

Multimedia Retrieval

4 Transforms for Feature Extraction

4.1 Fourier Transform

Prof. Dr. Marcin Grzegorzek

Research Group for Pattern Recognition
www.pr.informatik.uni-siegen.de

Institute for Vision and Graphics
University of Siegen, Germany

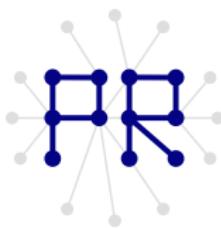


Table of Contents

1 Introduction

- 1.1 Fundamental Concept
- 1.2 Search in a MMDBS
- 1.3 Applications of MMDBMS

2 Fundamentals of Information Retrieval

- 2.1 Introduction
- 2.2 Information Retrieval Models
- 2.3 Relevance Feedback
- 2.4 Evaluation of Retrieval Systems
- 2.5 User Profiles

Table of Contents

3 Fundamentals of Multimedia Retrieval

- 3.1 Characteristics of MM Management and Retrieval
- 3.2 Processing Pipeline of a Multimedia Retrieval Systems
- 3.3 Data of a Multimedia Retrieval System
- 3.4 Features
- 3.5 Applicability of Different Retrieval Models
- 3.6 Multimedia Similarity Model

4 Transforms for Feature Extraction

- ▶ 4.1 Fourier Transform
- 4.2 Wavelet Transform
- 4.3 Principal Component Analysis
- 4.4 Singular Value Decomposition

Table of Contents

5 Distance Functions

- 5.1 Properties and Classification
- 5.2 Distance Functions for Points
- 5.3 Distance Functions for Binary Data
- 5.4 Distance Functions for Sequences
- 5.5 Distance Functions for Sets

6 Similarity Measures

- 6.1 Introduction
- 6.2 Distance versus Similarity
- 6.3 Range of Similarity Measures
- 6.4 Concrete Similarity Measures
- 6.5 Aggregation of Similarity Values
- 6.6 Conversion of Distances into Similarity Values
- 6.7 Partial Similarity

Table of Contents

7 Efficient Algorithms and Data Structures

7.1 High-Dimensional Index Structures

7.2 Algorithms for Aggregation of Similarity Values

8 Query Processing

8.1 Introduction

8.2 Concepts of Query Processing

8.3 Database Model

8.4 Languages

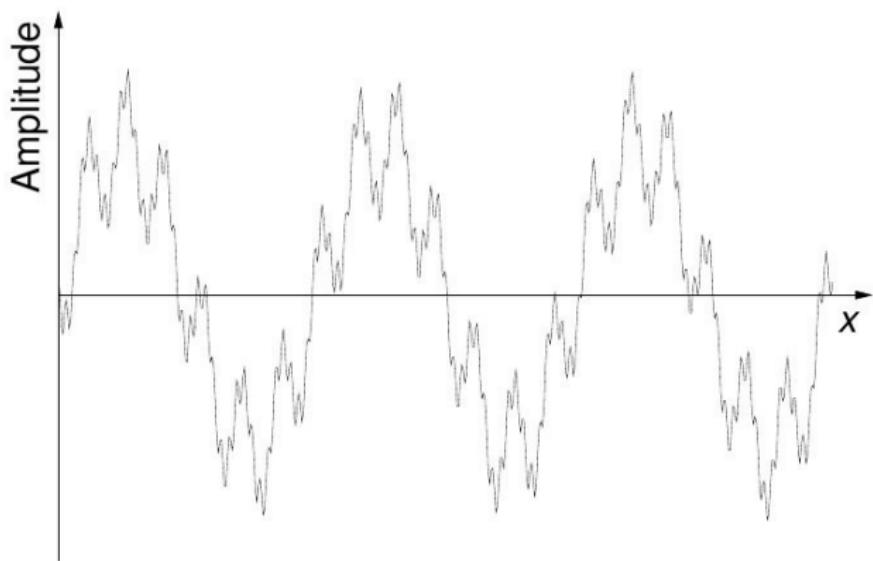
9. Summary and Conclusions

DFT - Allgemeines

- benannt nach franz. Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier
- periodische Funktion als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellbar
- Darstellung im Ortsbereich versus Darstellung im Frequenzbereich
- äquivalente Darstellungen (ineinander verlustfrei überführbar)
- Darstellung im Frequenzbereich
 - niedrige Frequenzen für groben Funktionsverlauf
 - hohe Frequenzen für Detailinformationen (etwa abrupte Funktionswertänderungen)

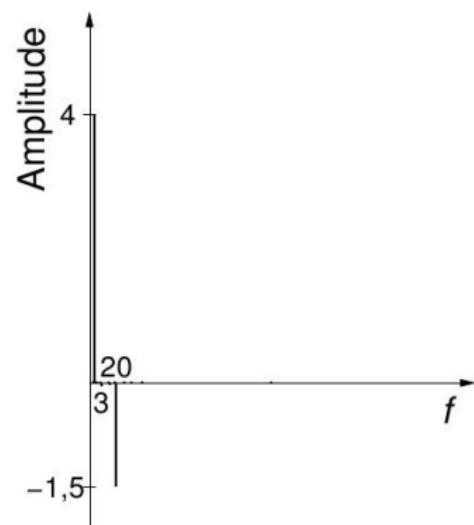
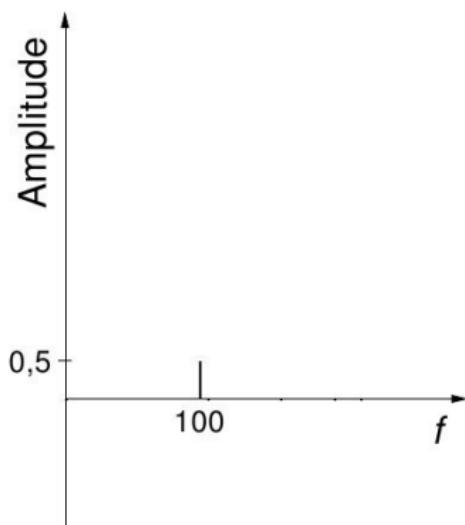
DFT - Erstes Beispiel

gegeben: $f(x) = 4 \sin 3x - 3/2 \sin 20x + 1/2 \cos 100x$



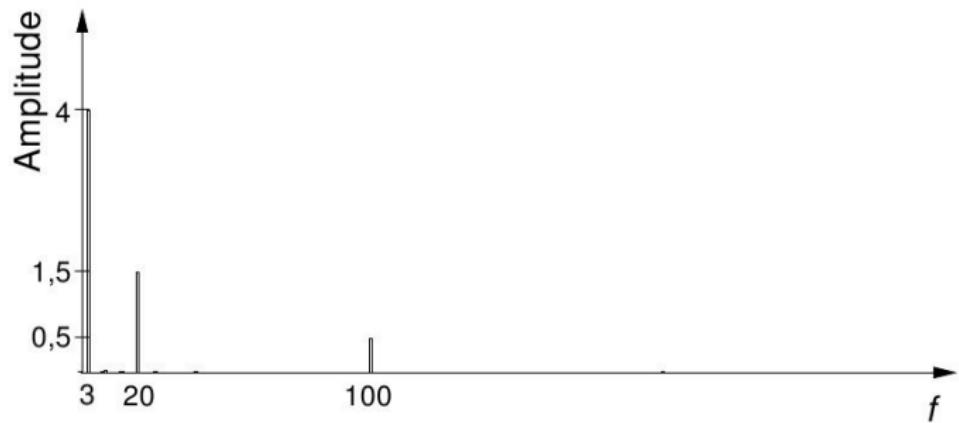
DFT - Erstes Beispiel

Anteil Kosinus- und Sinusschwingungen:



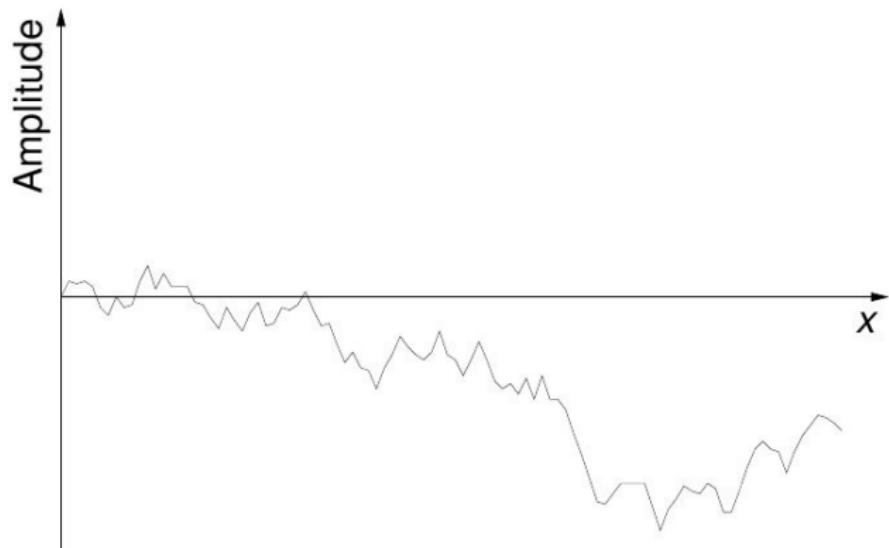
DFT - Erstes Beispiel

Frequenzspektrum:



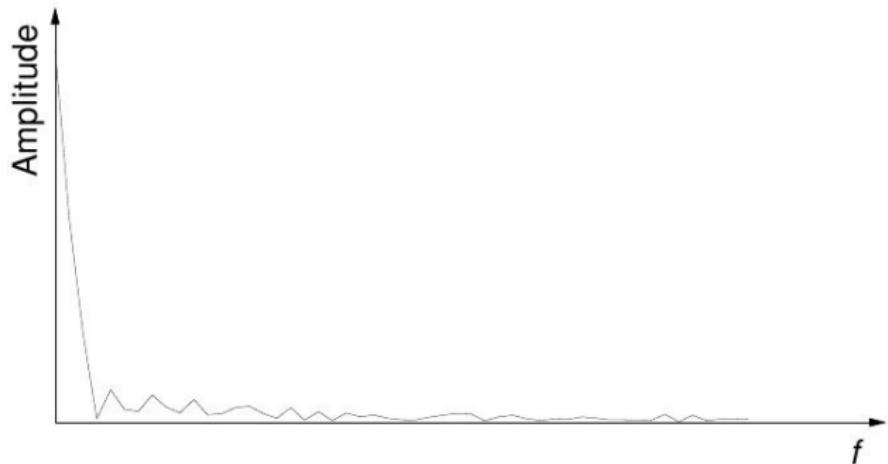
DFT - Zweites Beispiel

zufällig erzeugte Funktion:



DFT - Zweites Beispiel

Frequenzspektrum und Kompaktheit:



DFT - Gedankenexperiment

Darstellung im Orts- und Frequenzbereich:

- Lautsprecher als Tonquelle erzeugt konstantes Geräusch
→ Orts- bzw. Zeitbereich
- Eine bestimmte Klaviersaite beginnt zu schwingen, wenn ihre Frequenz im Geräusch enthalten ist. Wenn man die Stärke aller Saitenschwingungen aufzeichnet, erhält man die Darstellung des Signals im Frequenzbereich.
→ Frequenzbereich
- Rekonstruktion des Geräusches durch Anregen der entsprechenden Klaviersaiten

DFT - Anwendungen

Feature-Normalisierung

- Unterdrückung von Störeinflüssen innerhalb der Medienobjekte
- Problem: Trennung Nutz- und Stördaten
- Trennung manchmal im Frequenzbereich möglich

Feature-Erkennung

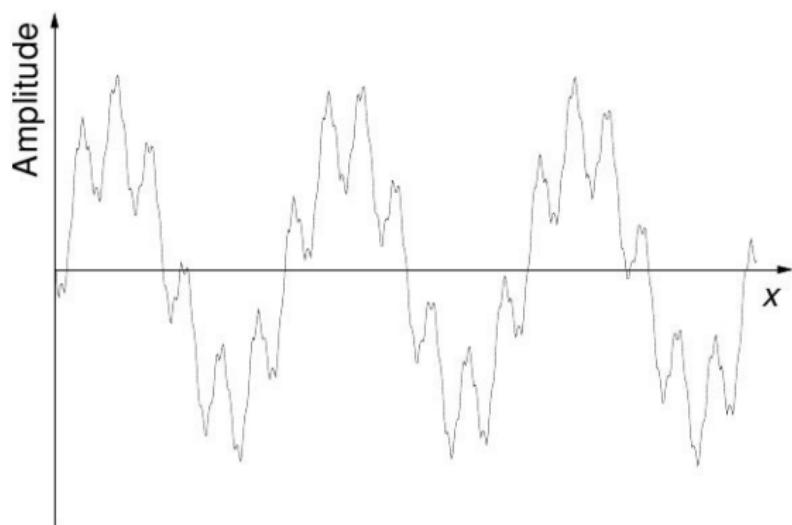
- Korrespondenz zwischen zu extrahierenden Eigenschaften und Frequenzen möglich

Feature-Aufbereitung

- Kompaktheit im Frequenzbereich → Minimalität
- Orthogonalität der Fourier-Koeffizienten

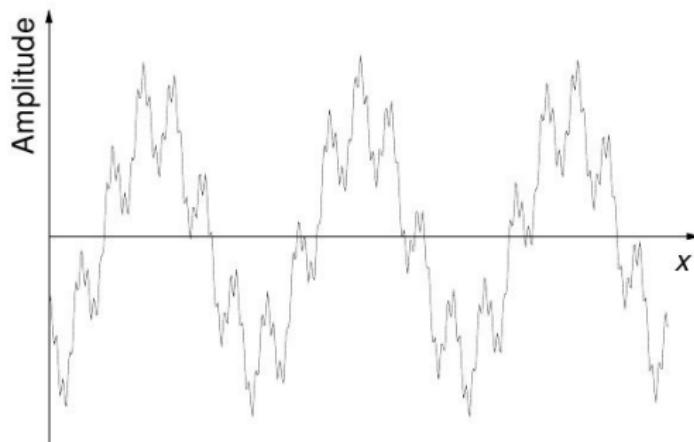
DFT - Beispiel zur Feature-Normalisierung

Beispiel: Entfernung von Frequenz $f=100$



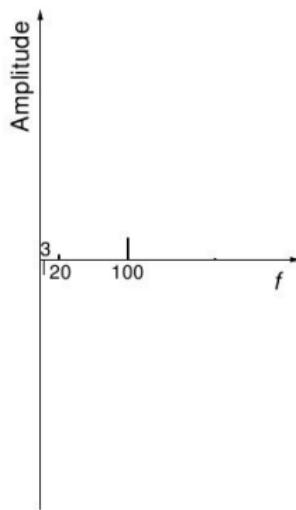
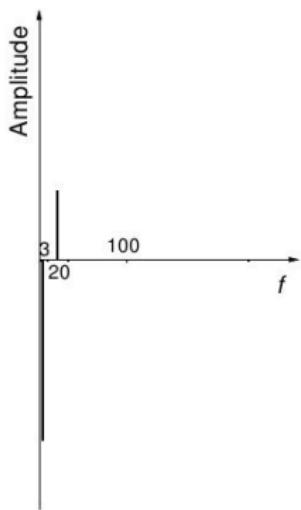
DFT - Feature-Erkennung, Translationsinvarianz

Funktion $f(x) = 4 \sin 3x - 3/2 \sin 20x + 1/2 \cos 100x$ um $\pi/3$ verschoben:



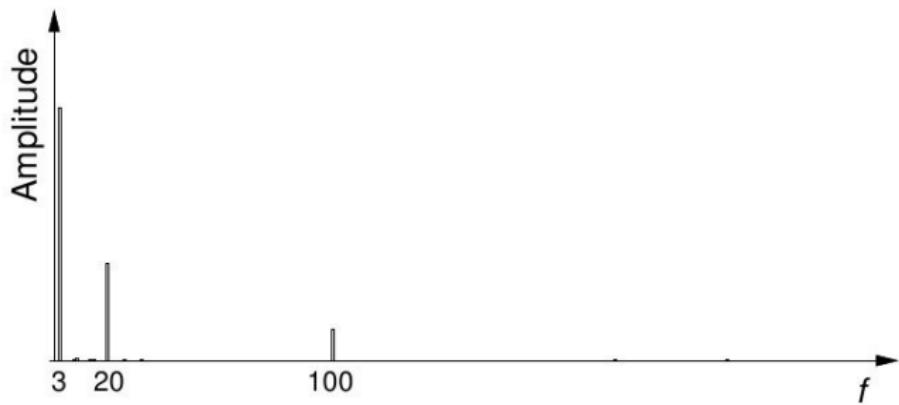
DFT - Feature-Erkennung, Translationsinvarianz

Anteil Kosinus- und Sinusschwingungen:



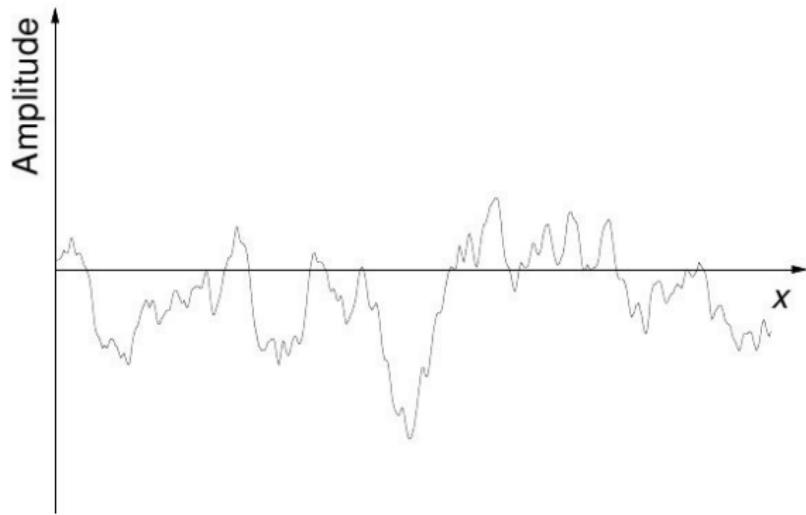
DFT - Feature-Erkennung mit Translationsinvarianz

Frequenzspektrum:



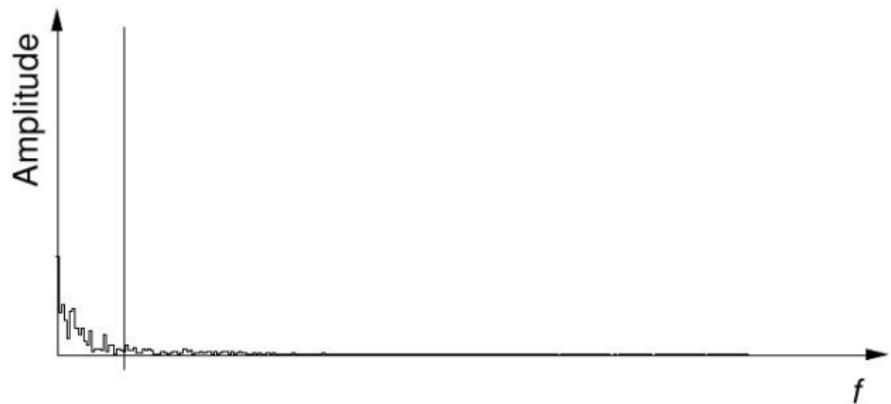
DFT - Feature-Aufbereitung, Minimalität

Ausgangsfunktion:



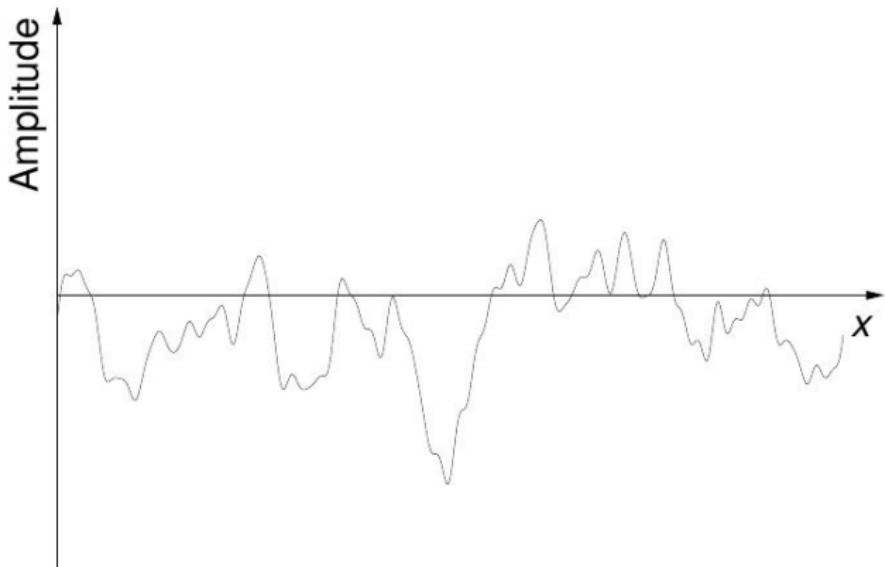
DFT - Feature-Aufbereitung, Minimalität

Frequenzspektrum und Abschneiden hoher Frequenzen:



DFT - Feature-Aufbereitung, Minimalität

approximierte, d.h. minimierte Funktion:



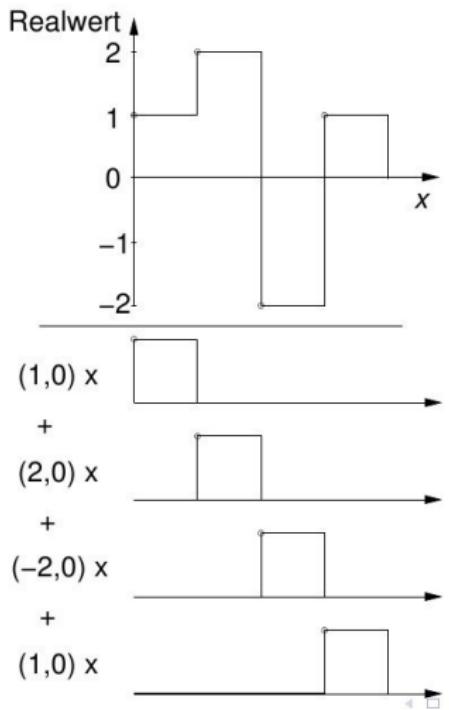
DFT - Berechnung

Erinnerung lineare Algebra und komplexe Zahlen

- diskrete Funktion $f(x)$ als Vektor des **komplexen Vektorraums**:
 $f(x) \in D_n^{\mathbb{C}}$
(Vektorraum $D_n^{\mathbb{C}}$ hat n kanonische Basisvektoren)
- Konjugation einer komplexen Zahl: $\overline{(x, y)} = (x, -y)$
- inneres Produkt für $f, g \in D_n^{\mathbb{C}}$: $\langle f, g \rangle = \sum_{x=0}^{n-1} f(x) * \overline{g(x)}$
- Entwicklungsformel für Orthonormalbasis (v_0, \dots, v_{n-1}) :

$$\forall v \in D_n^{\mathbb{C}} : v = \sum_{i=0}^{n-1} \langle v, v_i \rangle v_i$$

DFT - Beispiel im Vektorraum $D_4^{\mathbb{C}}$



DFT - Fourier-Basis

$$\begin{aligned} e_j(x) &= \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{i 2 \pi j x}{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{2 \pi j x}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} i \sin \frac{2 \pi j x}{n} \end{aligned}$$

mit $j = 0, \dots, n-1$, $x = 0, \dots, n-1$ und $i = \sqrt{-1}$

Orthonormalität:

$$\|e_j(x)\| = \sqrt{\langle e_j(x), e_j(x) \rangle} = 1 \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\langle e_j(x), e_k(x) \rangle = 0 \quad \text{für } j, k = 0, 1, \dots, n-1 \text{ und } j \neq k$$

DFT - Fourier-Koeffizienten

- aufgrund Orthonormalität der Fourier-Basis Berechnung der Fourier-Koeffizienten mittels **innerem Produkt**:

$$(re_j, im_j) = \langle f_n(x), e_j(x) \rangle$$

→ Transformation als einfache Multiplikation mit DFT-Matrix möglich

- Transformation entspricht Rotation im komplexen, hochdimensionalen Raum
- Ergebnis: komplexe Fourier-Koeffizienten
 - Realteil für Kosinusamplituden
 - Imaginärteil für Sinusamplituden

DFT - Transformationsformel

$$\begin{aligned}F_n(j) &= \langle f_n(x), e_j(x) \rangle \\&= \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \cdot \overline{e_j(x)} \\&= \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{i2\pi jx}{n}} \\&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \cdot e^{-\frac{i2\pi jx}{n}} \\&= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \cos \frac{2\pi jx}{n}, -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \sin \frac{2\pi jx}{n} \right)\end{aligned}$$

DFT - Rücktransformation DFT⁻¹

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} F_n(j) \cdot e_j(x) \\&= \sum_{j=0}^{n-1} F_n(j) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{i2\pi j x}{n}} \\&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} F_n(j) \cdot e^{\frac{i2\pi j x}{n}} \\&= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} F(x) \cos \frac{2\pi j x}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} F(x) \sin \frac{2\pi j x}{n} \right)\end{aligned}$$

DFT - Polarkoordinaten

komplexe Zahl (x, y) als Polarkoordinaten mit Länge und Winkel

- Winkel (Phase): $\tan \gamma = \frac{y}{x}$
- Länge: $l = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Winkel drückt Verschiebung aus (Sinus versus Kosinus)
- Frequenzspektrum berücksichtigt nur Länge

DFT - Eigenschaften

- **Parseval-Theorem**: $\langle f_n^1(x), f_n^2(x) \rangle = \langle F_n^1(x), F_n^2(x) \rangle$
→ euklidsche Distanzen sind im Orts- und Frequenzbereich gleich
- Translation im Ortsbereich ändert ausschließlich Phasenwinkel
- **Symmetrie** der Fourier-Koeffizienten: Werte sind spiegelsymmetrisch
→ n reelle Zahlen reichen zur Darstellung von $F_n(x)$
- **Nyquist-Theorem (Abtasttheorem)**: zur Abbildung bestimmter Frequenz mind. doppelt so viele Abtastwerte erforderlich → Symmetrie