1: Einleitung

Lehrstuhl für Computergraphik und Multimediasysteme

Universität Siegen

2: Grundlagen

Lehrstuhl für Computergraphik und Multimediasysteme

Universität Siegen

Ziel der generativen Computergraphik: Anwendungsspezifische „Abbilder“ der Realität in Echtzeit

$\Rightarrow$ effiziente Repräsentation und Darstellung von Modellen realer Sachverhalte

Grundlagen:

1. *Mathematik*, insbesondere
   1. *Vektorrechnung* zur rechnerinternen Modellbeschreibung
   2. *Lineare Algebra* für Objekt-Transformationen
   3. *Numerik* für rechnergestützten Umsetzung von Algorithmen, z.B. in der Animation
2. *Farbmodelle*
   1. Was ist Farbe?
   2. Rechnerinterne Darstellung von Farben

Erinnerung (Lineare Algebra)

Ist V ein Vektorraum über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bestehend aus *mehrdimensionalen* *Elementen (* *Vektoren* *) $\vec{\mathbf{v}}$, dann sind definiert*

Vektor-Addition $+$ $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} \in V$ *für* $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in V$, *mit:*

- *Kommutativität:* $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}, \ \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in V$
- *Assoziativität:* $\vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}}, \ \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in V$
- *Nullelement:* $\exists_1 \vec{\mathbf{0}} \in V : \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{u}}, \ \forall \vec{\mathbf{u}} \in V$
- *Inverses Element:* $\forall \vec{\mathbf{u}} \in V \ \exists_1 (-\vec{\mathbf{u}}) \in V : \vec{\mathbf{u}} + (-\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$

Skalare Multiplikation $a\vec{\mathbf{u}} \in V$ *für* $a \in \mathbb{R}, \ \vec{\mathbf{u}} \in V$ *mit:*

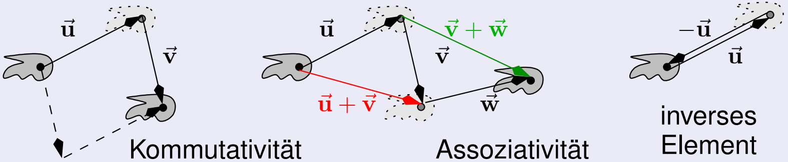
- *Distributivität:* $a(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = a\vec{\mathbf{u}} + a\vec{\mathbf{v}}, (a + b)\vec{\mathbf{u}} = a\vec{\mathbf{u}} + b\vec{\mathbf{u}}$

Beispiel für Vektorräume

Beispiel (Vektorraum der „Verschiebungen“)

Vektor (x, y) *beschreibt ein Verschiebung um* x *bzw.* y *Einheiten nach rechts bzw. oben*

Vektorraum: $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ *mit* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$



Beispiel (Vektorraum der Geraden)

Vektor (a, b) *beschreibt eine Gerade* $f(x) = a \cdot x + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

Vektorraum: $V = \{(a, b) :$ *Geraden* $a \cdot x + b : a, b \in \mathbb{R}\}$

Addition: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \mathrel{\hat{=}} f(x) = (a_1 x + b_1) + (a_2 x + b_2) = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2) \mathrel{\hat{=}} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

Frage: *Warum ist* $V = \{$*Geraden* $a \cdot x + 1\ :\ a \in \mathbb{R}\}$ *kein Vektorraum?*

- Vektoren $\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_k \in V$ sind *linear unabhängig*, falls

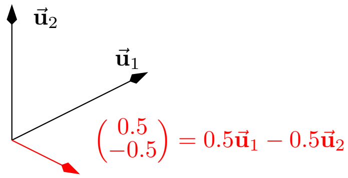
$$\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{k} b_i \vec{\mathbf{v}}_i \Leftrightarrow a_i = b_i \ \forall i$$

- eine *Basis* von $V : \{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$ ist eine *maximale Menge* lin. unabh. Vektoren; damit:

$$\forall \vec{\mathbf{u}} \in V \ \exists_1 u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R} : \vec{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

- n ist dann die *Dimension* des Vektorraums V
- Darstellung der Vektoren bzgl. der Basis $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$ in *Koordinaten-Schreibweise*:

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, \ldots, u_n)^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$



Basis in 2D: $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2\}$

Inneres Produkt:

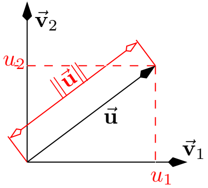
$$(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

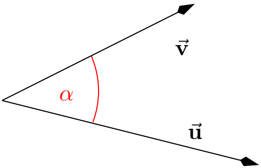
Norm:

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$$

Normierter Vektor:

$\hat{\mathbf{u}}$, falls $\|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$





Winkel: $(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \cos\alpha \, \|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\|$,
α einschließender Winkel

insb.: $(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \vee \|\vec{\mathbf{u}}\| = 0 \vee \|\vec{\mathbf{v}}\| = 0$

Bi-Linearität, d.h. linear in jeder Komponente:

$$(\vec{\mathbf{u}} \cdot (s\vec{\mathbf{v}} + t\vec{\mathbf{w}})) = s(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) + t(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}})$$

und $((s\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}}) = s(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}) + t(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}})$

da z.B. $\sum_{i=1}^{n}(s \cdot u_i + t \cdot v_i)w_i = s\sum_{i=1}^{n} u_i w_i + t\sum_{i=1}^{n} v_i w_i$

Definition: $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$

Eigenschaft (Kreuzprodukt)

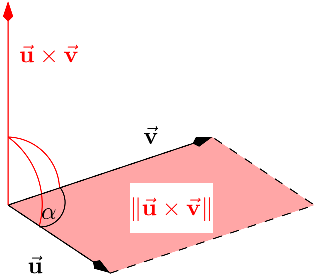
Bi-Linearität, *d.h.*
$(s\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = s\,(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}) + t\,(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$

Nicht kommutativ: $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$, *aber*
$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$

Nicht assoziativ: $\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) \neq (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}}$

Orthogonalität: $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ *steht senkrecht* (*orthogonal* *auf* $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$, *d.h.*
$(\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})) = (\vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})) = 0$

Parallelogrammfläche:
$\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\| = \sin\alpha\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|$



Weitere Bezeichnungen

Orthogonale Vektoren $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ stehen senkrecht aufeinander, also
$(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \cos(90°)\, \|\vec{\mathbf{u}}\|\, \|\vec{\mathbf{v}}\| = 0$

Orthonormale Vektoren $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$ sind zudem Einheitsvektoren, also
$(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) = 0, \|\hat{\mathbf{u}}\| = \|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$

Orthogonale/orthonormale Basen bestehen aus paarweise orthogonalen/orthonormalen Vektoren

Kanonische (natürliche) Basis: Häufig arbeitet man mit der Basis

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit Subscripts x, y bzw. x, y, z in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$

Alle geometrischen Objekte werden durch Punkte in einem *Affinen Raum* beschrieben.

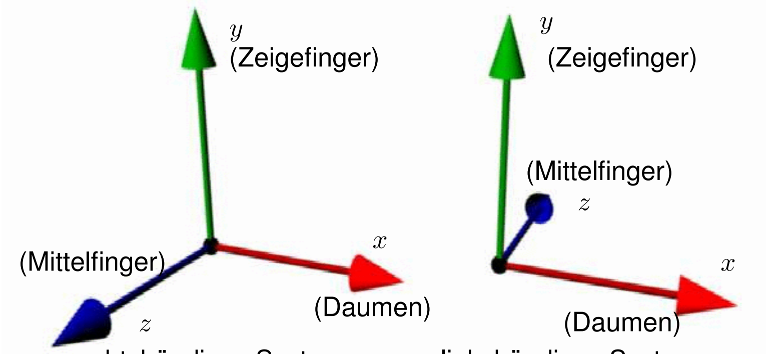
Affiner Raum A: Ein um *Punkte* erweiterter Vektorraum.
Für Vektoren $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in A$, Punkte $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in A$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ ist Vektor, d.h. für beliebige $\mathbf{P}, \mathbf{Q} : \exists_1 \vec{\mathbf{v}} \in A : \mathbf{Q} = \mathbf{P} + \vec{\mathbf{v}}$ (*Verbindungsvektor*)
- $\mathbf{P} + \vec{\mathbf{v}}, \mathbf{P} + a\vec{\mathbf{v}}$ sind Punkte

Koordinatensystem von A: Besteht aus einer Vektorbasis $\{\vec{\mathbf{u}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{u}}_n\}$ von A und einem *Ursprungspunkt* $\mathbf{O}$.
Koordinatendarstellung von $\mathbf{P} \in A$ mittels des Ortsvektors $\vec{\mathbf{p}}$ von $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{O} + \vec{\mathbf{p}} = \mathbf{O} + p_1\vec{\mathbf{u}}_1 + p_2\vec{\mathbf{u}}_2 + \ldots + p_n\vec{\mathbf{u}}_n, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

- Es wird zwischen rechts- und linkshändiges Koordinatensystemen unterschieden.



rechtshändiges System linkshändiges System

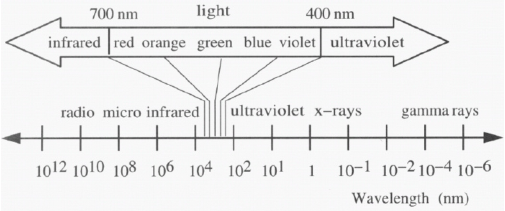
- Beobachter-orientiert: $x \hat{=}$ Horizont und $y \hat{=}$ up-Vektor
- $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ bilden ein rechtshändiges Koordinatensysteme

Begriffsklärung nach DIN 5033, Teil 1

Farbe: *„Farbe (...) ist ein durch das Auge vermittelter Sinneseindruck (...). Die Farbe ist diejenige Gesichtsempfindung eines dem Auge strukturlos erscheinenden Teiles des Gesichtsfeldes, durch die sich dieser Teil (...) von einem gleichzeitig gesehenen, ebenfalls strukturlosen angrenzenden Bereich allein unterscheiden kann.“*

- $\Rightarrow$ Farbe ist Ergebnis der Wahrnehmung elektromagnetischer Wellen (Auge & Gehirn)
- $\Rightarrow$ Lichtstrahlen haben keine Farbe, nur eine spektrale Leistungsverteilung

Licht ist elektromagnetische Strahlung; sichtbare Wellenlängen ca. $380 - 780$ nm



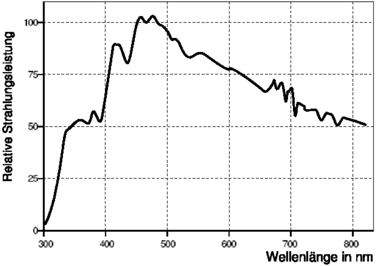
Farbreiz = Strahlung, die eine Farbwahrnehmung auslöst

Farbreizfunktion: Spektrale Leistungsverteilung der Strahlung

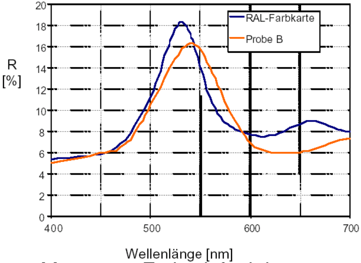
Metamerie: Verschiedene Farbreizfunktionen können dieselbe Farbempfindung erzeugen

Farbvalenz: Menge von Farbreizen, die eine (fixe) Farbempfindung erzeugen

Spektralvalenzen: Farbvalenzen zu Strahlung einer *dominanten Wellenlänge*



Farbreizfunktion (Tageslichtquelle)



Metamere Farbreizfunktionen

Ausgangslage

Betrachte mehrere Farbreizfunktionen $\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda), \ldots$

Addition der Farbreize ergibt neuen Farbreiz

$$\phi(\lambda) = \phi_1(\lambda) + \phi_2(\lambda) + \ldots$$

Beispiel: Überlagerung von Projektorbildern

Grassmannsche Gesetze (1853)

Tri-Stimulus: Raum der Farbvalenzen (*Farbraum*) ist dreidimensional $\Rightarrow$ drei Primärvalenzen und deren Linearkombination beschreiben alle Farbvalenzen

Farbaddition: Wahrgenommene Farbe einer Farbaddition unabhängig von konkreten Farbreizfunktionen ϕ_i

Farbraum kann als dreidimensionaler Vektorraum aufgefasst werden

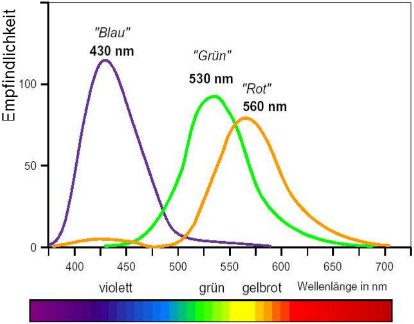
Die visuelle Wahrnehmung im Auge basiert auf

Stäbchen auf den Netzhaut nehmen Helligkeitsreize wahr

Zapfen auf den Netzhaut nehmen Farbreize wahr

Tri-Stimulus entspricht der Annahme von drei Zapfen-Typen (blau, gelb-grün, rot)

Bild rechts: Experimentell ermittelte Empfindlichkeit der drei Farbrezeptortypen



Aber: Zapfen sind anatomisch nicht unterscheidbar!

RGB Farbmodell (Rot, Grün, Blau)

Additives Farbmodell

Primärvalenzen (nach CIE):
Spektralvalenzen (± 2.5 nm): Rot ($\mathbf{R}$, 700 nm), Grün ($\mathbf{G}$, 546 nm), Blau($\mathbf{B}$, 436 nm)

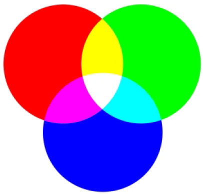
Erzeugter Farbreiz:

$$\mathbf{F} = R\mathbf{R} + G\mathbf{G} + B\mathbf{B},\ R, G, B \in \mathbb{R}$$

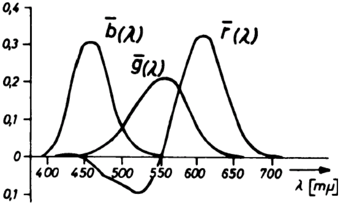
Problem: Erzeugung von beliebigen Spektralvalenzen

$$\mathbf{F}(\lambda) = \overline{r}(\lambda)\mathbf{R} + \overline{g}(\lambda)\mathbf{G} + \overline{b}(\lambda)\mathbf{B}$$

erfordert teilweise negative Gewichte $\overline{r}, \overline{g}, \overline{b}$



Additive Farbmischung



Farbwerte zur Erzeugung von Spektralvalenzen

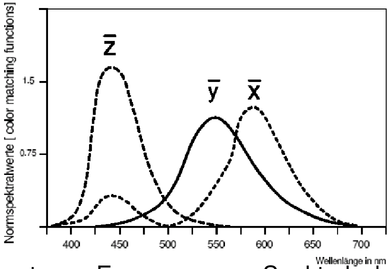
Nicht alle Spektralfarben sind mit posiviten Farbwerten erzeugbar!

Ansatz: Verwende nicht sichtbare Primärvalenzen $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$:

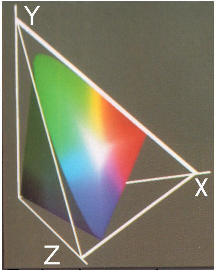
- $\mathbf{Y}$ entspricht der Helligkeit (Luminanz)
- $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ so, dass alle Spektralvalenzen $F(\lambda)$ mit pos. Gewichten erzeugbar

$$\mathbf{F}(\lambda) = \overline{x}(\lambda)\mathbf{X} + \overline{y}(\lambda)\mathbf{Y} + \overline{z}(\lambda)\mathbf{Z}$$

Sichtbare Farbvalenzen liegen im 1. Oktanten des $\mathbf{XYZ}$-Raumes



Farbwerte zur Erzeugung von Spektralvalenzen



Sichtbare Farbvalenzen im XYZ-Rau

Umrechnung und Normfarbtafel

Umrechnung RGB $\leftrightarrow$ CIE

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.365 & -0.875 & -0.468 \\ -0.503 & 1.392 & 0.086 \\ 0.005 & -0.014 & 1.009 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Normfarbtafel (CIE Chromaticity Diagram)

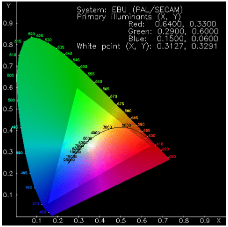
Ziel: Darstellung der „Farbart“ auf 2D-Schnitt

Normfarbwertanteile: Projiziere (X, Y, Z) auf Schnittebene $X + Y + Z = 1$:

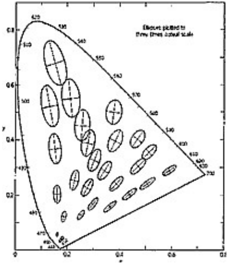
$$x = \frac{X}{X+Y+Z}, y = \frac{Y}{X+Y+Z}, z = \frac{Z}{X+Y+Z}$$

Spektralvalenzen liegen auf dem äusseren Rand der sichtbaren Farbvalenzen

Beachte: Abstände nicht wahrnehmungs-proportional



CIE Chromaticity Diagram



Wahrnehmungsabstände

CMY Farbmodell (Cyan, Magenta, Yellow)

Subtraktives Farbmodell, d.h. es wird Strahlung absorbiert

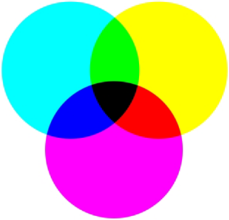
Beispiel: Farbdrucker auf weißem Papier

Primärvalenzen sind zu RGB-Primärvalenzen komplementäre Valenzen in RGB:

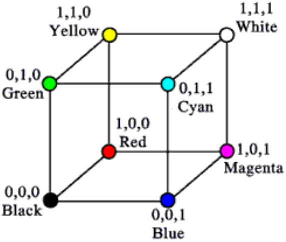
$$\begin{aligned}\text{Cyan: } \mathbf{C} &= \mathbf{G} + \mathbf{B},\\ \text{Magenta: } \mathbf{M} &= \mathbf{R} + \mathbf{B},\\ \text{Yellow: } \mathbf{Y} &= \mathbf{R} + \mathbf{G}\end{aligned}$$

Umrechnung der Farbwerte durch „Basistransformation“:

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$



Subtraktive Farbmischung



RGB-Farbwürfel

Idee: Verwende nutzerorientierte Farbbeschreibung:

- *Hue H (Farbe):* Spektralfarbe
- *Luminance L (Helligkeit)*
- *Saturation S (Sättigung):* Reinheit der Farbe, Abweichung von Grau derselben Intensität

Wertebereiche: $H \in [0°, 360°]$, $S, L \in [0, 1]$

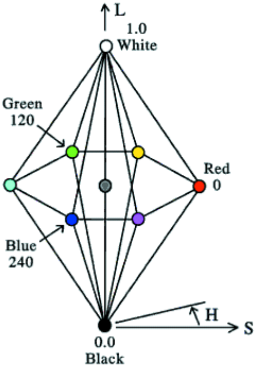
Bedeutung der Farbwerte: $H = 0$: rot

$S = 0$: Graustufe $\quad S = 1$: reine Farbe

$L = 0$: schwarz $\quad L = 1$: weiß

Die Umrechnung von/ins RGB-Modell ist nicht linear

Weitere Farbmodelle ähnlich zu HLS: HSV (Hue, Saturation, Value), HSI (Hue, Saturation, Intensity)



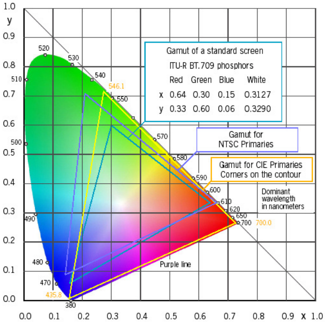
HLS Farbmodell

Erinnerung: Sichtbare Primärvalenzen & Farbmischung mit pos. Farbwerten

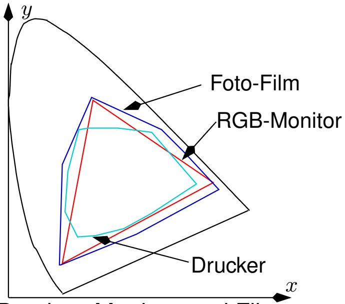
$\boxed{\Rightarrow \text{ nicht alle sichtbaren Spektralvalenzen erzeugbar}}$

Reale Farbdarstellung beruht auf drei Primärvalenzen: Monitor (RGB), Drucker (CMY), ...

Gamut: Bereich der erzeugbaren Farbvalenzen eines Gerätes



Monitor-, RGB- und NTSC-Gamut



Drucker- Monitor- und Filmgamut