

Übungen zu Computergraphik I

– Übungsblatt 2 –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme

Hendrik Hochstetter, John Rickard, Rene Winchenbach

Abgabe: bis spätestens 23. April 2015, 10 Uhr

Besprechung: Mittwoch 29. April 2015 und Donnerstag 30. April 2015

Aufgabe 1 Ebenen (1 Punkt)

Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Ebene

$$E: \mathbf{P}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Es sei X die zu E parallele Ebene durch den Punkt $\mathbf{A} = (-4, 2, 2)^T$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von X .
- Welcher Punkt $\mathbf{B}$ der Ebene E besitzt den kleinsten Abstand zum Punkt $\mathbf{A}$ und wie groß ist dieser Abstand?
- Zeigen Sie, dass die Punkte $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C} = (-3, 0, 4)^T$ ein gleichschenkliges Dreieck bilden.
- Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathbf{C} = (-3, 0, 4)^T$ in der Ebene X liegt. Lösen Sie hierzu ein einfaches Lineares Gleichungssystem.
- Formen Sie die Ebene E in Hesse'sche Normalform um, d.h. in eine Gleichung der Form $\vec{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} = c$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ ein normierter Normalenvektor und $\mathbf{p}$ ein Punkt in der Ebene ist.

Aufgabe 2 Basen (1 Punkt)

Gegeben sei die folgende Basis:

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{V}$ kann geschrieben werden als Linearkombination der Basisvektoren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{v}_i$$

Die Basisvektoren der Basis $\mathcal{V}$ können als Koordinatenachsen eines lokalen Koordinatensystems betrachtet werden. Entsprechend kann ein Vektor bezüglich der Basis $\mathcal{V}$ als Vektor in diesem lokalen Koordinatensystem interpretiert werden.

- a) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Vektor bezüglich der Basis $\mathcal{V}$. Transformieren Sie $\vec{v}$ um in einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der natürlichen Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

- b) Finden Sie eine Matrix $\mathbf{M}$, die allgemein einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis $\mathcal{V}$ in einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der natürlichen Basis transformiert.

Hinweis: Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{V}$.

- c) Prüfen Sie, dass die inverse Matrix $\mathbf{M}^{-1}$ Vektoren bezüglich der natürlichen Basis in Vektoren bezüglich $\mathcal{V}$ transformiert, indem Sie den in Aufgabenteil a) ermittelten Vektor zurücktransformieren.

Aufgabe 3 Inverse Matrizen (1 Punkt)

Gegeben sei eine Rotationsmatrix $\mathbf{R}_\phi$, die eine Rotation mit Winkel ϕ um die z-Achse beschreibt, mit

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3.1 Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{R}_\phi^{-1}$ der Matrix rechnerisch nach dem Gauß-Jordan-Verfahren und überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Rotation $\mathbf{R}_{-\phi}$ mit Winkel $-\phi$ um die z-Achse übereinstimmt.
- 3.2 Für orthonormale Matrizen gilt, dass alle Basisvektoren senkrecht zueinander sind und die Länge 1 besitzen. Weisen Sie nach, dass für orthonormale Matrizen $\mathbf{M}$ gilt $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$.