

Übungen zu Computergraphik I

– Übungsblatt 2 –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme

Andreas Görlitz, Hendrik Hochstetter, John Rickard, Rene Winchenbach

Abgabe: bis spätestens 03. November 2015, 10 Uhr

Besprechung: Dienstag 10. November 2015 und Mittwoch 11. November 2015

Aufgabe 1 Ebenen (1 Punkt) Gegeben sei im \mathbb{R}^3 die Ebene

$$E: \mathbf{P}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Es sei X die zu E parallele Ebene durch den Punkt $\mathbf{A} = (-4, 2, 2)^T$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von X .
- Welcher Punkt \mathbf{B} der Ebene E besitzt den kleinsten Abstand zum Punkt \mathbf{A} und wie groß ist dieser Abstand?
- Zeigen Sie, dass die Punkte \mathbf{A} , \mathbf{B} und $\mathbf{C} = (-3, 0, 4)^T$ ein gleichschenkliges Dreieck bilden.
- Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathbf{C} = (-3, 0, 4)^T$ in der Ebene X liegt. Lösen Sie hierzu ein einfaches Lineares Gleichungssystem.
- Formen Sie die Ebene E in Hesse'sche Normalform um, d.h. in eine Gleichung der Form $\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = c$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ ein normierter Normalenvektor und \mathbf{p} ein Punkt in der Ebene ist.

Aufgabe 2 Basen (1 Punkt)

Gegeben sei die folgende Basis:

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Ein Vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis \mathcal{V} kann geschrieben werden als Linearkombination der Basisvektoren:

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Die Basisvektoren der Basis \mathcal{V} können als Koordinatenachsen eines lokalen Koordinatensystems betrachtet werden. Entsprechend kann ein Vektor bezüglich der Basis \mathcal{V} als Vektor in diesem lokalen Koordinatensystem interpretiert werden.

- a) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Vektor bezüglich der Basis \mathcal{V} . Transformieren Sie \vec{v} um in einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der natürlichen Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

- b) Finden Sie eine Matrix \mathbf{M} , die allgemein einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis \mathcal{V} in einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der natürlichen Basis transformiert.

Hinweis: Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in \mathcal{V} .

- c) Prüfen Sie, dass die inverse Matrix \mathbf{M}^{-1} Vektoren bezüglich der natürlichen Basis in Vektoren bezüglich \mathcal{V} transformiert, indem Sie den in Aufgabenteil a) ermittelten Vektor zurücktransformieren.

Aufgabe 3 Inverse Matrizen (1 Punkt)

Gegeben sei eine Rotationsmatrix \mathbf{R}_ϕ , die eine Rotation mit Winkel ϕ um die z-Achse beschreibt, mit

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3.1 Bestimmen Sie die Inverse \mathbf{R}_ϕ^{-1} der Matrix rechnerisch nach dem Gauß-Jordan-Verfahren und überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Rotation $\mathbf{R}_{-\phi}$ mit Winkel $-\phi$ um die z-Achse übereinstimmt.
- 3.2 Für orthonormale Matrizen gilt, dass alle Basisvektoren senkrecht zueinander sind und die Länge 1 besitzen. Weisen Sie nach, dass für orthonormale Matrizen \mathbf{M} gilt $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$.