

Übungen zu Computergraphik I – Übungsblatt 3 –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme

Hendrik Hochstetter, John Rickard, Rene Winchenbach

Abgabe: Für Studenten mit 5 LP verpflichtend bis spätestens 30. April 2015, 10 Uhr

Besprechung: Mittwoch 6. Mai und Donnerstag 7. Mai 2015

Aufgabe 1 Skalarprodukt (1 Punkt)

Gegeben sei das gleichschenklige Dreieck aus Abbildung 1, das durch die beiden Vektoren $\hat{u}$ und $\hat{v}$ aufgespannt wird. Die Vektoren $\hat{u}$ und $\hat{v}$ haben beide die Länge 1 und schließen den Winkel α ein. Da $\hat{u}$ die Länge 1 hat, ist die Länge der orthogonalen Projektion von $\hat{v}$ auf $\hat{u}$ genau $\cos \alpha$. Die Länge des durch die Projektion aufgespannten Vektors, der in Abbildung 1 gestrichelt dargestellt ist, entspricht genau $\sin \alpha$.

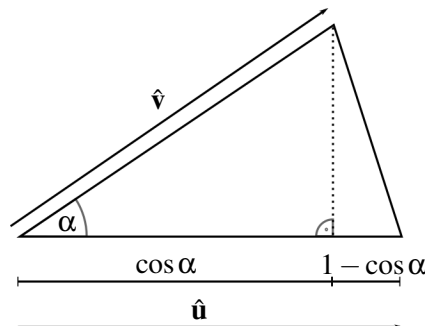


Abbildung 1: Ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkel α .

Für das linke Teildreieck liefert der Satz von Pythagoras die Gleichung

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \|\hat{v}\|^2.$$

1.1 Leiten Sie eine entsprechende Formel für das rechte Teildreieck her.

1.2 Vergewissern Sie sich durch Umformen Ihrer Gleichung, dass für das obige Dreieck

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = \|\hat{u}\| \|\hat{v}\| \cos \alpha$$

gilt.

Aufgabe 2 Kreuzprodukt und Spatprodukt (1 Punkt)

- 2.1 Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist.
 2.2 Finden Sie drei Vektoren im 3D mit assoziativem Kreuzprodukt.
 2.3 Welches Volumen hat das Parallelepiped aufgespannt durch die Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Lineare Abbildungen (1 Punkt)

- 3.1 Welche der folgenden Funktionen von $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ sind lineare Abbildungen? Geben Sie für die linearen Abbildungen jeweils die zugehörige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an. Ist die Matrix invertierbar? Jeweils mit Begründung.
- a) $f_a(\vec{v}) = (v_2, v_1)^T$
 - b) $f_b(\vec{v}) = (v_1, v_1)^T$
 - c) $f_c(\vec{v}) = (0, 1)^T$
- 3.2 Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ einer linearen Abbildung $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$, welche den Vektor $\vec{x}_1 = (1, 2)^T$ auf $\vec{w}_1 = (7, 0)^T$ und $\vec{x}_2 = (-2, 2)^T$ auf $\vec{w}_2 = (4, -6)^T$ abbildet.