# Übungen zu Computergraphik I

## – Übungsblatt 2 –

**Lehrstuhl für Computergraphik**
**und Multimediasysteme**
Hendrik Hochstetter, Bianca Kretz, Rene Winchenbach

**Abgabe:** bis spätestens 24. April 2014, 10 Uhr
**Besprechung:** Mittwoch 30. April, Donnerstag 8. Mai 2014 und Montag 5. Mai 2014

### Aufgabe 1 Ebenen (1 Punkt)

Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Ebene

$$E: \quad \mathbf{P}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

a) Es sei $X$ die zu $E$ parallele Ebene durch den Punkt $\mathbf{A} = (-4,2,2)^\mathsf{T}$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von $X$.
b) Welcher Punkt $\mathbf{B}$ der Ebene $E$ besitzt den kleinsten Abstand zum Punkt $\mathbf{A}$ und wie groß ist dieser Abstand?
c) Zeigen Sie, dass die Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C} = (-3,0,4)^\mathsf{T}$ ein gleichschenkliges Dreieck bilden.
d) Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathbf{C} = (-3,0,4)^\mathsf{T}$ in der Ebene $X$ liegt. Lsen Sie hierzu ein einfaches Lineares Gleichungssystem.
e) Formen Sie die Ebene $E$ in Hesse'sche Normalform um, d.h. in eine Gleichung der Form $\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = c$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ ein normierter Normalenvektor und $\mathbf{p}$ ein Punkt in der Ebene ist.

### Aufgabe 2 Basen (1 Punkt)

Gegeben sei die folgende Basis:

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Ein Vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ *bezüglich der Basis* $\mathcal{V}$ kann geschrieben werden als Linearkombination der Basisvektoren:

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Die Basisvektoren der Basis $\mathcal{V}$ können als Koordinatenachsen eines lokalen Koordinatensystems betrachtet werden. Entsprechend kann ein Vektor bezüglich der Basis $\mathcal{V}$ als Vektor in diesem lokalen Koordinatensystem interpretiert werden.

a) Sei $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Vektor bezüglich der Basis $\mathcal{V}$. Transformieren Sie $\vec{\mathbf{v}}$ um in einen Vektor $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der natürlichen Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

b) Finden Sie eine Matrix $\mathbf{M}$, die allgemein einen Vektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis $\mathcal{V}$ in einen Vektor $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der natürlichen Basis transformiert.

Hinweis: Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{V}$.

c) Prüfen Sie, dass die inverse Matrix $\mathbf{M}^{-1}$ Vektoren bezüglich der natürlichen Basis in Vektoren bezüglich $\mathcal{V}$ transformiert, indem Sie den in Aufgabenteil a) ermittelten Vektor zurücktransformieren.

## Aufgabe 3 Inverse Matrizen (1 Punkt)

Gegeben sei eine Rotationsmatrix $\mathbf{R}_\phi$, die eine Rotation mit Winkel $\phi$ um die z-Achse beschreibt, mit

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{R}_\phi^{-1}$ der Matrix rechnerisch nach dem Gauß-Jordan-Verfahren und überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Rotation $\mathbf{R}_{-\phi}$ mit Winkel $-\phi$ um die z-Achse übereinstimmt.

3.2 Für orthonormale Matrizen gilt, dass alle Basisvektoren senkrecht zueinander sind und die Länge $1$ besitzen. Weisen Sie nach, dass für orthonormale Matrizen $\mathbf{M}$ gilt $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$.