Übungen zu Computergraphik I

– Übungsblatt 2 –

Lehrstuhl für Computergraphik
und Multimediasysteme
Rene Winchenbach, Jan Mußmann

Abgabe:	bis spätestens 29. Oktober 2019, 10 Uhr
Besprechung:	Dienstag 5. November und Mittwoch 6. November 2019
Gesamtpunktzahl nach Übungsblatt 2:	12 von 65

Aufgabe 1 Flächeninhalt und Volumen (2 Punkte)

Gegeben seien die Punkte $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannten Parallelogramms.
b) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Parallelepipeds.

Aufgabe 2 Ebenen (3 Punkte)

Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Ebene

$$E: \quad \mathbf{P}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Es sei X die zu E parallele Ebene durch den Punkt $\mathbf{A} = (-3, 8, 7)^\mathsf{T}$. Bestimmen Sie eine Ebenengleichung von X.
b) Welcher Punkt $\mathbf{B}$ der Ebene E besitzt den kleinsten Abstand zum Punkt $\mathbf{A} = (-3, 8, 7)^\mathsf{T}$ und wie groß ist dieser Abstand?
c) Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathbf{C} = (9, 12, 17)^\mathsf{T}$ in der Ebene X liegt.
d) Formen Sie die Ebene E in Hesse'sche Normalform um, d.h. in eine Gleichung der Form $\vec{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = c$, wobei $\hat{\mathbf{n}}$ ein normierter Normalenvektor und $\mathbf{p}$ ein Punkt in der Ebene ist.

Aufgabe 3 Basen (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Basis:

$$\mathcal{V} = \left\{ \vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Ein Vektor $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ *bezüglich der Basis* $\mathcal{V}$ kann geschrieben werden als Linearkombination der Basisvektoren:

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{\mathbf{v}}_i$$

Die Basisvektoren der Basis $\mathcal{V}$ können als Koordinatenachsen eines lokalen Koordinatensystems betrachtet werden. Entsprechend kann ein Vektor bezüglich der Basis $\mathcal{V}$ als Vektor in diesem lokalen Koordinatensystem interpretiert werden.

a) Sei $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Vektor bezüglich der Basis $\mathcal{V}$. Transformieren Sie $\vec{\mathbf{v}}$ um in einen Vektor $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der natürlichen Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

b) Finden Sie eine Matrix $\mathbf{M}$, die allgemein einen Vektor $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis $\mathcal{V}$ in einen Vektor $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ bzgl. der natürlichen Basis transformiert.

Hinweis: Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{V}$.

c) Finden Sie eine Matrix $\mathbf{N}$, die Vektoren bezüglich der natürlichen Basis in Vektoren bezüglich $\mathcal{V}$ transformiert.

Aufgabe 4 Kreuzprodukt und Spatprodukt (1 Punkt)

4.1 Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ senkrecht zu $\vec{\mathbf{v}}$ und $\vec{\mathbf{w}}$ ist.

4.2 Finden Sie drei Vektoren im 3D mit assoziativem Kreuzprodukt.
Hinweis: Das Verwenden des Nullvektors $(0,0,0)^\top$ ist **nicht** gestattet!