Übungen zu Multimedia-Retrieval
Aufgabenblatt 2 - Musterlösungen

Übung: Dipl.-Inform. Christian Feinen
Vorlesung: JProf. Dr.-Ing. Marcin Grzegorzek
Forschungsgruppe für Mustererkennung
Institut für Bildinformatik im Department ETI
Fakultät IV der Universität Siegen

Ausgabe: 11.11.2011
Abgabe: 25.11.2011 per E-Mail an **{christian.feinen, marcin.grzegorzek}@uni-siegen.de**
Format: A1-Nachname1-Nachname2.pdf

1 Diskrete Fourier Transformation (15 Punkte)

1. Erläutert welche Einsatzgebiete es für die DFT im Bereich der Multimediadatenbanken gibt.
2. Erstellt die Transformationsmatrizen (Hin- und Rücktransformation) für die DFT für diskrete Funktionen mit 4 Funktionswerten. Zur Erinnerung: $r \cdot e^{i\phi} = r \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi)$
3. Führt die Hin- und Rücktransformation für die diskrete Funktion $(2, 8, 4, 10)^T$ mit den berechneten Matrizen aus.
4. Führt eine Tiefpassfilterung aus, indem ihr die höchste Frequenz in der vorrangegangenen Frequenzdarstellung entfernt, und die gefilterte Funktion rücktransformiert.
5. Führt die Hin- und Rücktransformation für die folgende 2-dimensionale, diskrete Funktion aus:
$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

Musterlösung:

1. a) Feature-Normalisierung, Reduktion von Störeinflüssen
   b) Feature-Erkennung, Erkennen relevanter Features, oft im Frequenzspektrum einfacher (Audio z.B.)
   c) Feature-Aufbereitung, Minimalität der Feature-Werte erreichen.

2.

$$A = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}, \qquad A^* = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

Generell gilt für jedes Element der Matrix A: $a_{j+1,k+1} = \overline{e_j(k)} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{i2\pi jk}{n}}$. Für $n = 4$ daher: $a_{j+1,k+1} = \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-\frac{1}{2} i\pi jk} = \frac{1}{\sqrt{4}} (\cos \frac{1}{2}\pi jk - i \sin \frac{1}{2}\pi jk)$.

3. Sei $f = (2, 8, 4, 10)^T$ die Ausgagnsfunktion und F die gesuchte, transformierte Funktion. Hin:

$$F = Af = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+8+4+10 \\ 2-8i-4+10i \\ 2-8+4-10 \\ 2+8i-4-10i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 24 \\ -2+2i \\ -12 \\ -2-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1+i \\ -6 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

Zurück:

$$f = A^*F = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ -1+i \\ -6 \\ -1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12-1+i-6-1-i \\ 12-i-1+6+i-1 \\ 12+1-i-6+1+i \\ 12+i+1+6-i+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4.

$$f = A^*F' = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ -1+i \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12-1+i-6 \\ 12-i-1+6 \\ 12+1-i-6 \\ 12+i+1+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5+i \\ 17-i \\ 7-i \\ 19+i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2,5+0,5i \\ 8,5-0,5i \\ 3,5-0,5i \\ 9,5+0,5i \end{pmatrix}$$

5. Generell gilt für $m = 2, n = 2$:

$$F_{2,2}(j,k) = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y) e^{-\frac{i2\pi jx}{2}} e^{-\frac{i2\pi ky}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y) e^{-i\pi jx} e^{-i\pi ky}$$

Hintransformation:

$$
\begin{aligned}
F_{2,2}(0,0) =& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x*0}e^{-i\pi y*0}\\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)\\
=& \tfrac{1}{2}(2+8+4+10) = 12\\
F_{2,2}(0,1) =& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x*0}e^{-i\pi y*1}\\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi y}\\
=& \tfrac{1}{2}(2+8e^{-i\pi}+4+10e^{-i\pi})\\
=& 3+9e^{-i\pi} = 3+9\cos\pi - 9i\sin\pi\\
=& 3-9 = -6\\
F_{2,2}(1,0) =& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x*1}e^{-i\pi y*0}\\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x}\\
=& \tfrac{1}{2}(2+8+4e^{-i\pi}+10e^{-i\pi})\\
=& 5+7e^{-i\pi} = 5+7\cos\pi - 7i\sin\pi\\
=& 5-7 = -2\\
F_{2,2}(1,1) =& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x*1}e^{-i\pi y*1}\\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{1} f_{2,2}(x,y)e^{-i\pi x}e^{-i\pi y}\\
=& \tfrac{1}{2}(2+8e^{-i\pi}+4e^{-i\pi}+10e^{-i\pi}e^{-i\pi})\\
=& \tfrac{1}{2}(2+12e^{-i\pi}+10e^{-i2\pi}) = 1+6e^{-i\pi}+5e^{-i2\pi}\\
=& 1+6\cos\pi - 6i\sin\pi + 5\cos 2\pi - 5i\sin 2\pi\\
=& 1-6+5 = 0
\end{aligned}
$$

Ergebnis Matrix:

$$F_{2,2} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Rücktransformation, generell gilt:

$$f_{2,2}(x,y) = \tfrac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{\frac{i2\pi jx}{2}}e^{\frac{i2\pi ky}{2}} = \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi jx}e^{i\pi ky}$$

Rechnung:

$$
\begin{aligned}
f_{2,2}(0,0) =& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j*0}e^{i\pi k*0} \\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k) \\
=& \tfrac{1}{2}(12-6-2+0) = 2 \\
f_{2,2}(0,1) =& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j*0}e^{i\pi k*1} \\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi k} \\
=& \tfrac{1}{2}(12-6e^{i\pi}-2+0e^{i\pi}) = 5-3e^{i\pi} \\
=& 5-3\cos\pi+3i\sin\pi = 8 \\
f_{2,2}(1,0) =& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j*1}e^{i\pi k*0} \\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j} \\
=& \tfrac{1}{2}(12-6-2e^{i\pi}+0e^{i\pi}) = 3-1e^{i\pi} \\
=& 3-1\cos\pi+1i\sin\pi = 4 \\
f_{2,2}(1,1) =& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j*1}e^{i\pi k*1} \\
=& \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} F_{2,2}(j,k)e^{i\pi j}e^{i\pi k} \\
=& \tfrac{1}{2}(12-6e^{i\pi}-2e^{i\pi}+0e^{-i\pi}e^{-i\pi}) \\
=& \tfrac{1}{2}(12-8e^{i\pi}+0e^{-i\pi}e^{-i\pi}) \\
=& 6-4\cos\pi+4i\sin\pi \\
=& 6+4 = 10
\end{aligned}
$$

2 Diskrete Wavelet Transformation (15 Punkte)

1. Was ist der prinzipielle Unterschied zwischen der DFT und der DWT?
2. Führt eine vollständige Wavelet-Zerlegung mit Hilfe des Haar-Wavelets auf der diskreten Funktion $(7,3,10,13,1,7,6,9)^T$ aus und gebt auch die Berechnung des Ursprungssignals aus der Zerlegung an.
3. Gegeben sei die 2-dimensionale, diskrete Funktion

$$f_{4,4} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 2 & 9 \\ 7 & 4 & 16 & 19 \\ 8 & 5 & 14 & 1 \\ 5 & 10 & 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

Führt jeweils eine vollständige Standard und eine Non-Standardzerlegung durch.

Musterlösung:

1. Die DFT transformiert die Eingabefunktion in den Frequenzbereich, in dem jegliche Ortsinformation verloren ist. Die DWT hingegen transformiert in eine Darstellung, in der sowohl Orts- als auch Frequenzinformationen vorhanden sind.

2. Eingangsfunktion entspricht $f_8 = (7, 3, 10, 13, 1, 7, 6, 9)$. Die Ergebnisfunktion entspricht Koeffizienten $(\Phi_0^8, \Psi_0^8, \Psi_0^4, \Psi_1^4, \Psi_0^2, \Psi_1^2, \Psi_2^2, \Psi_3^2)$. Die Berechnung der Koeffizienten findet anhand der in der Vorlesung vorgestellten Formeln statt.

   $\Psi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/2-0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(7-3) = \frac{4}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/2-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(10-13) = \frac{-3}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/2-2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-7) = \frac{-6}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_3^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/2-3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(6-9) = \frac{-3}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_0^4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/4-0) = \frac{1}{2}(7+3-10-13) = \frac{-13}{2}$
   $\Psi_1^4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/4-1) = \frac{1}{2}(1+7-6-9) = \frac{-7}{2}$
   $\Psi_0^8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Psi(x/8-0) = \frac{1}{\sqrt{8}}(7+3+10+13-1-7-6-9) = \frac{10}{\sqrt{8}}$
   $\Phi_0^8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{x=0}^{7} f_8(x)\Phi(x/8-0) = \frac{1}{\sqrt{8}}(7+3+10+13+1+7+6+9) = \frac{56}{\sqrt{8}}$

   Daher ist die Ergebnisfunktion: $(\frac{56}{\sqrt{8}}, \frac{10}{\sqrt{8}}, \frac{-13}{2}, \frac{-7}{2}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-6}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}})$.

   Prinzipiell basiert die Rücktransformation auf folgenden Formeln:

   $\Phi_{2i}^{n/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_i^n + \Psi_i^n)$
   $\Phi_{2i+1}^{n/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_i^n - \Psi_i^n)$

   Daher berechnen sich die Skalierungskoeffizienten und die Originalfunktion folgendermaßen:

   $\Phi_0^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{56}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{2}}) = \ldots$
   $\Phi_1^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{56}{\sqrt{2}} - \frac{10}{\sqrt{2}}) = \ldots$
   $\vdots$

3. Standardzerlegung bedeutet erst jede Zeile vollständig zu transformieren, dann jede Spalte auf der 1D-transformierten Matrix. Als Beispiel erste Zeile:

   $\Psi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(8-10) = \frac{-2}{\sqrt{2}}$
   $\Psi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(5-9) = \frac{-4}{\sqrt{2}}$
   $\Phi_0^4 = \frac{1}{2}(8+10+5+9) = 16$
   $\Psi_0^4 = \frac{1}{2}(8+10-5-9) = 2$

Wenn analog auf restliche Zeilen angewandt kommt folgende 1D-transformierte Matrix raus:

$$\begin{bmatrix} 16 & 2 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ 20.5 & -9.5 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{2}} \\ 12.5 & -0.5 & \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{11}{\sqrt{2}} \\ 14.5 & -0.5 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Jetzt können die Spalten transformiert werden. Als Beispiel erste Spalte:

$\Psi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(16 - 20,5) = \frac{-4.5}{\sqrt{2}}$
$\Psi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(12.5 - 14.5) = \frac{-2}{\sqrt{2}}$
$\Phi_0^4 = \frac{1}{2}(16 + 20.5 + 12.5 + 14.5) = 31.75$
$\Psi_0^4 = \frac{1}{2}(16 + 20.5 - 12.5 - 14.5) = 4.75$

Das Ergebnis ist dann:

$$\begin{bmatrix} 31.75 & -4.25 & \frac{1.5}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{2}} \\ 4.75 & -3.25 & \frac{-2.5}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \\ \frac{-4.5}{\sqrt{2}} & \frac{11.5}{\sqrt{2}} & -1.5 & 1 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Bei der Non-Standardzerlegung werden abwechselnd die Zeilen und die Spalten transformiert. Start mit der Ausgagnsmatrix:

$$f_{4,4} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 12 & 18 \\ 9 & 3 & 12 & 1 \\ 6 & 8 & 4 & 11 \end{bmatrix}.$$

Eine Zerlegung aller Zeilen in Auflösungsstufe 2, d.h. für die erste Zeile:

$\Phi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Phi(x/2 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(8 + 10) = \frac{18}{\sqrt{2}}$
$\Phi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Phi(x/2 - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(5 + 9) = \frac{14}{\sqrt{2}}$
$\Psi_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Psi(x/2 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(8 - 10) = \frac{-2}{\sqrt{2}}$
$\Psi_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{y=0}^{3} f_{4,4}(0,y)\Psi(x/2 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(5 - 9) = \frac{-4}{\sqrt{2}}$

Das resultiert in der Matrix

$$\begin{bmatrix} \frac{18}{\sqrt{2}} & \frac{14}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ \frac{11}{\sqrt{2}} & \frac{30}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-6}{\sqrt{2}} \\ \frac{12}{\sqrt{2}} & \frac{13}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{11}{\sqrt{2}} \\ \frac{14}{\sqrt{2}} & \frac{15}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Anwendung auf die Spalten:

$$\begin{bmatrix} 14.5 & 22 & -0.5 & -5 \\ 13 & 14 & 2 & 2 \\ 3.5 & -8 & -1.5 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Erneute Anwendung auf die Zeilen, aber nur auf der 2×2-Matrix mit $x \in \{0, 1\}$ und $y \in \{0, 1\}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{36.5}{\sqrt{2}} & \frac{-7.5}{\sqrt{2}} & -0.5 & -5 \\ \frac{27}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 2 & 2 \\ 3.5 & -8 & -1.5 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Analog für Spalten, ergibt finale Matrix:

$$\begin{bmatrix} 31.75 & -4.25 & -0.5 & -5 \\ 4.75 & -3.25 & 2 & 2 \\ 3.5 & -8 & -1.5 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$
