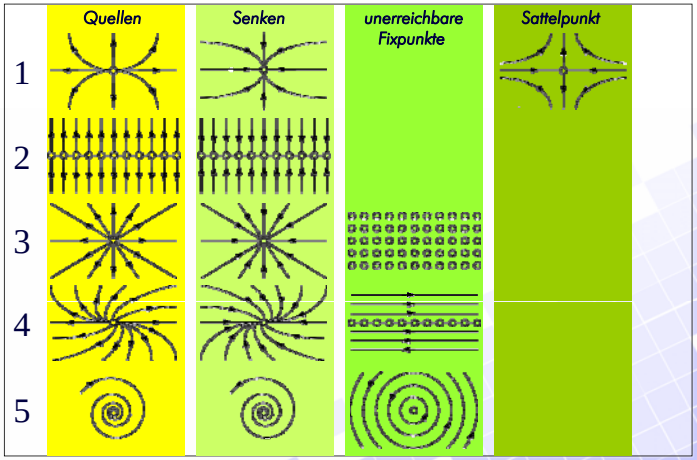
$$\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{Id})\vec{x} = \vec{0}$$

lösbar für $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{Id}) = 0$

charakteristisches Polynom

Vektorfeld-Topologie

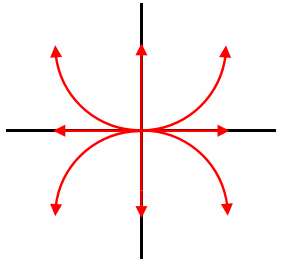
5



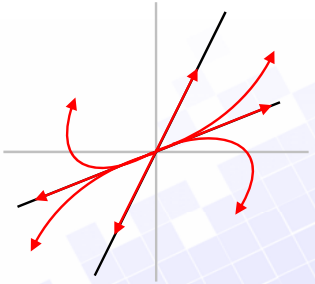
Eigenvektoren

6

- Welche Rolle spielen die *reellen Eigenvektoren?*
  (komplexe Eigenvektoren sollen hier nicht betrachtet werden)



Bei den Beispielmatrizen waren die Eigenvektoren die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen



Bei beliebigen Jacobimatrizen bestimmen die Eigenvektoren die Scherung der Koordinatenachsen

Stabilität

7

Stabilität bzw Instabilität wird durch den *Realteil der Eigenwerte* bestimmt:

- Ein lineares System ist (asymptotisch) stabil, wenn für alle Eigenwerte gilt:

$$Re\lambda_k \leq 0$$

- Ein lineares System ist instabil, wenn für mindestens einen Eigenwert gilt:

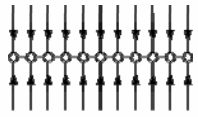
$$Re\lambda_k > 0$$

Anmerkung: Asymptisch stabil heißt, dass es *unendlich viele* Pfade zu dem Fixpunkt gibt. Bei stabilen Systemen sind es *abzählbar viele*.

Stabilität

8

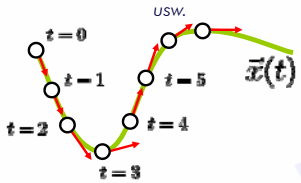
Im kritischen Punkt ist die Strömung gleich null.
Beginne ich die Berechnung einer Partikelbahn in der Nähe eines kritischen Punkts führt mich die Strömung…

stabil	*instabil*	*asymp. stabil*
„…immer direkt in die Umgebung Fixpunkts“	„…immer aus der Umgebung des Fixpunkts heraus“	„…immer zu dem Fixpunkt hin, aber *evtl. auf Umwegen*“
		
„Der Fehler wird geringer bzw. bleibt konstant“	„Der Fehler wird größer“	„Der Fehler wird irgendwann stabil“

Feldlinien

- Wie bestimme ich Feldlinien (Strömungslinien) im allgemeinen Fall?
  - Wir suchen die ***Bahn eines Partikels***, d.h. seine Position in Abhängigkeit der Zeit.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



- Diese Bahn muß so bestimmt werden, dass sie in jedem Punkt tangential zu dem gegebenen Vektorfeld verläuft

Das Vektorfeld selbst sei zeitlich konstant (statisch)

Explizites Euler-Verfahren

- Gegeben sei ein statisches Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ und ein Startpunkt $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$.
- Gesucht ist die Partikelbahn $\vec{x}(t)$

- *Taylorentwicklung:*

$$\vec{x}(t_0 + \tau) = \vec{x}(t_0) + \tau \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t_0) + \dots$$

$$\vec{x}(t_0 + \tau) = \vec{x}_0 + \tau \vec{v}(x_0) + \dots$$

Explizites Euler-Verfahren

- Gegeben sei ein statisches Vektorfeld $\vec{v}(\vec{x})$ und ein Startpunkt $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$.
- Gesucht ist die Partikelbahn $\vec{x}(t)$

- *Taylorentwicklung:*

$$\vec{x}(t_0 + \tau) = \vec{x}(t_0) + \tau \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t_0) + \dots$$

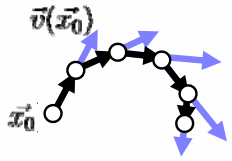
$$\vec{x}(t_0 + \tau) = \vec{x}_0 + \tau \vec{v}(x_0) + \dots$$

$$\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(x_i)$$

Explizites Euler-Verfahren

$$\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(x_i)$$

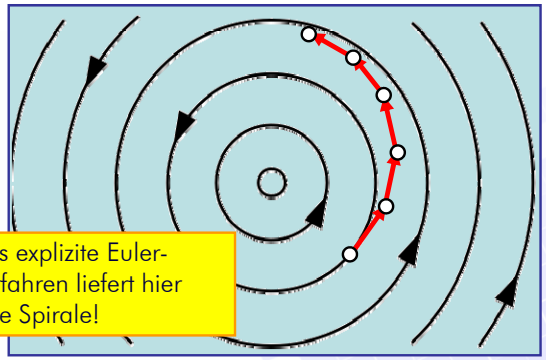
- Beginne an einem bestimmten Startpunkt $\vec{x}_0$
- Bestimme die Strömung $\vec{v}(\vec{x}_0)$ an diesem Punkt.
- Gehe einen kleinen Schritt in Richtung der Strömung



- *Genauigkeit* ist abhängig von der Schrittweite τ
- *Warum „explizit"?* Der Wert x_{i+1} ist ***explizit gegeben***, da alle Terme aus der rechten Seite bekannt sind.

Explizites Euler-Verfahren

- *Beispiel:* *Zirkulares Vektorfeld* $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



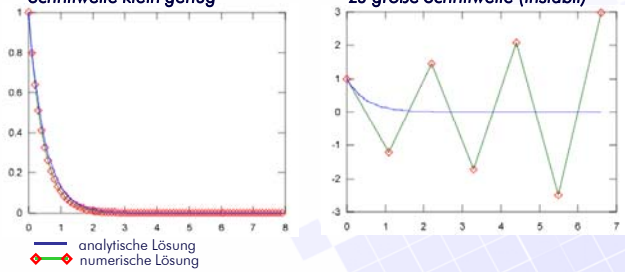
Das explizite Euler-Verfahren liefert hier eine Spirale!

Explizites Euler-Verfahren

Das explizite Euler Verfahren wird bei zu großer Schrittweite *numerisch instabil*. (Ein Beispiel dazu kommt in der Übung)

Beispiel: $\frac{\partial x}{\partial t} = -kx$ Lösung: $x(t) = e^{-kt}$ stabil für: $k\tau \leq 2$

Schrittweite klein genug *zu große Schrittweite (instabil)*



Implizites Euler-Verfahren

- *Taylorentwicklung im Punkt* $\vec{x}(t_0+\tau)$ *rückwärts:*

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_0+\tau) - \tau \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t_0+\tau) + \dots$$

auflösen nach $\vec{x}(t_0+\tau)$:

$$\vec{x}(t_0+\tau) = \vec{x}(t_0) + \tau \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t_0+\tau) + \dots$$

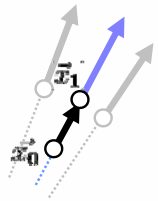
$$\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(x_{i+1})$$

- implizit: $\vec{v}(x_{i+1})$ ist nicht von vorneherein bekannt.

Implizites Euler-Verfahren

$$\vec{x}_{i+1} \approx \vec{x}_i + \tau \vec{v}(x_{i+1})$$

- Suche denjenigen Punkt $\vec{x}_1$, dessen Geschwindigkeits-Vektor mit dem Vektor von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}_1$ übereinstimmt.



- *Vorteil:* numerische Stabilität
- *Nachteil:* Lösung der impliziten Gleichung kann sehr aufwändig sein (z.B. iterativer Ansatz)

Implizites Euler-Verfahren

- Einfache Lösung im linearen Fall: $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbf{A}\,\vec{x}$

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \tau \mathbf{A}\vec{x}_{i+1}$$

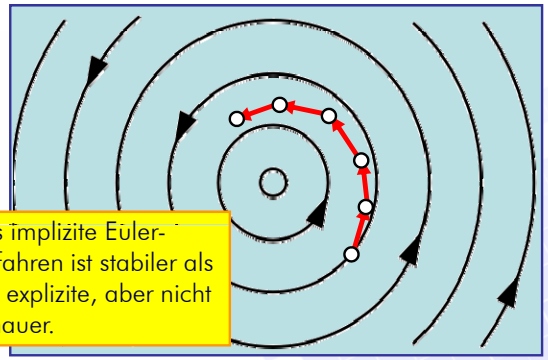
$$\mathbf{Id}\,\vec{x}_{i+1} - \tau \mathbf{A}\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i$$

$$\vec{x}_{i+1} = (\mathbf{Id} - \tau\,\mathbf{A})^{-1}\,\vec{x}_i$$

  Im linearen Fall ist also auch hier eine *explizite* Berechnung der Partikelbahn möglich.
- Im Allgemeinen ist die Lösung der impliziten Gleichung allerdings aufwändiger und erfordert iterative Verfahren.

Implizites Euler-Verfahren

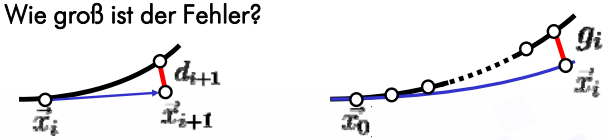
- *Beispiel:* *Zirkulares Vektorfeld* $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



Das implizite Euler-Verfahren ist stabiler als das explizite, aber nicht genauer.

Fehlerbetrachtung

- Wie groß ist der Fehler?

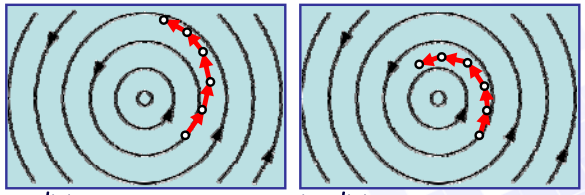


- Der *lokale Diskretisationsfehler* (lok. Abbruchfehler) d_i ist der Fehler, der bei einem einzigen Schritt gemacht wird.
  - Er entsteht beim Abbrechen der Taylorreihe.
- Der *globale Abbruchsfehler* g_i ist der Fehler, der durch Akkumulation der lokalen Fehler entsteht.
  - Er ist in der Regel eine Größenordnung höher als der lok. Fehler
- Jedes num. Integrationsverfahren hat eine *Fehlerordnung*:

Fehlerordnung p: $g_i = o(\tau^{p+1}),\ d_i = o(\tau^p)$

Euler-Verfahren

- Das *Euler-Verfahren* *(explizit oder implizit)* hat die Fehlerordnung 1.



explizit *implizit*

Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Idee: Kombiniere das explizite mit dem impliziten Euler-Verfahren:

- Versuche zunächst den nächsten Punkt „vorherzusagen“ (Prädiktor) mit explizitem Euler Verfahren:

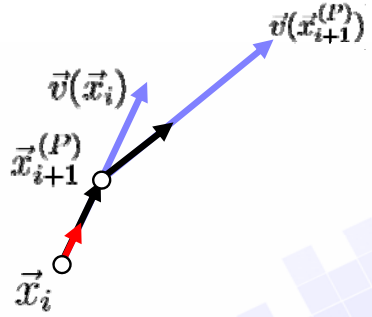
$$\vec{x}_{i+1}^{(P)} = \vec{x}_i + \tau \vec{v}(\vec{x}_i)$$

- Korrigiere diesen Wert durch einen impliziten Schritt:

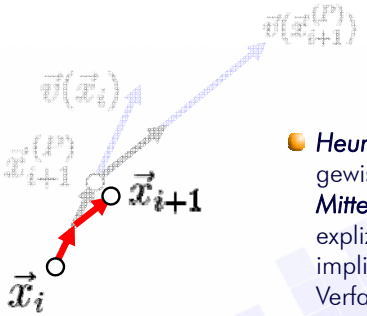
$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \frac{\tau}{2}\left(\vec{v}(\vec{x}_i) + \vec{v}(\vec{x}_{i+1}^{(P)})\right)$$

Explizites Heun-Verfahren
2. Ordnung

Heun‘sches Verfahren



Heun‘sches Verfahren



- *Heun* ist auf gewisse Weise der *Mittelwert* zwischen explizitem und implizitem Euler-Verfahren

auch Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung, *Fehlerordnung 2*

Fixpunkt-Iteration

Idee: Führe mehrere Prädiktor-Korrektor-Schritte hintereinander aus bis das Ergebnis konvergiert.

- Bestimme zunächst den nächsten Punkt als Vorhersage (Prädiktor) mit expliziten Euler Verfahren

$$\vec{x}_{i+1}^{(0)} = \vec{x}_i + \tau \vec{v}(\vec{x}_i)$$

- Korrigiere diesen Wert so lange, bis sich der Wert nicht mehr signifikant ändert.

$$\vec{x}_{i+1}^{(k+1)} = \vec{x}_i + \frac{\tau}{2}\left(\vec{v}(\vec{x}_i) + \vec{v}(\vec{x}_{i+1}^{(k)})\right)$$

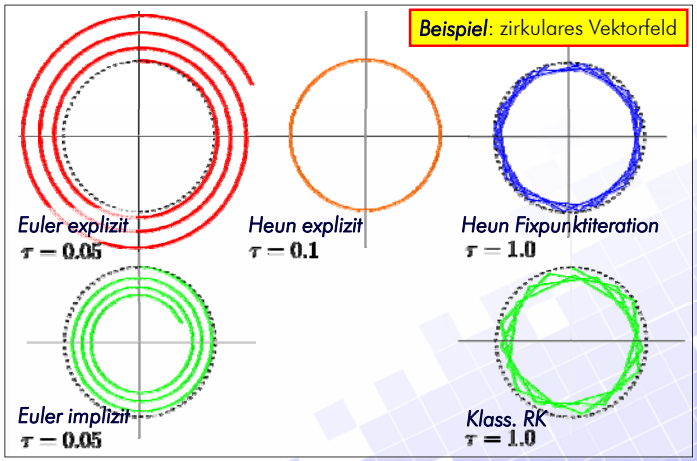
Runge-Kutta-Verfahren

- Klassisches Runge-Kutta-Verfahren (4.Ordnung)

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{v}(\vec{x}_i)\\ \vec{k}_2 &= \vec{v}(\vec{x}_i + \tfrac{1}{2}\tau\vec{k}_1)\\ \vec{k}_3 &= \vec{v}(\vec{x}_i + \tfrac{1}{2}\tau\vec{k}_2)\\ \vec{k}_4 &= \vec{v}(\vec{x}_i + \tau\vec{k}_3)\\ \vec{x}_{i+1} &= \vec{x}_i + \tfrac{1}{6}\tau(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)\end{aligned}$$

- *Fehlerordnung 4*

Vergleich



Zusammenfassung

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Wir haben das Vektorfelder $\vec{v} = f(\vec{x})$ betrachtet, z.B. $\vec{v}(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \qquad \frac{\partial \vec{x}(t)}{\partial t} - \vec{v}(\vec{x}(t)) = 0$$

Gewöhnliche Differentialgleichung, 1. Ordnung

Mit einer Nebenbedingung $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ spricht man von einer ***Anfangswertaufgabe*** (bzw. Anfangswertproblem).

Stabilität des Eulerverfahrens

- Beispiel (1-dimensional)

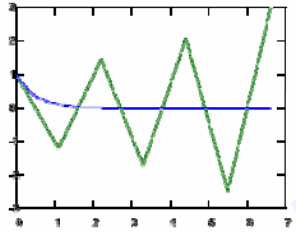
Differentialgleichung:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k \cdot x$$

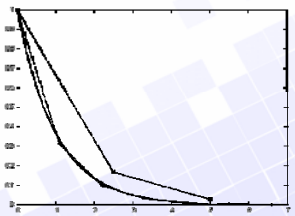
Analytische Lösung:

$$x(t) = x_0\, e^{-kt}$$

Numerische Lösung: Euler explizit



Numerische Lösung: Euler implizit



Beispiel zur Stabilität

- *Betrachte die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = v(x(t)) = -k\,x(t) \qquad \text{mit } k > 0$$

- *Behauptung:* Die Lösung dieser Gleichung ist

$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Prüfe:*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\ e^{-kt} = -k\,x(t)$$

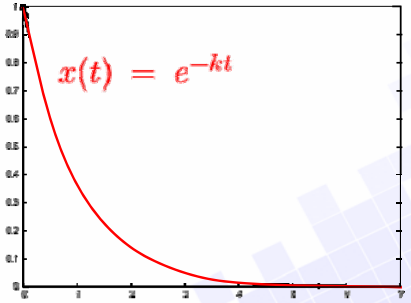
Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

$$x(t) = e^{-kt}$$



Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Explizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_i)$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \tau k\,x_0 \\ &= (1-\tau k)x_0 \\ x_2 &= x_1 - \tau k x_1 \\ &= (1-\tau k)x_1 = (1-\tau k)^2 x_0 \\ x_n &= x_{n-1} - \tau k x_{n-1} = (1-\tau k)^n x_0 \end{aligned}$$

Beispiel zur Stabilität

- *Differentialgleichung*

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$$

- *Analytische Lösung:*

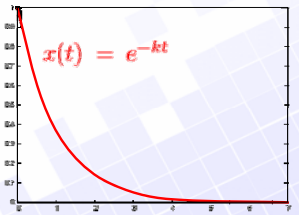
$$x(t) = e^{-kt}$$

- *Explizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_i)$

$$x_n = (1-\tau k)^n x_0$$

- *Vergleich mit analyt. Lösung:*
  Start: $x(0) = x_0 = 1$
  Für großes n muß gelten: $x_n \to 0$
  Dazu muß gelten:

$$\|1 - \tau k\| < 1$$



Beispiel zur Stabilität

33

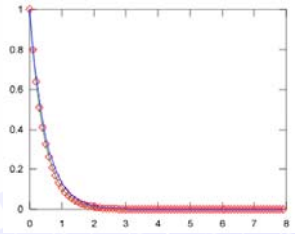
- *Differentialgleichung* $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$
- *Analytische Lösung:* $x(t) = e^{-kt}$
- *Explizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_i)$

$$x_n = (1 - \tau k)^n x_0$$

- *Vergleich mit analyt. Lösung:*
  Start: $x(0) = x_0 = 1$
  Für großes n muß gelten: $x_n \to 0$
  Dazu muß gelten:

$$-2 < -\tau k < 0$$

$$0 \le \tau \le \frac{2}{k}$$



Schrittweite klein genug

Beispiel zur Stabilität

34

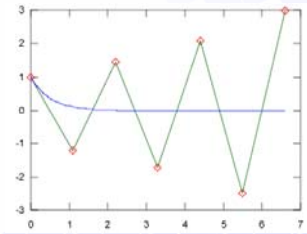
- *Differentialgleichung* $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$
- *Analytische Lösung:* $x(t) = e^{-kt}$
- *Explizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_i)$

$$x_n = (1 - \tau k)^n x_0$$

- *Vergleich mit analyt. Lösung:*
  Start: $x(0) = x_0 = 1$
  Für großes n muß gelten: $x_n \to 0$
  Dazu muß gelten:

$$-2 < -\tau k < 0$$

$$0 \le \tau \le \frac{2}{k}$$



Schrittweite zu groß

Beispiel zur Stabilität

35

- *Differentialgleichung* $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$
- *Analytische Lösung:* $x(t) = e^{-kt}$
- *Implizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_{i+1})$

$$x_1(1 + \tau k) = x_0$$

$$x_1 = \frac{1}{(1+\tau k)}\,x_0$$

$$x_2 = \frac{1}{(1+\tau k)}\,x_1 = \left(\frac{1}{(1+\tau k)}\right)^2 x_0$$

$$x_n = \frac{1}{(1+\tau k)}\,x_{n-1} = \left(\frac{1}{(1+\tau k)}\right)^n x_0$$

Beispiel zur Stabilität

36

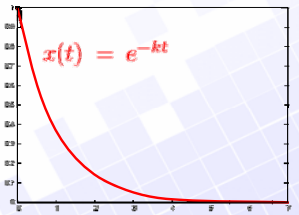
- *Differentialgleichung* $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -k\,x(t)$
- *Analytische Lösung:* $x(t) = e^{-kt}$
- *Implizites Eulerverfahren:* $x_{i+1} = x_i + \tau v(x_{i+1})$

$$x_n = \left(\frac{1}{(1+\tau k)}\right)^n x_0$$

- *Vergleich mit analyt. Lösung:*
  Start: $x(0) = x_0 = 1$
  Für großes n muß gelten: $x_n \to 0$
  Dazu muß gelten:

$$\left\|\frac{1}{1+\tau k}\right\| < 1$$

erfüllt für alle $\tau > 0$



Fazit

Integrationsverfahren für gewöhnliche DGL.

Explizite Verfahren

- einfach zu berechnen
- numerisch ***instabil*** bei großen Schrittweiten

Implizite Verfahren

- i.A. aufwändig zu lösen
- numerisch ***stabil***

Euler:	*Heun:*	*Runge-Kutta:*
• *sehr einfach,* • *ungenau*	• *einfach,* • *gut für kleine Schrittweiten*	• *aufwändiger,* • *gut auch bei rel. großen Schritten*