Multimedia Retrieval

4 Transforms for Feature Extraction

4.2 Wavelet Transform

Prof. Dr. Marcin Grzegorzek

Research Group for Pattern Recognition
`www.pr.informatik.uni-siegen.de`

Institute for Vision and Graphics
University of Siegen, Germany

Table of Contents

1 Introduction

1.1 Fundamental Concept

1.2 Search in a MMDBS

1.3 Applications of MMDBMS

2 Fundamentals of Information Retrieval

2.1 Introduction

2.2 Information Retrieval Models

2.3 Relevance Feedback

2.4 Evaluation of Retrieval Systems

2.5 User Profiles

Table of Contents

3 Fundamentals of Multimedia Retrieval

3.1 Characteristics of MM Management and Retrieval

3.2 Processing Pipeline of a Multimedia Retrieval Systems

3.3 Data of a Multimedia Retrieval System

3.4 Features

3.5 Applicability of Different Retrieval Models

3.6 Multimedia Similarity Model

4 Transforms for Feature Extraction

4.1 Fourier Transform

▶ 4.2 Wavelet Transform

4.3 Principal Component Analysis

4.4 Singular Value Decomposition

Table of Contents

5 Distance Functions

5.1 Properties and Classification

5.2 Distance Functions for Points

5.3 Distance Functions for Binary Data

5.4 Distance Functions for Sequences

5.5 Distance Functions for Sets

6 Similarity Measures

6.1 Introduction

6.2 Distance versus Similarity

6.3 Range of Similarity Measures

6.4 Concrete Similarity Measures

6.5 Aggregation of Similarity Values

6.6 Conversion of Distances into Similarity Values

6.7 Partial Similarity

Table of Contents

7 Efficient Algorithms and Data Structures

7.1 High-Dimensional Index Structures

7.2 Algorithms for Aggregation of Similarity Values

8 Query Processing

8.1 Introduction

8.2 Concepts of Query Processing

8.3 Database Model

8.4 Languages

9. Summary and Conclusions

DWT - Allgemeines

- hier Fokus auf Haar-Wavelets (nach Alfred Haar) als einfachstes Wavelet
- „Wavelet“steht für Wellchen, also lokal begrenzte Welle
- vielfältiger Einsatz etwa in Signal- und Bildverarbeitung (etwa JPEG2000)

DWT - Probleme der DFT

Probleme mit der Fourier-Transformation

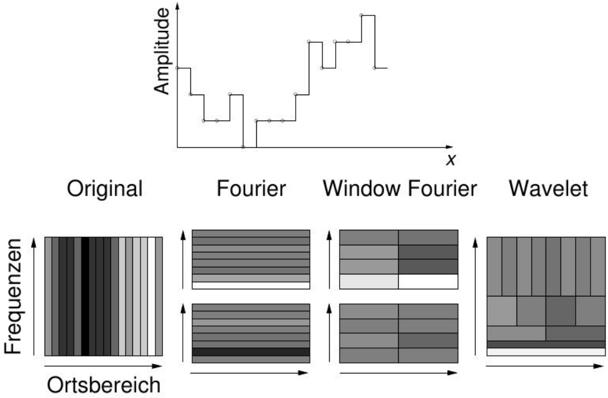
- lokale versus globale Änderung:
  - lokale Änderung im Ortsbereich
    $\longrightarrow$ globale Änderung im Frequenzbereich und umgekehrt
  - Problem: etwa temporäre Störgeräusche aus Audio-Signal entfernen
- Ort und Frequenz als Feature-Wert:
  - beides nicht gemeinsam in einer Darstellung verfügbar
  - Problem etwa bei Erkennung lokal begrenzter Texturen

DWT - Allgemeine Idee

- gemeinsame Darstellung von Frequenz und Ort
- Ansatz für Fourier-Transformation:
  Window-Fourier-Transformation
  - Zerlegung Ausgangssignal in disjunkte Intervalle (Fenster) konstanter Breite
  - Fourier-Transformation isoliert auf einzelnen Intervallen
  - Problem: statische Intervallbreite
- Wavelet-Transformation: Frequenzen bei unterschiedlicher Ortsauflösung
  $\longrightarrow$ Multi-Resolution-Analyse
- Einschränkung der Frequenzen durch Nyquist-Abtasttheorem
  $\longrightarrow$ je größer Ortsauflösung, desto geringer Frequenzauflösung und umgekehrt

DWT - Graphische Darstellung

Ausgangssignal:



DWT - Wavelet-Basisfunktionen

- Support (Funktionswert ungleich Null) lokal begrenzt $\longrightarrow$ Wellchen
- Generierung von Basisfunktionen aus „Mutter-Wavelet“ durch Verschiebung und Skalierung
- Existenz diverser Mutter-Wavelets (hier nur Haar-Mutter-Wavelet)

DWT - Haar-Wavelet

Funktionsprinzip (stark vereinfacht)

- Ausgangspunkt: diskrete Funktion mit 2^n Funktionswerten
- schrittweises und iteriertes Berechnen der Summen (Skalierungswerte) und Differenzen (Detailkoeffizienten)
- Abbildung der Ausgangsfunktion auf $2^n - 1$ Detailkoeffizienten und einen Skalierungswert (Gesamtsumme)
- Ausgangsfunktion kann verlustfrei rekonstruiert werden

DWT - Haar-Wavelet

Beispiel

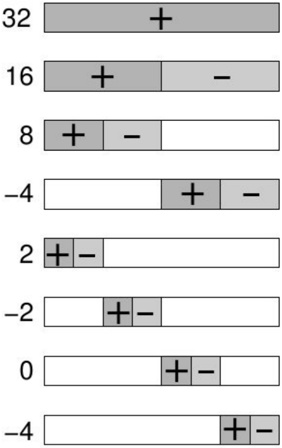
Ausgangsfunktion: $[\,9 \quad 7 \quad 3 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 5\,]$

Auflösungsstufe	Skalierungswerte	Detailkoeffizienten
1	$[\,9 \quad 7 \quad 3 \quad 5 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 5\,]$	
2	$[\,16 \quad 8 \quad 2 \quad 6\,]$	$[\,2 \quad -2 \quad 0 \quad -4\,]$
4	$[\,24 \quad 8\,]$	$[\,8 \quad -4\,]$
8	$[\,32\,]$	$[\,16\,]$

Ergebnis: $[\,32 \quad 16 \quad 8 \quad -4 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \quad -4\,]$

DWT - Haar-Wavelet

Support der einzelnen Wavelet-Basisfunktionen



DWT - Anwendungen

Feature-Normalisierung

- Störfrequenzen lassen sich lokal begrenzt entfernen
- Mutter-Wavelet kann an Störsignal angepasst werden
  $\longrightarrow$ aufwändige Analyse erforderlich
- Beispiel: Entfernen von Knackgeräuschen aus Audio-Signal

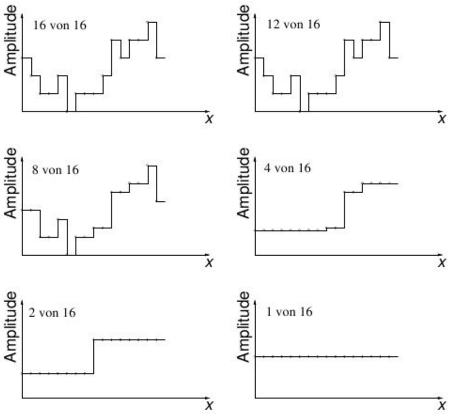
DWT - Anwendungen

Feature-Erkennung/-Aufbereitung

- Anwendung für lokale Frequenzanalyse, etwa für Textur-Feature
- Invarianzen
  - können an Orts- & Frequenzinformationen geknüpft sein
  - Verschiebungsinvarianz durch unsortierte Koeffizienten
  - Invarianz bzgl. Skalierung (Verdopplung/-Halbierung der Ortsauflösung) durch Nichtbeachtung der Auflösungsstufen
- Haar-Wavelet: geringe Berechnungskomplexität: $O(n)$
- Kompaktheit und Orthogonalität der Koeffizienten
- lokale Beschränkung bei Modifikation der Wavelet-Koeffizienten

DWT - Anwendungen

Anwendung zur verlustbehafteten Komprimierung



DWT - Berechnung

- Ausgangspunkt: diskrete Funktion $f_n(x) \in D_n^{\mathbb{R}}$
- Berechnung der Detailkoeffizienten Ψ^j und Skalierungswerte Φ^j in verschiedenen Auflösungsstufen $j = 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$
- orthonormale Basisvektoren: $\Psi(x)$ und $\Phi(x)$

DWT - Skalierungsbasisvektoren

i-ter Skalierungsbasisvektor $\Phi_i^j(x)$ der Auflösungsstufe j des Vektorraums $D_n^{\mathbb{R}}$:

$$\Phi_i^j(x) = 1/\sqrt{j} \cdot \Phi(x/j - i) \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n/j - 1 \text{ mit}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

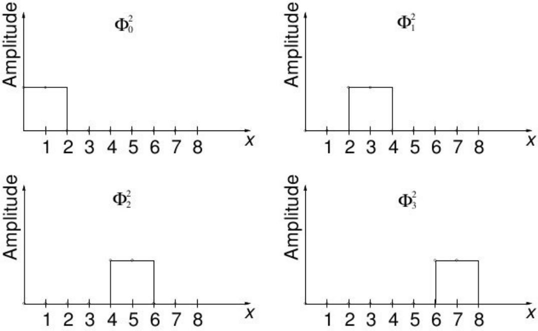
es gelten:

$$||\Phi_i^j(x)|| = \sqrt{\langle \Phi_i^j(x), \Phi_i^j(x) \rangle} = 1 \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n/j - 1.$$

$$\langle \Phi_i^j(x), \Phi_k^j(x) \rangle = 0 \qquad \text{für } i, k = 0, \ldots, n/j - 1 \text{ und } i \neq k.$$

DWT - Skalierungsbasisvektoren

Skalierungsvektoren der Stufe j=2



DWT - Detailbasisvektoren

i-ter Detailbasisvektor $\Phi_i^j(x)$ der Auflösungsstufe j des Vektorraums $D_n^{\mathbb{R}}$:

$$\Psi_i^j(x) = 1/\sqrt{j} \cdot \Psi(x/j - i) \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n/j - 1 \text{ mit}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{für } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

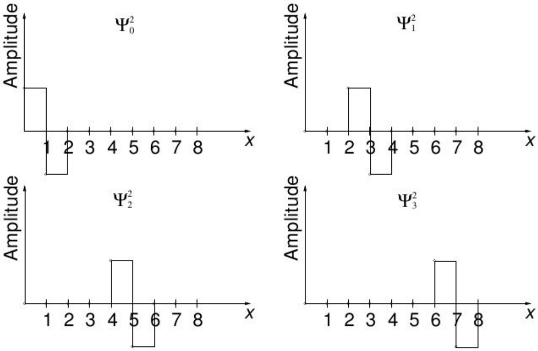
es gelten:

$$\langle \Psi_i^j(x), \Psi_k^j(x) \rangle = \delta_{i,k} \qquad \text{für } i, k = 0, \ldots, n/j - 1 \text{ mit}$$

$$\delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & : \quad i = k \\ 0 & : \quad i \neq k. \end{cases}$$

DWT - Detailbasisvektoren

Detailvektoren der Stufe j=2



DWT - Skalierungs- und Detailbasisvektoren

- Detail- und Skalierungsbasisvektoren derselben Auflösung sind orthogonal

$$\langle \Psi_i^j(x), \Phi_k^j(x) \rangle = 0 \qquad \text{für } i, k = 0, \ldots, n/j - 1.$$

- bilden gemeinsam orthonormale Basis für Vektorraum $D_{2n/j}^{\mathbb{R}}$

DWT - Skalierungs- und Detailbasisvektoren

Grundidee: Anwendung inneres Produkt der Vektoren der Orthonormalbasis der Stufe j auf $f_n(x) \in D_n^{\mathcal{R}}$

$$\begin{aligned} \Phi_i^j &= \langle f_n(x), \Phi_i^j(x) \rangle \\ &= 1/\sqrt{j} \sum_{x=0}^{n-1} f_n(x) \cdot \Phi(x/j - i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_i^j &= \langle f_n(x), \Psi_i^j(x) \rangle \\ &= 1/\sqrt{j} \sum_{x=0}^{n-1} f_n(x) \cdot \Psi(x/j - i) \end{aligned}$$

DWT - Skalierungs- und Detailbasisvektoren

Berechnung auf $f_n(x) \in D_n^{\mathcal{R}}$

- erzeugt $n/2$ Skalierungskoeffizienten
  drücken Frequenzen innerhalb entspr. Supportintervalle aus
- erzeugt $n/2$ Detailkoeffizienten
  drückt die Funktion ohne Frequenzen innerhalb entspr. Supportintervalle aus
- erneute Berechnung auf Funktion der Detailkoeffizienten
  $\longrightarrow$ nächste Auflösungsstufe
- Stopp, wenn Auflösungsstufe und Anzahl Werte gleich sind

DWT - Zerlegung in Wavelet-Koeffizienten

Wavelet-Koeffizienten einer Funktion $f_n(x) \in D_n^{\mathcal{R}}$ sind

$$\Phi_0^n \Psi_0^n \Psi_0^{n/2} \Psi_1^{n/2} \Psi_0^{n/4} \Psi_1^{n/4} \Psi_2^{n/4} \Psi_3^{n/4} \dots \Psi_0^2 \dots \Psi_{n/2-1}^2$$

mit

$$\begin{aligned}
\Psi_i^j &= 1/\sqrt{j} \sum_{x=0}^{n-1} f_n(x) \cdot \Psi(x/j - i) \\
\Phi_i^j &= 1/\sqrt{j} \sum_{x=0}^{n-1} f_n(x) \cdot \Phi(x/j - i)
\end{aligned}$$

DWT - Zerlegung in Wavelet-Koeffizienten

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & \text{Auflösung} \\
\text{Ausgangsfunktion:} & & & \Phi^1 \in D_8^{\mathbb{R}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & 1 \\
 & & \Phi^2 \in D_4^{\mathbb{R}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \Psi^2 \in D_4^{\mathbb{R}} & 2 \\
 & \Phi^4 \in D_2^{\mathbb{R}} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \Psi^4 \in D_2^{\mathbb{R}} & & 4 \\
\Phi^8 \in D_1^{\mathbb{R}} & & \Psi^8 \in D_1^{\mathbb{R}} & & & 8
\end{tikzcd}$$

DWT - Darstellung als Matrizenmultiplikation

- Funktionen $f_n(z)$ und $F_n(x)$ als Vektoren aus $\mathbb{R}^n$
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine $n \times n$-Matrix, deren n Zeilen den Wavelet-Basisvektoren entsprechen
- auf Grund $AA^* = I$ (Orthonomalmatrix) gilt $||f|| = ||Af||$
- quadratischer Berechnungsaufwand

DWT - Transformation mit linearem Aufwand

```
procedure Zerlegung(c: array [1..n] of reals)
  while n>1 do
    Zerlegungsschritt(c[1..n])
    n := n/2
  end while
end procedure

procedure Zerlegungsschritt(c: array [1..n] of reals)
  for i=1 to n/2 do
    cc[i] := (c[2i-1]+c[2i])/√2
    cc[n/2+i] := (c[2i-1]-c[2i])/√2
  end for
  c := cc
end procedure
```

DWT - Rücktransformation mit linearem Aufwand

```
procedure Rekonstruktion(c: array [1..n] of reals)
  g := 2
  while g ≤ n do
    Rekonstruktionsschritt(c[1..g])
    g := 2g
  end while
end procedure

procedure Rekonstruktionsschritt(c: array [1..n] of reals)
  for i=1 to n/2 do
    cc[2i-1] := (c[i]+c[n/2+i])/√2
    cc[2i] := (c[i]-c[n/2+i])/√2
  end for
  c := cc
end procedure
```

DWT - Zweidimensionaler Fall

- wichtig etwa für Rasterbilder
- 2 Varianten
  - *Standardzerlegung:* Transformation in Dimension 1 komplett, bevor Transformation in Dimension 2 startet
  - *Non-Standardzerlegung:* Transformation alternierend pro Auflösungsstufe
- analoges Verfahren für beliebig viele Dimensionen anwendbar

DWT - Algorithmus zur Standardzerlegung

procedure StandardZerl(**c: array [1..m,1..n] of reals**)
  for row := 1 **to** m **do**
    Zerlegung(c[row,1..n])
  end for
  for col := 1 **to** n **do**
    Zerlegung(c[1..m,col])
  end for
end procedure

DWT - Algorithmus zur Non-Standardzerlegung

```
procedure NonStandardZerl(c: array [1..n,1..n] of reals)
  while n>1 do
    for row := 1 to n do
      Zerlegungsschritt(c[row,1..n])
    end for
    for col := 1 to n do
      Zerlegungsschritt(c[1..n,col])
    end for
    n := n/2
  end while
end procedure
```