

# Übungen zu Computergraphik I

## – Übungsblatt 3 –

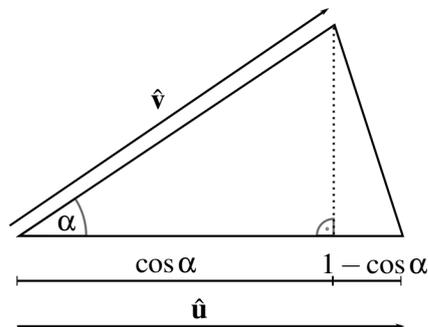
Lehrstuhl für Computergraphik  
und Multimediasysteme

Andreas Görlitz, Jan Mußmann

**Abgabe:** bis spätestens Dienstag 30. Oktober 2018, 10 Uhr  
**Besprechung:** Dienstag 06. November und Mittwoch 07. November 2018  
**Gesamtpunktzahl nach Übungsblatt 3:** 15 von 65

### Aufgabe 1 Skalarprodukt (1 Punkt)

Gegeben sei das gleichschenklige Dreieck aus Abbildung 1, das durch die beiden Vektoren  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  aufgespannt wird. Die Vektoren  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$  haben beide die Länge 1 und schließen den Winkel  $\alpha$  ein. Da  $\hat{u}$  die Länge 1 hat, ist die Länge der orthogonalen Projektion von  $\hat{v}$  auf  $\hat{u}$  genau  $\cos \alpha$ . Die Länge des durch die Projektion aufgespannten Vektors, der in Abbildung 1 gestrichelt dargestellt ist, entspricht genau  $\sin \alpha$ .



**Abbildung 1:** Ein gleichschenkliges Dreieck mit Winkel  $\alpha$ .

Für das linke Teildreieck liefert der Satz von Pythagoras die Gleichung

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \|\hat{v}\|^2.$$

1.1 Leiten Sie eine entsprechende Formel für das rechte Teildreieck her.

1.2 Vergewissern Sie sich durch Umformen Ihrer Gleichung, dass für das obige Dreieck

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = \|\hat{u}\| \|\hat{v}\| \cos \alpha$$

gilt.

**Aufgabe 2 Kreuzprodukt und Spatprodukt (1 Punkt)**

2.1 Zeigen Sie, dass der Vektor  $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$  senkrecht zu  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  ist.

2.2 Finden Sie drei Vektoren im 3D mit assoziativem Kreuzprodukt.

**Hinweis:** Das Verwenden des Nullvektors  $(0,0,0)^T$  ist **nicht** gestattet!

**Aufgabe 3 Lineare Abbildungen (2 Punkte)**

3.1 Welche der folgenden Funktionen von  $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$  sind lineare Abbildungen? Geben Sie für die linearen Abbildungen jeweils die zugehörige Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  an. Ist die Matrix invertierbar? Jeweils mit Begründung.

a)  $f_a(\vec{v}) = (v_2, v_1)^T$

b)  $f_c(\vec{v}) = (0, 1)^T$

c)  $f_b(\vec{v}) = (v_1, v_1)^T$

3.2 Berechnen Sie die Matrix  $\mathbf{A}$  einer linearen Abbildung  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(\vec{x}) = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$ , welche den Vektor  $\vec{x}_1 = (7, 2)^T$  auf  $\vec{w}_1 = (15, -11)^T$  und  $\vec{x}_2 = (2, -2)^T$  auf  $\vec{w}_2 = (-6, -16)^T$  abbildet.