

Klausur: Computergraphik II Probeklausur	Prüfer:	Datum/Zeit:
Semester:	Prüfungsdauer: 120 Minuten	Max. Punktzahl: 120
Hilfsmittel: Schreibgeräte, Lineal, nichtprogrammierbarer Taschenrechner		

HINWEIS:

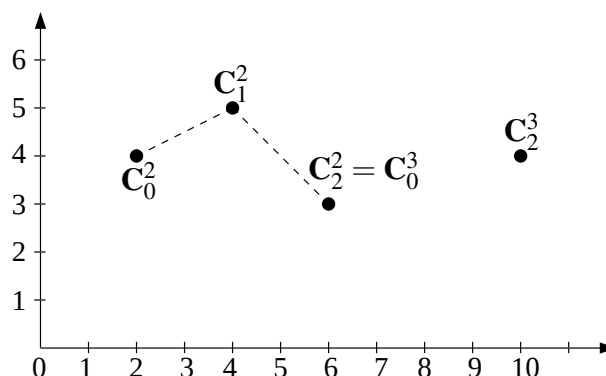
Bitte beachten Sie, dass die Themengebiete der eigentlichen Klausur von den hier gewählten Themen gegebenenfalls abweichen können. **Prinzipiell sind alle in der Vorlesung besprochenen Themen klausurrelevant.** Die Besprechung der Probeklausur wird in der Übung am 05.02.2015 stattfinden. Hierbei werden jedoch nur die Aufgaben(teile) besprochen, zu denen auch konkrete Fragen vorliegen.

Aufgabe 1 Splines (36 Punkte)

1.1. Zwei *quadratische Bézier-Spline*-Segmente seien durch die Kontrollpunkte

$$\mathbf{C}_0^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_1^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{C}_0^3, \mathbf{C}_1^3, \mathbf{C}_2^3$ definiert, von denen nur $\mathbf{C}_0^3 = \mathbf{C}_2^2$ und $\mathbf{C}_2^3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ bekannt sind.



- a) Berechnen Sie den fehlenden Kontrollpunkt $\mathbf{C}_1^3$, damit die Bézier-Spline-Kurve zwischen den beiden Segmenten C^1 -stetig ist.

- b) Prüfen Sie *rechnerisch* mit Hilfe des De-Boor-Algorithmus, dass die *uniforme, quadratische B-Spline-Kurve* $\mathbf{D}(u)$ mit den folgenden De-Boor-Punkten den Punkt $\mathbf{C}_0^2$ interpoliert.

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wählen Sie u so, dass $\mathbf{D}(u) = \mathbf{C}_0^2$ gleich dem Startpunkt der B-Spline-Kurve ist. Die im Algorithmus benötigten Gewichte $\alpha_i^j(u)$ können mit Hilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$\alpha_i^j(u) = \frac{u - t_i}{t_{i-j+3} - t_i} \quad \text{mit } i = j, \dots, 2 \quad \text{und } j = 1, 2$$

- 1.2. Gegeben seien beliebige paarweise verschiedene Punkte $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ im zwei-dimensionalen Raum, die durch eine Kurve interpoliert werden sollen (siehe Skizze).



- a) Sei der erste De-Boor-Punkt $\mathbf{D}_0$ einer uniformen, C^1 -stetigen *quadratischen* B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ gegeben. Bestimmen Sie vier weitere De-Boor-Punkte $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4$ der B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ in Abhängigkeit der gegebenen Punkte, so dass $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_3$ von der B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ interpoliert werden.
- b) Zur Definition einer interpolierenden *kubischen* Bézier-Spline-Kurve können mit Hilfe des Catmull-Rom-Ansatzes zu jedem Segment Kontrollpunkte einer kubischen Bézier-Kurve bestimmt werden. Die resultierende Bézier-Spline-Kurve ist an den interpolierten Kontrollpunkten C^1 -stetig.
Bestimmen Sie die Bézier-Kontrollpunkte $\mathbf{C}_0^1, \mathbf{C}_1^1, \mathbf{C}_2^1, \mathbf{C}_3^1$ des Kurvensegments $\mathbf{C}^1(u)$ zwischen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ in Abhängigkeit der Punkte $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_3$.
- c) Finden Sie eine Repräsentation

$$\mathbf{C}^1(u) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}_k \mathbf{X}_k(u)$$

des Kurvensegments $\mathbf{C}^1(u) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{C}_k^1 \mathbf{B}_k^3(u)$, die einzig von den Punkten $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_3$ und den Bernstein-Bézier-Polynomen $\mathbf{B}_0^3, \mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_2^3, \mathbf{B}_3^3$ abhängt. Bestimmen Sie hierzu die Polynome $\mathbf{X}_0(u), \mathbf{X}_1(u), \mathbf{X}_2(u), \mathbf{X}_3(u)$ in Abhängigkeit der Bernstein-Bézier-Polynome.

Aufgabe 2 Frenet-Frame (6 Punkte)

Gegeben ist die Kurve $\mathbf{C}(u) = (\sin(u), u^2, 0)^T$. Bestimmen Sie den Frenet-Frame in $u = 0$.

Aufgabe 3 Polygon-Meshes (28 Punkte)

- 3.1. Gegeben sei ein *geschlossenes*, 2-mannigfaltiges Polygonnetz mit *Genus* 0, für das die *Euler-Formel* gilt:

$$N_V - N_E + N_F = 2$$

wobei N_V , N_E und N_F die Anzahl der Eckpunkte, Kanten und Flächen bezeichnen.

- a) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der Eigenschaften 2-mannigfaltiger Polygonnetze, dass im Allgemeinen gilt:

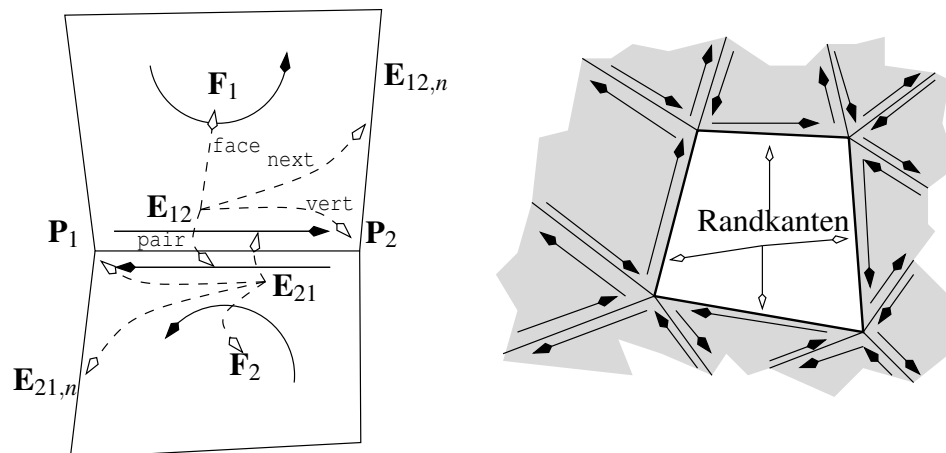
$$N_V \geq 4 \text{ und } N_F \geq 4$$

- b) Für welches Polygonnetz mit den oben genannten Eigenschaften gilt genau:

$$N_V = 4 \text{ und } N_F = 4$$

- c) Leiten Sie aus den (größtmöglichen) Unterschranken aus Teilaufgabe a) eine größtmögliche Unterschranke für N_E ab!

- 3.2. Die *Half-Edge*-Datenstruktur arbeitet hauptsächlich mit Referenzen bzgl. Kanten. Zusätzlich sei zu jedem Vertex V eine Referenz $V.\text{edge}$ auf eine ausgehende Halbkante gegeben, sowie zu jeder Fläche F eine Referenz $F.\text{edge}$ auf eine beliebige zugeordnete Halbkante gegeben.



Entwickeln Sie unter Verwendung der Referenznamen einen Pseudocode für folgende Aufgaben:

- Gegeben ist ein Polygon, gesucht sind alle Halbkanten zu dem Polygon.
- Gegeben ist ein Vertex, gesucht sind alle Halbkanten um diesen Vertex.
- Gegeben ist ein Vertex auf einem Randpolygonzug, gesucht sind alle Halbkanten des Randpolygonzuges.

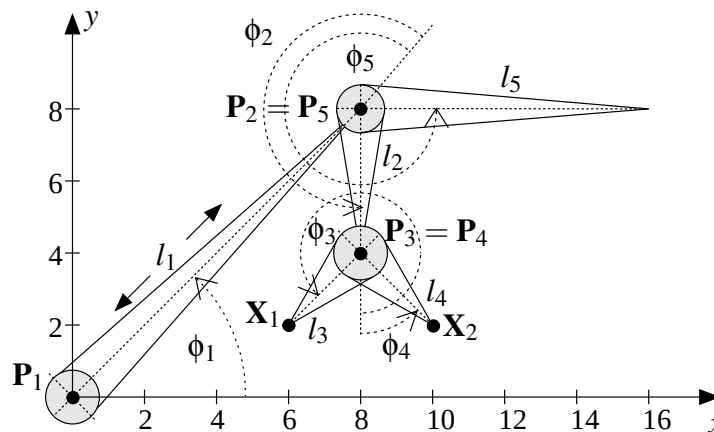
Aufgabe 4 Quaternionen (14 Punkte)

Rotieren Sie den Punkt $\mathbf{P} = (-2, 1, 0)$ zweimal mit Hilfe von **verketteten Quaternionen**. Zuerst um den Winkel Φ_1 um die Achse $\hat{\mathbf{v}}_1$ und anschließend um den Winkel Φ_2 um die Achse $\hat{\mathbf{v}}_2$.

$$\Phi_1 = \frac{\pi}{2}, \Phi_2 = \pi, \hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie hierzu zunächst alle benötigten Quaternionen ($\underline{\mathbf{q}}, \underline{\bar{\mathbf{q}}}, \underline{\mathbf{q}}_p$) für die verkettete Rotation bzw. den Punkt.
- Führen Sie nun die Rotation aus und bestimmen Sie den rotierten Punkt $\mathbf{P}'$.
- Wie lauten die resultierende Rotationsachse $\hat{\mathbf{v}}_{1,2}$ und der resultierende Winkel $\Phi_{1,2}$?

Hinweis: Beachten Sie die Formeln zur Multiplikation von Quaternionen im Anhang.

Aufgabe 5 2D-Skelettanimation (24 Punkte)

Gegeben sei das abgebildete zweidimensionale, mehrgliedrige Skelettmodell mit folgenden Werten:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 = \pi + \frac{\pi}{4}, \quad \phi_3 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$l_1 = 8\sqrt{2}, \quad l_2 = 4, \quad l_3 = 2\sqrt{2}, \quad l_4 = 2\sqrt{2}$$

- 7.1. Berechnen Sie den Endeffektor $\mathbf{X}_1$, indem Sie die Zwischenpunkte $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ *sukzessive in globalen Koordinaten* berechnen.
- 7.2. Geben Sie eine *Hierarchie von Transformationen* für das gegebene Modell an, mit denen die lokalen Koordinatensysteme der einzelnen Segmente berechnet werden können.
Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Bezeichner.
 $T(x, y)$: Translation
 $R(\phi)$: Rotation um den Mittelpunkt
- 7.3. Geben Sie den *Arbeitsbereich* des Endeffektors $\mathbf{X}_1$ an für die gegebenen Längen und Winkel. Begründen Sie kurz Ihre Behauptung.

Aufgabe 6 Spline-basierte Animation (12 Punkte)

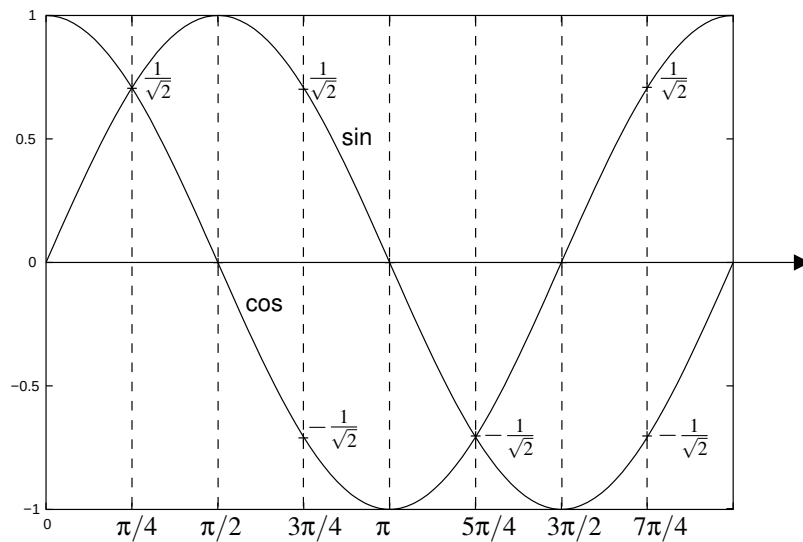
Die Kurvenpunkte einer quadratischen Bézier-Kurve für $u_0 = 0$, $u_1 = 0.2$, $u_2 = 0.4$, $u_3 = 0.6$, $u_4 = 0.8$, $u_5 = 1$ seien

$$\mathbf{C}(u_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_1) = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_2) = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_3) = \begin{pmatrix} 21 \\ 30 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_4) = \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_5) = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Parameter u_i^* ($i = 0, \dots, 5$) so, dass der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Kurvenpunkten $\mathbf{C}(u_i)$ für alle Punkte der gleiche ist. **Berechnen** Sie dafür zuerst für alle u_i ($i = 0, \dots, 5$) näherungsweise die Bogenlänge l_i zwischen den Kurvenpunkten $\mathbf{C}(u_0)$ und $\mathbf{C}(u_i)$ unter ausschließlicher Zuhilfenahme der oben genannten Kurvenpunkte. Teilen Sie dann die Gesamtkurvenlänge in fünf äquidistante Abschnitte l_i^* auf und bestimmen Sie für jede Bogenlänge l_i^* den entsprechenden Parameter u_i^* , indem Sie auf den entsprechenden Intervallen linear interpolieren.

Anhang

Sinus und Cosinus:



Ein Quaternion $q \in \mathbb{H}$ hat folgende Form:

$$q = (s, \vec{v}) = (s, (v_1, v_2, v_3)) \hat{=} s + v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

Multiplikation der Imaginärteile:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \quad \text{und} \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

Multiplikation zweier Quaternionen $q_1 = (s_1, \vec{v}_1)$ und $q_2 = (s_2, \vec{v}_2)$:

$$\underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = (s_1 s_2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2), s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$$

Beachte: Die Multiplikation von Quaternionen ist nicht kommutativ!