

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ
Punktzahl:	/15	/15	/15	/5	/10 Bonus	/50

Klausur: Computergraphik I (CG-1) Klausur	Prüfer: Kolb	Datum/Zeit: XX.XX.XXXX XX:XX Uhr
Semester: Probeklausur	Prüfungsdauer: 60 Minuten	Max. Punktzahl: 50 (+10 Bonus)
Hilfsmittel: • Schreibgeräte (kein Bleistift, keine Farbstifte (rot und grün)) • Lineal, Geo-Dreieck • Nicht-programmierbarer Taschenrechner		
Bitte beachten: • Tragen Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matr.-Nr. in die entsprechenden Felder ein. • Benutzen Sie nur das ausgeteilte Papier – kein eigenes Papier. Notizen sind auf den Rückseiten der Klausurblätter zulässig und werden nicht als Lösungsbestandteil gewertet. Die Mitnahme von Klausurbügen aus dem Raum ist nicht gestattet. • Die Klammerung der Klausurbügen darf nicht gelöst werden. • Schreiben Sie deutlich! Doppelte, unleserliche oder mehrdeutige Lösungen sind ungültig. • Erscheint Ihnen eine Aufgabenstellung mehrdeutig, melden Sie sich bitte durch Handzeichen bei einer Aufsichtsperson. • Ein Täuschungsversuch (Abschreiben, Nutzung unerlaubter Hilfsmittel, Kommunikation mit anderen Klausurteilnehmern, etc.) führt umgehend zum Ausschluss und Nichtbestehen. Es erfolgt keine Vorwarnung.		

Bitte ausfüllen:

Name:	Matrikel-Nr.:
--------------	----------------------

Aufgabe 1 Transformationen und Szenengraphen (15 Punkte)

Abbildung 1 zeigt links ein geometrisches Objekt, das vollständig aus den geometrischen Primitiven A und B rechts in der Abbildung konstruiert werden soll. Alle Rechtecke des Objekts und der Kreis bewegen sich stets in der xy -Ebene. Der Kreis A ist in seinen lokalen Koordinaten um den Koordinatenursprung zentriert und hat den Radius 1. Der Arm links und die negative y -Achse schließen einen Winkel von 45° ein. Arme und Beine haben jeweils die Größe des Primitivs B .

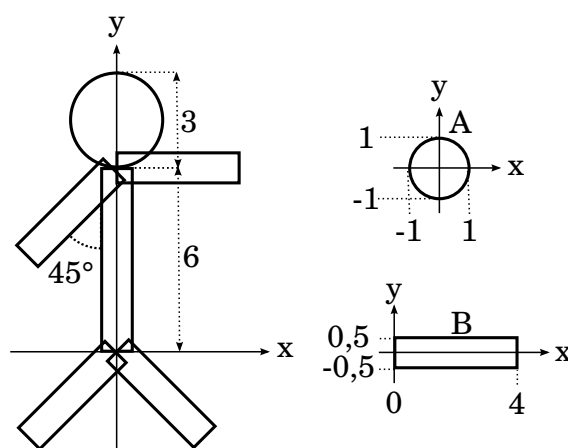


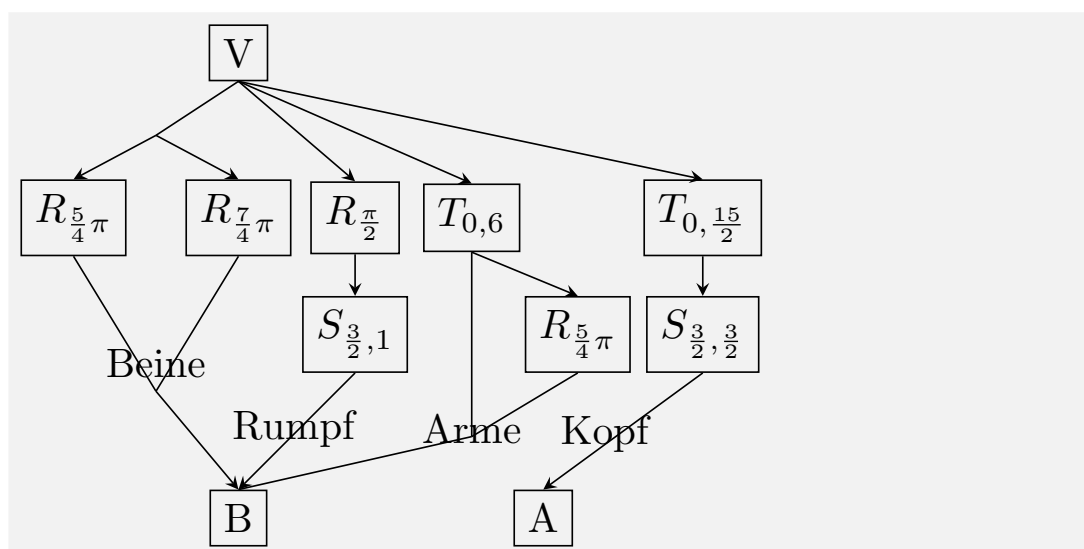
Abbildung 1: Links das zu konstruierende Objekt in Weltkoordinaten und rechts die beiden geometrischen Primitive A und B in deren lokalen Koordinatensystemen.

- 1.1. Geben Sie einen **Szenengraphen** an, der die Szene beschreibt. Für jedes gezeichnete Primitiv sollen dabei maximal zwei aufeinanderfolgende Transformationen durchgeführt werden. Verwenden Sie nur die folgenden Transformationen:

T_{t_x, t_y} = Translation in x,y Richtung um den Betrag (t_x, t_y)

R_ϕ = Rotation mit Winkel ϕ um die z-Achse

S_{s_x, s_y} = Skalierung in x,y Richtung um den Betrag (s_x, s_y)



- 1.2. Für Rotationen, Translationen und Skalierungen lassen sich direkt deren **inverse Transformationen** angeben. Die Matrizen R_ϕ und T_{t_x, t_y} beschreiben eine Rotation mit Winkel ϕ um die

z -Achse bzw. eine Translation um den Vektor $(t_x, t_y)^\top$. Gegeben sei die Matrix $M = T_{t_x, t_y} \cdot R_\phi$. Stellen Sie R_ϕ und T_{t_x, t_y} zunächst als 3×3 -Matrizen auf und berechnen Sie die Matrix M . Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Inverse der Matrix M folgendes gilt:

$$M^{-1} = (T_{t_x, t_y} \cdot R_\phi)^{-1} = R_\phi^{-1} \cdot T_{t_x, t_y}^{-1}$$

Hinweis: Zur Lösung können Sie die Eigenschaft $MM^{-1} = \mathbb{1}$ verwenden.

$$T_{t_x, t_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & t_x \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(T_{t_x, t_y})^{-1} = T_{-t_x, -t_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) & 0 \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = R_{-\phi} \cdot T_{-t_x, -t_y} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & -t_x \cdot \cos(\phi) - t_y \cdot \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & t_x \cdot \sin(\phi) - t_y \cdot \cos(\phi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit $a = e = \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 1$,
 $b = d = \cos(\phi) \sin(\phi) - \sin(\phi) \cos(\phi) = 0$,
 $c = \cos(\phi)(-t_x \cdot \cos(\phi) - t_y \cdot \sin(\phi)) - \sin(\phi)(t_x \cdot \sin(\phi) - t_y \cdot \cos(\phi)) + t_x$
 $= -t_x(\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2) + t_x$
 $= 0$
 $f = \sin(\phi)(-t_x \cdot \cos(\phi) - t_y \cdot \sin(\phi)) - \cos(\phi)(t_x \cdot \sin(\phi) - t_y \cdot \cos(\phi)) + t_y$
 $= -t_y(\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2) + t_y$
 $= 0$
 $\implies M \cdot M^{-1} = \mathbb{1}$

Aufgabe 2 Polygon-Rasterisierung (15 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie mit Hilfe des **Scanline-Algorithmus** ein Polygon rasterisieren.

- 2.1. Wie und wonach müssen Einträge in der Edge-Table und in der Active-Edge-Table für den Scanline-Algorithmus sortiert werden?

Die Kanten in der Edge-Table werden aufsteigend lexikographisch nach $(y_{\min}, x, dx)$ sortiert, die Kanten der Active-Edge-Table aufsteigend lexikographisch nach (x, k) .

- 2.2. Es sei ein Polygon durch die Punkte **A**, **B**, **C** und **D** mit

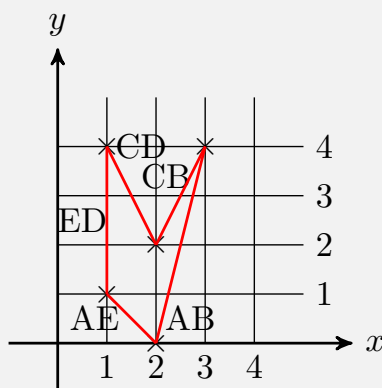
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und durch die Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ gegeben. Bestimmen Sie die zugehörige initiale Edge-Table und tragen Sie sie in der folgenden Tabelle ein:

ID	x	k	$y_{\min}$	$y_{\max}$	dx	rx	Δy
AD	3	0	0	1	-2	0	1
AB	3	0	0	2	0	1	2
DC	1	0	1	4	0	2	3
BC	4	0	2	4	-1	1	2

- 2.3. Skizzieren Sie zunächst das Polygon, das durch die folgende Edge-Table definiert ist:

ID	x	k	$y_{\min}$	$y_{\max}$	dx	rx	Δy
$\overline{AE}$	2	0	0	1	-1	0	1
$\overline{AB}$	2	0	0	4	0	1	4
$\overline{ED}$	1	0	1	4	0	0	3
$\overline{CD}$	2	0	2	4	-1	1	2
$\overline{CB}$	2	0	2	4	0	1	2



Führen Sie anschließend den Scanline-Algorithmus durch und fügen Sie für jede Scanline Ihre berechneten Werte in die folgende Active-Edge-Table ein. Geben Sie außerdem unten die berechneten Spans an.

Scanline	ID	x	k	LR: pixel (x)
$y = 0$	AE	2	0	L:2
	AB	2	0	R:2
$y = 1$	ED	1	0	L:1
	AE	1	0	(L)
	AB	2	1	R:2
$y = 2$	ED	1	0	L:1
	CD	2	0	R:2
	CB	2	0	L:2
	AB	2	2	R:2
$\vdots$				
$\vdots$				
$y = 3$	ED	1	0	L:1
	CD	1	1	R:1
	CB	2	1	L:3
	AB	2	3	R:2
$y = 4$	ED	1	0	L:1
	CD	1	0	R:1
	CB	3	0	L:3
	AB	3	0	R:3

Spans:

$y = 0 : x = \{2\}$, $y = 1 : x = \{1, 2\}$, $y = 2 : x = \{1, 2\}$, $y = 3 : x = \{1\}$, $y = 3 : x = \{1, 3\}$

2.4. Welches Problem kann beim Rasterisieren von Polygonen mit spitzen Winkeln auftreten?

Es kann dazu führen, dass Polygone nicht zusammenhängend gezeichnet werden. Es entstehen Löcher im eigentlich geschlossenen Polygon, wie im Beispiel oben bei $y = 3$.

Aufgabe 3 Point-In-Polygon Test (15 Punkte)

Im Folgenden soll ein Point-in-Polygon-Test durchgeführt werden, um zu prüfen, ob ein Strahl ein Polygon $\mathcal{P}$ mit den folgenden 4 Eckpunkten trifft.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1. Bestimmen Sie den **Schnittpunkt $\mathbf{K}$** der Polygonebene mit dem Strahl

$$\mathbf{G}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \geq 0.$$

Stellen sie hierfür zunächst die Ebenengleichung der von $\mathcal{P}$ definierten Ebene auf.

Normale der Ebene bestimmen:

$$\vec{\mathbf{n}} = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \times (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkte mit Ebene durch implizite Gleichung $F(\mathbf{P}) = (\mathbf{P} - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ bestimmen.

$$F(\mathbf{G}(\alpha)) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2\alpha - 2 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \iff \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\implies \mathbf{K} = \mathbf{G}\left(\frac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1.2. Im nachfolgenden soll der Schnittpunkt $\mathbf{S} = (2, 0, 0)^\top$ eines anderen Strahls mit der Polygonebene betrachtet werden. Projizieren sie das Polygon $\mathcal{P}$ sowie den Schnittpunkt $\mathbf{S}$ zwei-dimensional entlang der treibenden Achse der Normale der Polygonebene. Geben sie die **projizierten Punkte $\mathbf{P}'_i$** und $\mathbf{S}'$ an.

Normalenvektor ist $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und damit ist die treibende Achse y . Entsprechend wird entlang y auf die xz -Ebene projiziert.

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}'_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}'_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}'_4 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 1.3. Verschieben sie anschließend die projizierten Punkte $\mathbf{P}'_i$, so dass der Schnittpunkt $\mathbf{S}$ im Ursprung liegt. Führen sie für die Kanten $\overline{\mathbf{P}''_i \mathbf{P}''_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, 4$, $\mathbf{P}''_5 = \mathbf{P}''_1$) des verschobenen Polygons die **Trivial-Reject-Prüfung** entlang der x' -Achse durch.

Alle Punkte werden um $-\mathbf{S}'$ translatiert, sodass $\mathbf{S}''$ im Ursprung liegt:

$$\mathbf{S}'' = \mathbf{S}' - \mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}''_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}''_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}''_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}''_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kante $\overline{\mathbf{P}''_3 \mathbf{P}''_4}$ kann mit TR verworfen werden, da beide y' -Werte größer 0. Für alle weiteren Kanten ist weder TR noch TA möglich.

- 1.4. Bestimmen sie für die verbleibende(n) Kante(n) die Schnittpunkte mit der x' -Achse und überprüfen sie, ob $\mathbf{S}$ **inner- oder außerhalb des Polygons** liegt.

Da $\mathbf{P}''_2$ auf der x' -Achse liegt, muss überprüft werden, ob zwischen $\overline{\mathbf{P}''_1 \mathbf{P}''_2}$ und $\overline{\mathbf{P}''_2 \mathbf{P}''_3}$ ein y' -Vorzeichenwechsel stattfindet. Dies ist der Fall, da $\mathbf{P}''_{1,y} < 0$ und $\mathbf{P}''_{3,y} > 0$. Daher wird die x' -Achse geschnitten $\implies$ Anzahl Schnittpunkte ist 1.

Kante $\overline{\mathbf{P}''_4 \mathbf{P}''_1}$:

$$\alpha = \frac{-\mathbf{P}''_{4,y}}{\mathbf{P}''_{1,y} - \mathbf{P}''_{4,y}} = \frac{1}{2}.$$

Einsetzen von α liefert Schnittpunkt mit x' -Achse $(1 - \alpha)\mathbf{P}''_4 + \alpha\mathbf{P}''_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$. Schnittpunkt findet auf positiver x' -Achse statt. Damit ist Anzahl der Schnittpunkte insgesamt 2. Der Punkt $\mathbf{S}$ liegt nicht im Polygon.

- 1.5. Wie muss vorgegangen werden, wenn eine Kante vollständig auf der x' -Achse verläuft?

Es muss der erste und letzte Punkt des entsprechenden Kantenzugs bestimmt werden und bei deren y' -Komponenten auf Vorzeichenwechsel getestet werden.

Aufgabe 4 Multiple Choice (5 Punkte)

In der folgenden Aufgabe sind zehn **Multiple Choice Fragen** zu beantworten. Setzen Sie ihr Kreuz entweder bei *korrekt* oder *falsch* oder lassen Sie die Zeile frei, wenn Sie sich unsicher sind.

Pro korrekter Antwort werden 0,5 Punkte vergeben, pro falscher Antwort -0,5 Punkte. In Summe sind für die gesamte Aufgabe nur nicht-negative Punktzahlen erreichbar.

Aussage	korrekt	falsch
Matrixmultiplikationen sind im Allgemeinen nicht kommutativ.	☐	☐
Der diffuse Beleuchtungsterm des Phong-Modells hängt nicht von der Lichtquellen- oder Beobachterposition ab.	☐	☐
Der Reflexionsvektor wird für die Berechnung des spekulären Phong-Beleuchtungsterms benötigt.	☐	☐
Szenengraphen dürfen keine Zyklen enthalten.	☐	☐
Die Beleuchtungsberechnung erfolgt in Normalized Device Coordinates (NDC).	☐	☐
Double-Buffering wird eingesetzt, um Flimmern bei der Bildwiedergabe zu verhindern.	☐	☐
Mit dem Sutherland-Hodgeman-Algorithmus können beliebige Strecken rasterisiert werden.	☐	☐
Das Ergebnis der Scanline-Interpolation allgemeiner Polygone hängt von deren Lage ab.	☐	☐
Mit Gouraud-Shading können visuell glatte Farbübergänge auf Flächen und an Kanten erzeugt werden.	☐	☐
Bei aktivem Standard-z-Test kann ein Objekt auch hinter einem bereits gezeichneten transparenten Objekt gezeichnet werden.	☐	☐

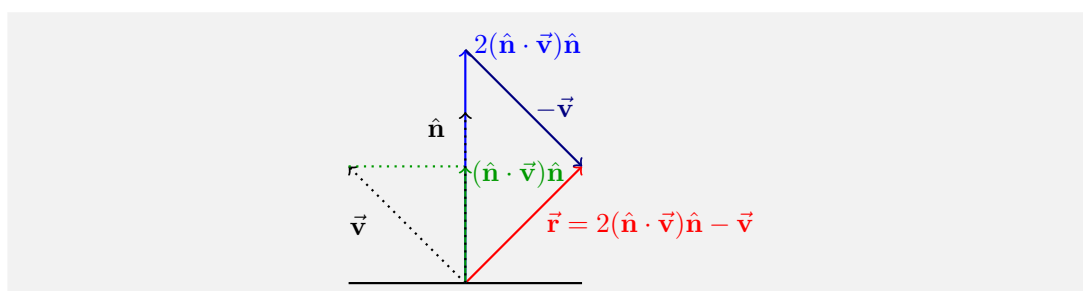
1. korrekt, 2. falsch, 3. korrekt, 4. korrekt, 5. falsch,
6. korrekt, 7. falsch, 8. korrekt, 9. korrekt, 10. falsch

Aufgabe 5 Verallgemeinerte Reflexion (10 Bonuspunkte)

Im Folgenden sollen Sie die **Matrix** $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bestimmen, die einen beliebigen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ an einer Normalen $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ reflektiert.

Bearbeiten Sie hierzu nacheinander die folgenden Fragen/Schritte:

5.1. überlegen Sie sich zunächst, wie die Reflexion von $\vec{v}$ an $\hat{n}$ mit Hilfe einfacher Vektoroperationen realisiert wird. Fertigen Sie dazu eine aussagekräftige Skizze an.



- 5.2. Zeigen Sie rechnerisch, dass allgemein $(\vec{v} \cdot \hat{n})\hat{n} = (\hat{n}\hat{n}^\top)\vec{v}$ gilt. Stellen Sie dazu zunächst die Matrix $\hat{n}\hat{n}^\top \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ auf.

Seien $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)^\top$ und $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top$. Hieraus folgt: $\hat{n}\hat{n}^\top = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix}$.

Somit:

$$(\hat{n}\hat{n}^\top)\vec{v} = \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} n_x^2 v_x + n_x n_y v_y + n_x n_z v_z \\ n_x n_y v_x + n_y^2 v_y + n_y n_z v_z \\ n_x n_z v_x + n_y n_z v_y + n_z^2 v_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) n_x \\ (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) n_y \\ (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) n_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$= (n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= (\hat{n} \cdot \vec{v}) \hat{n} \quad (5)$$

- 5.3. Leiten Sie nun eine allgemeine Formel für die Matrix R her.

Wie man der Skizze entnehmen kann gilt:

$$\vec{r} = 2((\hat{n} \cdot \vec{v})\hat{n}) - \vec{v} \quad (6)$$

$$= 2((\hat{n}\hat{n}^\top)\vec{v}) - \vec{v} \quad (7)$$

$$= (2(\hat{n}\hat{n}^\top) - I)\vec{v} \quad (8)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2n_x^2 - 1 & 2n_x n_y & 2n_x n_z \\ 2n_x n_y & 2n_y^2 - 1 & 2n_y n_z \\ 2n_x n_z & 2n_y n_z & 2n_z^2 - 1 \end{pmatrix}}_R \vec{v} \quad (9)$$

- 5.4. Prüfen Sie exemplarisch Ihre Matrix R , indem Sie den Vektor $\vec{v} = (1, 0, 3)^\top$ an der Normalen $\hat{n} = (0, 1, 0)^\top$ zweimal spiegeln. Was stellen Sie bezüglich der Inversen Matrix R^{-1} fest?

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

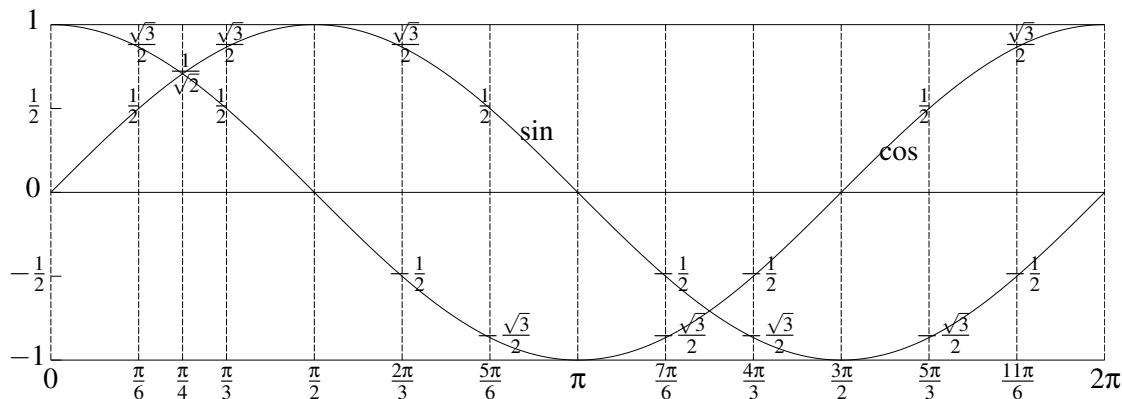
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} \quad (11)$$

$$= \vec{v} \quad (12)$$

Es gilt $R^{-1} = R$.

Anhang

Sinus und Cosinus



Skalarprodukt und Kreuzprodukt

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \cos \alpha \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|, \quad \alpha \text{ einschließender Winkel}$$

Norm und normierte Vektoren

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{u})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

$\hat{u}$ ist normierter Vektor, falls $\|\hat{u}\| = 1$

Viewing Transformation

Rechtshändiges, orthonormales Beobachter-Koordinatensystem $\{\mathbf{V}, \hat{\mathbf{v}}_x, \hat{\mathbf{v}}_y, \hat{\mathbf{v}}_z\}$ in WC liefert

$$T_V = \begin{bmatrix} A^\top & -A^\top \mathbf{V} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad \text{mit} \quad A = (\hat{\mathbf{v}}_x, \hat{\mathbf{v}}_y, \hat{\mathbf{v}}_z)$$

Perspektivische Transformation

n und f sind die nahe bzw. ferne Clipsebene, b und h sind Breite bzw. Höhe auf der nahen Clipsebene.

$$T_P = \begin{bmatrix} \frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n(n-f)} & \frac{2f}{n-f} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

Liang-Barsky-Algorithmus

Kante sei $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$. $\alpha_i = \frac{\text{wec}_i(\mathbf{P}_1)}{\text{wec}_i(\mathbf{P}_1) - \text{wec}_i(\mathbf{P}_2)}$, $i \in \{L, R, B, T\}$

Bresenham-Algorithmus

$$d_{\text{init}} = 2\Delta y - \Delta x, \quad \text{inc}_1 = 2\Delta y, \quad \text{inc}_2 = 2(\Delta y - \Delta x)$$

Scanline-Algorithmus

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = dx + \frac{rx}{\Delta y}, \quad dx \in \mathbb{Z}, \quad rx \in [0, \Delta y - 1] \subset \mathbb{N}_0$$