Übungen zu Computergraphik I

– Übungsblatt 3 –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme
Andreas Görlitz, Hendrik Hochstetter, John Rickard, Rene Winchenbach

Abgabe:	Für Studenten mit 5 LP verpflichtend bis spätestens 10. November 2015, 10 Uhr
Besprechung:	Dienstag 17. November 2015 und Mittwoch 18. November 2015

Aufgabe 1 Skalarprodukt (1 Punkt)

Gegeben sei das gleichschenklige Dreieck aus Abbildung 1, das durch die beiden Vektoren $\hat{\mathbf{u}}$ und $\hat{\mathbf{v}}$ aufgespannt wird. Die Vektoren $\hat{\mathbf{u}}$ und $\hat{\mathbf{v}}$ haben beide die Länge 1 und schließen den Winkel α ein. Da $\hat{\mathbf{u}}$ die Länge 1 hat, ist die Länge der orthogonalen Projektion von $\hat{\mathbf{v}}$ auf $\hat{\mathbf{u}}$ genau $\cos\alpha$. Die Länge des durch die Projektion aufgespannten Vektors, der in Abbildung 1 gestrichelt dargestellt ist, entspricht genau $\sin\alpha$.

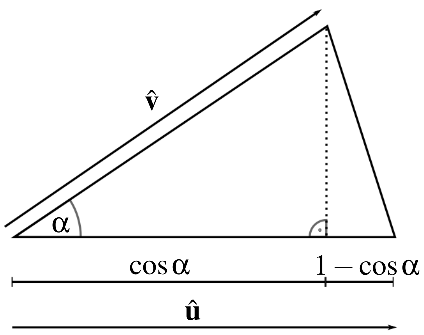

Abbildung 1: *Ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkel α.*

Für das linke Teildreieck liefert der Satz von Pythagoras die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 .$$

1.1 Leiten Sie eine entsprechende Formel für das rechte Teildreieck her.

1.2 Vergewissern Sie sich durch Umformen Ihrer Gleichung, dass für das obige Dreieck

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \|\hat{\mathbf{u}}\| \, \|\hat{\mathbf{v}}\| \cos\alpha$$

gilt.

Aufgabe 2 Kreuzprodukt und Spatprodukt (1 Punkt)

2.1 Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ senkrecht zu $\vec{\mathbf{v}}$ und $\vec{\mathbf{w}}$ ist.

2.2 Finden Sie drei Vektoren im 3D mit assoziativem Kreuzprodukt.

2.3 Welches Volumen hat das Parallelepiped aufgespannt durch die Vektoren:

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Lineare Abbildungen (1 Punkt)

3.1 Welche der folgenden Funktionen von $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)^T$ sind lineare Abbildungen? Geben Sie für die linearen Abbildungen jeweils die zugehörige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an. Ist die Matrix invertierbar? Jeweils mit Begründung.

a) $f_a(\vec{\mathbf{v}}) = (v_2, v_1)^T$

b) $f_b(\vec{\mathbf{v}}) = (v_1, v_1)^T$

c) $f_c(\vec{\mathbf{v}}) = (0, 1)^T$

3.2 Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ einer linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{x}}$, welche den Vektor $\vec{\mathbf{x}}_1 = (1, 2)^T$ auf $\vec{\mathbf{w}}_1 = (7, 0)^T$ und $\vec{\mathbf{x}}_2 = (-2, 2)^T$ auf $\vec{\mathbf{w}}_2 = (4, -6)^T$ abbildet.