# Übung zu Computergraphik I

## – Übungsblatt 6 –

**Lehrstuhl für Computergraphik und Multimediasysteme**

Hendrik Hochstetter, John Rickard, Rene Winchenbach

| | |
|---|---|
| **Abgabe:** | Bis spätestens 21. Mai 2015, 10 Uhr. |
| **Besprechung:** | Mittwoch 27. Mai 2015 und Donnerstag 28. Mai 2015 |

### Aufgabe 1 Affine Transformationen und Inversen (1 Punkt)

1.1 Affine Transformationen sind im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h. die Reihenfolge der Ausführung zweier Transformation ist für das Ergebnis relevant. Prüfen Sie dies für die folgenden Paare von Transformationen:
Rotation - Skalierung, Translation - Skalierung, Rotation - Translation.
Hinweis: Es reicht aus, eine Rotationsmatrix (bspw. um die x-Achse) zu prüfen.

1.2 Begründen Sie anhand eines einfachen Beispiels, warum eine Folge von Transformationen in unterschiedlicher Reihenfolge zu interpretieren ist, je nachdem ob man die Transformationen bzgl. des globalen oder lokalen Koordinatensystems durchführt.

1.3 Sei $\mathbf{M}$ gegeben durch eine Skalierung, eine Translation und eine Rotation:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}_{s_x,s_y,s_z} \cdot \mathbf{T}_{(t_x,t_y,t_z)} \cdot \mathbf{R}_{\phi,(r_x,r_y,r_z)}$$

Die Transformation von globalen Koordinaten in lokale Koordinaten kann mit Hilfe der Inversen $\mathbf{M}^{-1}$ durchgeführt werden. Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Inversen von $\mathbf{M}$ an.

### Aufgabe 2 Transformation von Normalen (1 Punkt)

Zur Berechnung der Beleuchtung einer transformierten Geometrie werden die transformierten Normalenvektoren benötigt. Im Allgemeinen können Punkte und Normalen jedoch nicht in gleicher Weise transformiert werden.
Es sei $\hat{\mathbf{n}}$ die Normale der Ebene $E$, welche durch die Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ definiert wird. Die Transformation der Punkte sei gegeben durch die Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4\times4}$.

$$\mathbf{P}_i' = \mathbf{M}\mathbf{P}_i \quad \text{für alle } \; i \in \{1,2,3\}$$

Um den transformierten Normalenvektor $\vec{\mathbf{n}}'$ zu berechnen, wird die Inverse der Transponierten von $\mathbf{M}$ gebildet. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung tatsächlich das gewünschte Ergebnis liefert:

$$\vec{\mathbf{n}}' = (\mathbf{M}^{\mathsf{T}})^{-1}\hat{\mathbf{n}}$$

Hinweis: Sie können zur Lösung dieser Aufgabe die folgende Eigenschaft verwenden: Es gilt für eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und zwei Vektoren $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$:

$\left(\vec{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{M}\vec{\mathbf{b}})\right) = (\mathbf{M}^\mathsf{T}\vec{\mathbf{a}})^\mathsf{T}\vec{\mathbf{b}} = \left((\mathbf{M}^\mathsf{T}\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{b}}\right)$, da

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} m_{11} \dots m_{1n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ m_{n1} \dots m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right)\right) = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11}b_1 + \ldots + m_{1n}b_n \\ \vdots \\ m_{n1}b_1 + \ldots + m_{nn}b_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{matrix} a_1 m_{11} b_1 + \ldots + a_1 m_{1n} b_n + \\ \vdots \\ a_n m_{n1} b_1 + \ldots + a_n m_{nn} b_n \end{matrix} = \begin{matrix} a_1 m_{11} b_1 + \ldots + a_n m_{n1} b_1 + \\ \vdots \\ a_1 m_{1n} b_n + \ldots + a_n m_{nn} b_n \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}a_1 + \ldots + m_{n1}a_n \\ \vdots \\ m_{1n}a_1 + \ldots + m_{nn}a_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} m_{11} \dots m_{1n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots \\ m_{n1} \dots m_{nn} \end{pmatrix}^\mathsf{T} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right)^\mathsf{T} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$