Klausur: **Computergraphik II Probeklausur**	Prüfer:	Datum/Zeit:
Semester:	Prüfungsdauer: **120 Minuten**	Max. Punktzahl: **120**
Hilfsmittel: **Schreibgeräte, Lineal, nichtprogrammierbarer Taschenrechner**		

HINWEIS:

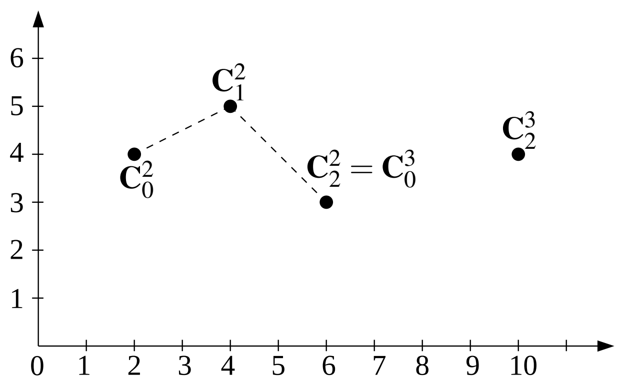
Bitte beachten Sie, dass die Themengebiete der eigentlichen Klausur von den hier gewählten Themen gegebenenfalls abweichen können. **Prinzipiell sind alle in der Vorlesung besprochenen Themen klausurrelevant.** Die Besprechung der Probeklausur wird in der Übung am 21.07.2016 stattfinden. Hierbei werden jedoch nur die Aufgaben(teile) besprochen, zu denen auch konkrete Fragen vorliegen. Arbeiten Sie die Problelklausur gründlich durch und schicken Sie aufkommende Fragen **mind. zwei Tage vor der Übung** an david.bulczak@uni-siegen.de oder an christoph.schikora@uni-siegen.de.

Aufgabe 1 Splines (36 Punkte)

1.1. Zwei *quadratische Bézier-Spline*-Segmente seien durch die Kontrollpunkte

$$\mathbf{C}_0^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_1^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{C}_0^3$, $\mathbf{C}_1^3$, $\mathbf{C}_2^3$ definiert, von denen nur $\mathbf{C}_0^3 = \mathbf{C}_2^2$ und $\mathbf{C}_2^3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ bekannt sind.



a) Berechnen Sie den fehlenden Kontrollpunkt $\mathbf{C}_1^3$, damit die Bézier-Spline-Kurve zwischen den beiden Segmenten C^1-*stetig* ist.

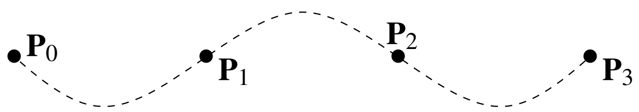
b) Prüfen Sie *rechnerisch* mit Hilfe des De-Boor-Algorithmus, dass die *uniforme, quadratische B-Spline*-Kurve $\mathbf{D}(u)$ mit den folgenden De-Boor-Punkten den Punkt $\mathbf{C}_0^2$ interpoliert.

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wählen Sie u so, dass $\mathbf{D}(u) = \mathbf{C}_0^2$ gleich dem Startpunkt der B-Spline-Kurve ist. Die im Algorithmus benötigten Gewichte $\alpha_i^j(u)$ können mit Hilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$\alpha_i^j(u) = \frac{u - t_i}{t_{i-j+3} - t_i} \quad \text{mit} \quad i = j, \ldots, 2 \quad \text{und} \quad j = 1, 2$$

1.2. Gegeben seien beliebige paarweise verschiedene Punkte $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ im zwei-dimensionalen Raum, die durch eine Kurve interpoliert werden sollen (siehe Skizze).



a) Sei der erste De-Boor-Punkt $\mathbf{D}_0$ einer uniformen, C^1-stetigen *quadratischen* B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ gegeben. Bestimmen Sie vier weitere De-Boor-Punkte $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4$ der B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ in Abhängigkeit der gegebenen Punkte, so dass $\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_3$ von der B-Spline-Kurve $\mathbf{D}$ interpoliert werden.

b) Zur Definition einer interpolierenden *kubischen* Bézier-Spline-Kurve können mit Hilfe des Catmull-Rom-Ansatzes zu jedem Segment Kontrollpunkte einer kubischen Bézier-Kurve bestimmt werden. Die resultierende Bézier-Spline-Kurve ist an den interpolierten Kontrollpunkten C^1-stetig.
Bestimmen Sie die Bézier-Kontrollpunkte $\mathbf{C}_0^1, \mathbf{C}_1^1, \mathbf{C}_2^1, \mathbf{C}_3^1$ des Kurvensegments $\mathbf{C}^1(u)$ zwischen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ in Abhängigkeit der Punkte $\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_3$.

c) Finden Sie eine Repräsentation

$$\mathbf{C}^1(u) = \sum_{k=0}^{3} \mathbf{P}_k \mathbf{X}_k(u)$$

des Kurvensegments $\mathbf{C}^1(u) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{C}_k^1 \mathbf{B}_k^3(u)$, die einzig von den Punkten $\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_3$ und den Bernstein-Bézier-Polynomen $\mathbf{B}_0^3, \mathbf{B}_1^3, \mathbf{B}_2^3, \mathbf{B}_3^3$ abhängt. Bestimmen Sie hierzu die Polynome $\mathbf{X}_0(u), \mathbf{X}_1(u), \mathbf{X}_2(u), \mathbf{X}_3(u)$ in Abhängigkeit der Bernstein-Bézier-Polynome.

Aufgabe 2 Frenet-Frame (6 Punkte)

Gegeben ist die Kurve $\mathbf{C}(u) = \left(\sin(u), u^2, 0\right)^T$. Bestimmen Sie den Frenet-Frame in $u = 0$.

Aufgabe 3 Polygon-Meshes (28 Punkte)

3.1. Gegeben sei ein *geschlossenes*, 2-mannigfaltiges Polygonnetz mit *Genus* 0, für das die *Euler-Formel* gilt:

$$N_V - N_E + N_F = 2$$

wobei N_V, N_E und N_F die Anzahl der Eckpunkte, Kanten und Flächen bezeichnen.

a) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der Eigenschaften 2-mannigfaltiger Polygonnetze, dass im Allgemeinen gilt:

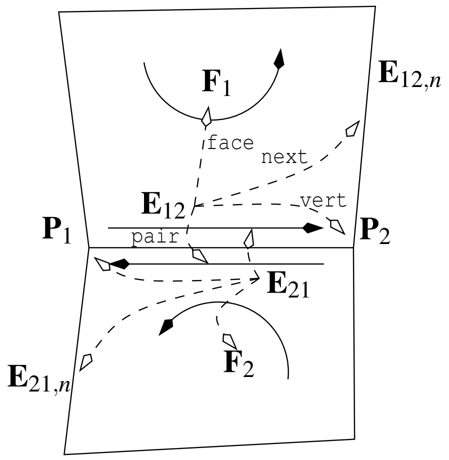
$$N_V \geq 4 \text{ und } N_F \geq 4$$

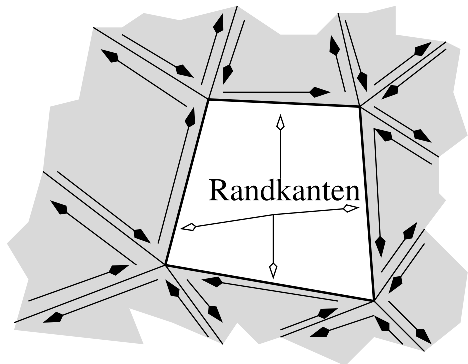
b) Für welches Polygonnetz mit den oben genannten Eigenschaften gilt genau:

$$N_V = 4 \text{ und } N_F = 4$$

c) Leiten Sie aus den (größtmöglichen) Unterschranken aus Teilaufgabe a) eine größtmögliche Unterschranke für N_E ab!

3.2. Die *Half-Edge*-Datenstruktur arbeitet hauptsächlich mit Referenzen bzgl. Kanten. Zusätzlich sei zu jedem Vertex `V` eine Referenz `V.edge` auf eine ausgehende Halbkante gegeben, sowie zu jeder Fläche `F` eine Referenz `F.edge` aud eine beliebige zugeordnete Halbkante gegeben.





Entwickeln Sie unter Verwendung der Referenznamen einen Pseudocode für folgende Aufgaben:

a) Gegeben ist ein Polygon, gesucht sind alle Halbkanten zu dem Polygon.

b) Gegeben ist ein Vertex, gesucht sind alle Halbkanten um diesen Vertex.

c) Gegeben ist ein Vertex auf einem Randpolygonzug, gesucht sind alle Halbkanten des Randpolygonzuges.

Aufgabe 4 Quaternionen (14 Punkte)

Rotieren Sie den Punkt $\mathbf{P} = (-2,1,0)$ zweimal mit Hilfe von **verketteten Quaternionen**. Zuerst um den Winkel Φ_1 um die Achse $\hat{\mathbf{v}}_1$ und anschließend um den Winkel Φ_2 um die Achse $\hat{\mathbf{v}}_2$.

$$\Phi_1 = \frac{\pi}{2}, \Phi_2 = \pi, \hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

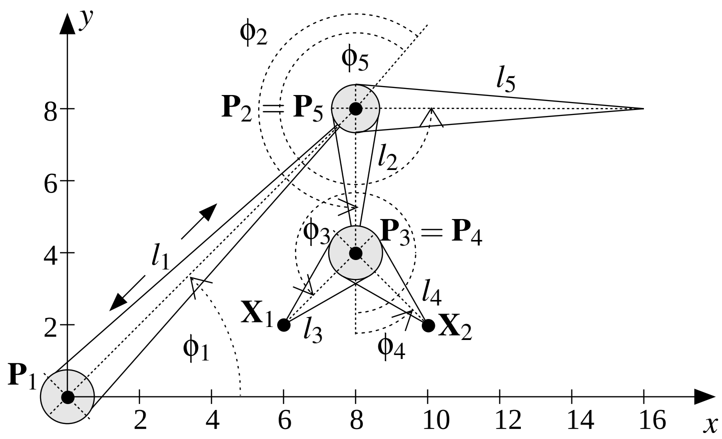
a) Bestimmen Sie hierzu zunächst alle benötigten Quaternionen ($\underline{\mathbf{q}}$, $\overline{\underline{\mathbf{q}}}$, $\underline{\mathbf{q}}_P$) für die verkettete Rotation bzw. den Punkt.

b) Führen Sie nun die Rotation aus und bestimmen Sie den rotierten Punkt $\mathbf{P}'$.

c) Wie lauten die resultierende Rotationsachse $\hat{\mathbf{v}}_{1,2}$ und der resultierende Winkel $\Phi_{1,2}$?

Hinweis: Beachten Sie die Formeln zur Multiplikation von Quaternionen im Anhang.

Aufgabe 5 2D-Skelettanimation (24 Punkte)



Gegeben sei das abgebildete zweidimensionale, mehrgliedrige Skelettmodell mit folgenden Werten:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \phi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 = \pi + \frac{\pi}{4}, \quad \phi_3 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$l_1 = 8\sqrt{2}, \quad l_2 = 4, \quad l_3 = 2\sqrt{2}, \quad l_4 = 2\sqrt{2}$$

7.1. Berechnen Sie den Endeffektor $\mathbf{X}_1$, indem Sie die Zwischenpunkte $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ *sukzessive in globalen Koordinaten* berechnen.

7.2. Geben Sie eine *Hierarchie von Transformationen* für das gegebene Modell an, mit denen die lokalen Koordinatensysteme der einzelnen Segmente berechnet werden können.
Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Bezeichner.
$T(x,y)$: Translation
$R(\phi)$: Rotation um den Mittelpunkt

7.3. Geben Sie den *Arbeitsbereich* des Endeffektors $\mathbf{X}_1$ an für die gegebenen Längen und Winkel. Begründen Sie kurz Ihre Behauptung.

Aufgabe 6 Spline-basierte Animation (12 Punkte)

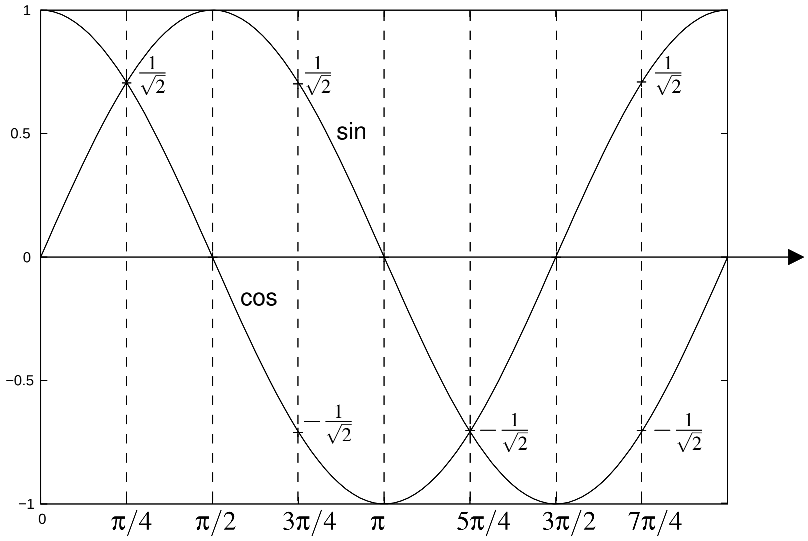
Die Kurvenpunkte einer quadratischen Bézier-Kurve für $u_0 = 0,\ u_1 = 0.2,\ u_2 = 0.4,\ u_3 = 0.6,\ u_4 = 0.8,\ u_5 = 1$ seien

$$\mathbf{C}(u_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_1) = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_2) = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_3) = \begin{pmatrix} 21 \\ 30 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_4) = \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \end{pmatrix}, \mathbf{C}(u_5) = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Parameter u_i^* ($i = 0, \ldots, 5$) so, dass der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Kurvenpunkten $\mathbf{C}(u_i)$ für alle Punkte der gleiche ist. **Berechnen** Sie dafür zuerst für alle u_i ($i = 0, \ldots, 5$) näherungsweise die Bogenlänge l_i zwischen den Kurvenpunkten $\mathbf{C}(u_0)$ und $\mathbf{C}(u_i)$ unter ausschließlicher Zuhilfenahme der oben genannten Kurvenpunkte. Teilen Sie dann die Gesamtkurvenlänge in fünf äquidistante Abschnitte l_i^* auf und bestimmen Sie für jede Bogenlänge l_i^* den entsprechenden Parameter u_i^*, indem Sie auf den entsprechenden Intervallen linear interpolieren.

Anhang

Sinus und Cosinus:



Ein Quaternion $q \in \mathbb{H}$ hat folgende Form:

$$q = (s, \vec{\mathbf{v}}) = (s, (v_1, v_2, v_3)) \mathrel{\widehat{=}} s + v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

Multiplikation der Imaginärteile:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k,\ jk = i,\ ki = j \text{ und } ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

Multiplikation zweier Quaternionen $q_1 = (s_1, \vec{\mathbf{v}}_1)$ und $q_2 = (s_2, \vec{\mathbf{v}}_2)$:

$$\underline{\mathbf{q}}_1 \underline{\mathbf{q}}_2 = (s_1 s_2 - (\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2),\ s_1 \vec{\mathbf{v}}_2 + s_2 \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2)$$

Beachte: Die Multiplikation von Quaternionen ist nicht kommutativ!