

Übungen zu Computergraphik I

– Übungsblatt 2 –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme
Andreas Görlitz, Jan Mußmann

Abgabe: bis spätestens 23. Oktober 2018, 10 Uhr
Besprechung: **Dienstag 30. Oktober und Mittwoch 31. Oktober 2018**
Gesamtpunktzahl nach Übungsblatt 2: 11 von 65

Aufgabe 1 Flächeninhalt und Volumen (2 Punkte)

Gegeben seien die Punkte $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} aufgespannten Parallelogramms.
- Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren \mathbf{u}, \mathbf{v} und \mathbf{w} aufgespannten Parallelepipeds.

Aufgabe 2 Ebenen (3 Punkte)

Gegeben sei im \mathbb{R}^3 die Ebene

$$E: \mathbf{P}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Es sei X die zu E parallele Ebene durch den Punkt $\mathbf{A} = (-3, 8, 7)^T$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von X .
- Welcher Punkt \mathbf{B} der Ebene E besitzt den kleinsten Abstand zum Punkt $\mathbf{A} = (-3, 8, 7)^T$ und wie groß ist dieser Abstand?
- Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathbf{C} = (9, 12, 17)^T$ in der Ebene X liegt.
- Formen Sie die Ebene E in Hesse'sche Normalform um, d.h. in eine Gleichung der Form $\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = c$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ ein normierter Normalenvektor und \mathbf{p} ein Punkt in der Ebene ist.

Aufgabe 3 Basen (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Basis:

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis \mathcal{V} kann geschrieben werden als Linearkombination der Basisvektoren:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{v}_i$$

Die Basisvektoren der Basis \mathcal{V} können als Koordinatenachsen eines lokalen Koordinatensystems betrachtet werden. Entsprechend kann ein Vektor bezüglich der Basis \mathcal{V} als Vektor in diesem lokalen Koordinatensystem interpretiert werden.

- a) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Vektor bezüglich der Basis \mathcal{V} . Transformieren Sie \vec{v} um in einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der natürlichen Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

- b) Finden Sie eine Matrix \mathbf{M} , die allgemein einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis \mathcal{V} in einen Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der natürlichen Basis transformiert.

Hinweis: Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in \mathcal{V} .

- c) Finden Sie eine Matrix \mathbf{N} , die Vektoren bezüglich der natürlichen Basis in Vektoren bezüglich \mathcal{V} transformiert.