Aufgabe 1 Transformationen und Szenengraphen (14 Punkte)

1.1. **Beschreiben** Sie kurz in eigenen Worten die Voraussetzungen des Bresenham-Algorithmus in der Standardsituation.

1.2. Gegeben sei eine Strecke $\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$ in Raster-Koordinaten:

$$\mathbf{P}_1 = (2,0)^T \quad \mathbf{P}_2 = (0,4)^T$$

Erläutern Sie welche Anpassungen durchzuführen sind damit die Voraussetzungen des Bresenham-Algorithmus erfüllt sind?
Bestimmen Sie anschließend die Punkte $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$, die durch die gewählte Anpassung aus $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ entstehen.

1.3. Seien zwei Punkte gegeben

$$\mathbf{Q}_1 = (0,0)^T, \mathbf{Q}_2 = (4,1)^T$$

Zeigen Sie dass für die Strecke $\overline{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2}$ die Voraussetzungen für den Bresenham-Algorithmus erfüllt sind.
Berechnen Sie anschließend die Rasterpunkte die der Bresenham-Algorithmus für die Strecke $\overline{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2}$ liefert, verwenden Sie hierfür die folgende Tabelle:

x	y	d

Hinweis: $d_{init} = 2\Delta y - \Delta x,\ inc_1 = 2\Delta y,\ inc_2 = 2(\Delta y - \Delta x)$.

Aufgabe 2 Raycasting (15 Punkte)

Beim Raycasting wird für jeden Bildpunkt ein Strahl mit den Objekten der Szene geschnitten. Im Folgenden soll ein Point-in-Polygon-Test durchgeführt werden, um zu prüfen, ob der Strahl

$$\mathbf{G}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \alpha \geq 0$$

ein Polygon $\mathcal{P}$ mit den folgenden 5 Eckpunkten trifft.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

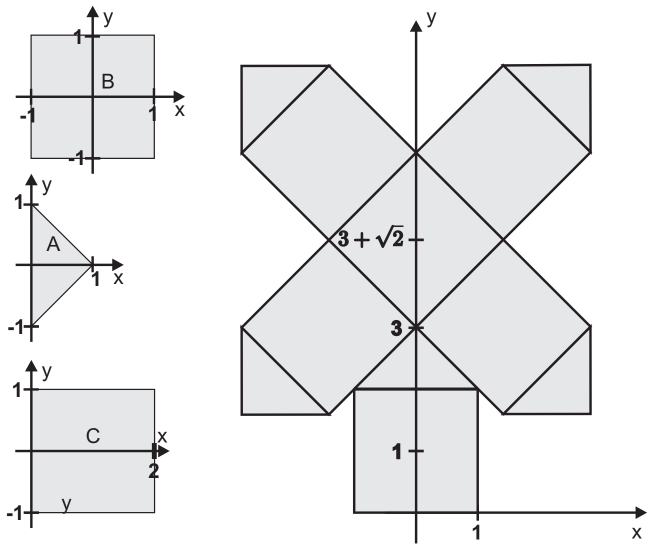
2.1. **Berechnen** Sie den Schnittpunkt $\mathbf{S}$ der Polygonebene mit dem Strahl $\mathbf{G}(\alpha)$.
2.2. **Beschreiben** Sie nach welchen Kriterien die Projektion von 3D nach 2D stattfindet.
2.3. Nachfolgend sei der Schnittpunkt $\mathbf{S} = (-1, 0.5, 0.5)^T$ eines Strahl mit der Ebene des Polygons $\mathcal{P}$ gegeben.
Projizieren sie das Polygon $\mathcal{P}$ sowie den Schnittpunkt $\mathbf{S}$ von 3D nach 2D. **Bestimmen** Sie hierfür zunächst die Projezierten Punkte $\mathbf{P}_i'$ und $\mathbf{S}'$ und anschließend die projizierten und verschobenen Punkte $\mathbf{P}_i''$ und $\mathbf{S}''$.
2.4. **Erläutern** Sie das Vorgehen wenn eine Kante $\overline{\mathbf{P}_i''\mathbf{P}_{i+1}''}$ vollständig auf der positiven x-Achse verläuft.
2.5. Gegeben Sei ein weiteres Polygon Pmit den projeziert und verschobenen Punkten

$$\mathbf{S}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2'' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_3'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_4'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie für jede Kante jeweils eine Trivial Reject und Trivial Accept Prüfung durch.
Bestimmen Sie für die verbleibenden Kanten den Schnittpunkt mit der x-Achse.
Bestimmen Sie rechnerisch an hand der vorherigen Ergebnisse ob $\mathbf{S}$ in der Polygonebene liegt. **Begründen** Sie Ihre Antwort.

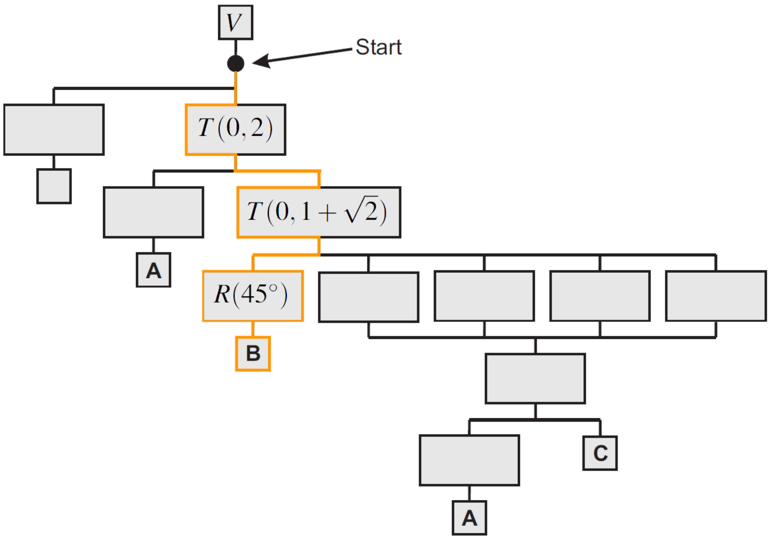
Aufgabe 3 Transformationen, Hierarchien (12 Punkte)

3.1. Es seien die Objekte A,B und C gegeben, mit deren Hilfe das Windrad als **Tangram**-Objekt konstruiert werden soll (siehe Abbildung).



Ergänzen Sie die folgende Transformationshierarchie, so dass genau das vorgegebene Tangram gebildet wird. Die Knoten des Hierarchie-Graphen haben die folgende Bedeutung:

V	Viewing-Transformation (hier: $V = Id$)
$T_{(x,y)}$	Translation um den Vektor (x, y)
R_ϕ	Rotation um den Winkel ϕ gegen den Uhrzeigersinn
$S_{a,b}$	Skalierung um a, b in x- bzw. y-Richtung
A, B, C	Zeichnen des Objektes A, B bzw. C



Hinweise: Objekte dürfen mehrfach verwendet werden. Achten Sie darauf, dass in der Hierarchie die Transformationen bzgl. des lokalen Koordinatensystem (Objektkoordinaten) zu interpretieren sind!

3.2. **Berechnen** sie die Transformationsmatrix M für den farblich markierten Pfad um die lokalen Koordinaten des Objekts B in das globale Koordinaten System zu transformieren. **Bestimmen** Sie zusätzlich die globalen Koordinaten des Ursprungs des lokalen Koordinatensystems von B nach der Abbildung mit M.

3.3. F¨ur Transformationsmatritzen in 3D werden in der Regel 4x4 Matritzen verwendet. **Begründen** Sie warum es nicht ausreicht 3x3 Matrizen in 3D zu verwenden?.

3.4. Gegeben sei eine Transformationsmatrix $M = T_{(-1,1)}R_{\phi}S_{1,2}$, mit dem ein Objekt transformiert wird. **Welche** der folgenden Matrizen muss auf die Normalen des Objekts angewendet werden, so dass diese nach der Transformation weiterhin senkrecht zum Objekt sind?

- $A = R_{\phi}S_{1,2}$
- $B = T_{(-1,1)}S_{1,2}R_{\phi}$
- $C = S_{-1,-2}R_{-\phi}$
- $D = R_{-\phi}S_{-1,-2}T_{(1,-1)}$
- $E = S_{1,1/2}R_{-\phi}T_{(1,-1)}$
- $F = S_{1,1/2}R_{\phi}$

Aufgabe 4 Scanline-Algorithmus (14 Punkte)

4.1. Es sei ein Polygon durch die Punkte $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und durch die Kanten $\overline{\mathbf{AB}}$, $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{\mathbf{CD}}$ und $\overline{\mathbf{DA}}$ gegeben. **Bestimmen** Sie die zugehörige initiale Edge-Table und tragen Sie sie in der folgenden Tabelle ein:

ID	x	k	y_{min}	y_{max}	dx	rx	Δy

4.2. Gegeben sei folgende Edge-Table für ein Polygon:

ID	x	k	y_{min}	y_{max}	dx	rx	Δy
$\overline{\mathbf{AE}}$	4	0	0	1	-3	0	1
$\overline{\mathbf{AB}}$	4	0	0	4	0	-1	4
$\overline{\mathbf{ED}}$	1	0	1	4	0	0	3
$\overline{\mathbf{CD}}$	2	0	2	4	-1	1	2
$\overline{\mathbf{CB}}$	2	0	2	4	0	1	2

Führen Sie anschließend den Scanline-Algorithmus durch und fügen Sie für jede Scanline Ihre berechneten Werte in die folgende Active-Edge-Table ein. Geben Sie außerdem unten die berechneten Spans an.

Scanline	ID	x	k	LR: pixel (x)
$y = 0$				
⋮				
⋮				

Spans: ______________________________

Aufgabe 5 Texturen (6 Punkte)

5.1. **Erläutern** Sie kurz in eigenen Worten wofür Mip-Mapping verwendet wird.

5.2. **Beschreiben** Sie die Vorteile von linearer Interpolation zwischen verschiedenen Mip-Map Ebenen gegenüber einer Nearest Neighbor Auswahl einer Mip-Map Ebene.

5.3. **Beschreiben** Sie die Unterschiede zwischen der *replace* und *modulate* Vorgehensweise bei der Texturverarbeitung.

5.4. **Beschreiben** Sie grob das Konzept zum Einsatz von Cubemaps zum Rendern eines ideal spiegelnden Objekts.

Aufgabe 6 **Multiple Choice** (5 Punkte)

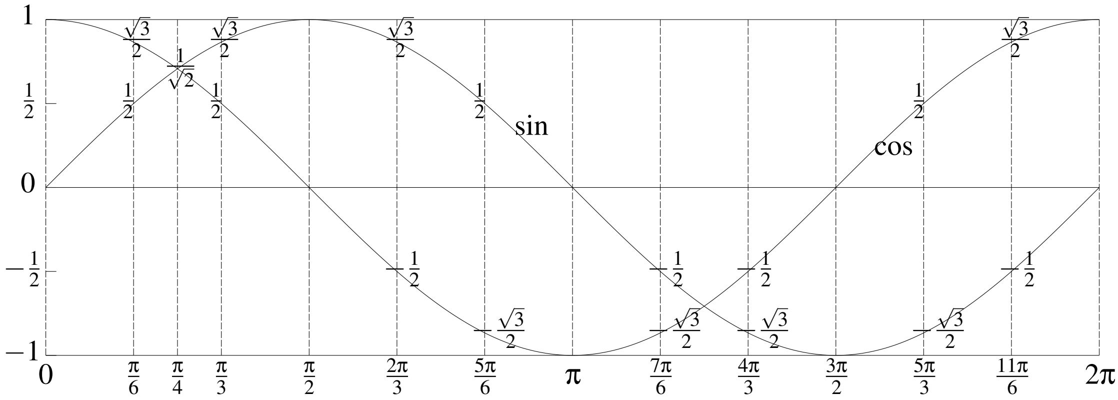
In der folgenden Aufgabe sind zehn **Multiple Choice Fragen** zu beantworten. Setzen Sie ihr Kreuz entweder bei *korrekt* oder *falsch* oder lassen Sie die Zeile frei, wenn Sie sich unsicher sind.

Pro korrekter Antwort werden 0,5 Punkte vergeben, pro falscher Antwort -0,5 Punkte. In Summe sind für die gesamte Aufgabe nur nicht-negative Punktzahlen erreichbar.

Aussage	**korrekt**	**falsch**
Matrixmultiplikationen sind im Allgemeinen nicht kommutativ.	☐	☐
Der diffuse Beleuchtungsterm des Phong-Modells hängt nicht von der Lichtquellen- oder Beobachterposition ab.	☐	☐
Der Reflexionsvektor wird für die Berechnung des spekulären Phong-Beleuchtungsterms benötigt.	☐	☐
Szenengraphen dürfen keine Zyklen enthalten.	☐	☐
Die Beleuchtungsberechnung erfolgt in Normalized Device Coordinates (NDC).	☐	☐
Double-Buffering wird eingesetzt, um Flimmern bei der Bildwiedergabe zu verhindern.	☐	☐
Mit dem Sutherland-Hodgeman-Algorithmus können beliebige Strecken rasterisiert werden.	☐	☐
Das Ergebnis der Scanline-Interpolation allgemeiner Polygone hängt von deren Lage ab.	☐	☐
Mit Gouraud-Shading können visuell glatte Farbübergänge auf Flächen und an Kanten erzeugt werden.	☐	☐
Bei aktivem Standard-z-Test kann ein Objekt auch hinter einem bereits gezeichneten transparenten Objekt gezeichnet werden.	☐	☐

Anhang

Sinus und Cosinus



Skalarprodukt und Kreuzprodukt

$$(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

$(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \cos\alpha \, \|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\|$, α einschließender Winkel

Norm und normierte Vektoren

$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

$\hat{\mathbf{u}}$ ist normierter Vektor, falls $\|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$

Viewing Transformation

Rechtshändiges, orthonormales Beobachter-Koordinatensystem $\{\mathbf{V}, \hat{\mathbf{v}}_x, \hat{\mathbf{v}}_y, \hat{\mathbf{v}}_z\}$ in WC liefert

$$T_V = \begin{bmatrix} & A^T & & -A^T\mathbf{V} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4} \quad \text{mit} \quad A = (\hat{\mathbf{v}}_x, \hat{\mathbf{v}}_y, \hat{\mathbf{v}}_z)$$

Perspektivische Transformation

n und f sind die nahe bzw. ferne Clipebene, b und h sind Breite bzw. Höhe auf der nahen Clipebene.

$$T_P = \begin{bmatrix} \frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+f}{n(n-f)} & \frac{2f}{n-f} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

Liang-Barsky-Algorithmus

Kante sei $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. $\alpha_i = \frac{\text{wec}_i(\mathbf{P}_1)}{\text{wec}_i(\mathbf{P}_1) - \text{wec}_i(\mathbf{P}_2)}, \quad i \in \{L, R, B, T\}$

Bresenham-Algorithmus

$d_{init} = 2\Delta y - \Delta x,\ inc_1 = 2\Delta y,\ inc_2 = 2(\Delta y - \Delta x)$

Scanline-Algorithmus

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = dx + \frac{rx}{\Delta y}, \quad dx \in \mathbb{Z}, \quad rx \in [0, \Delta y - 1] \subset \mathbb{N}_0$