

Multimedia Retrieval

4 Transforms for Feature Extraction

4.3 Principal Component Analysis

Prof. Dr. Marcin Grzegorzek

Research Group for Pattern Recognition

www.pr.informatik.uni-siegen.de

Institute for Vision and Graphics

University of Siegen, Germany

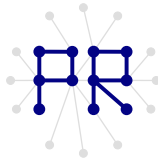


Table of Contents

1 Introduction

1.1 Fundamental Concept

1.2 Search in a MMDBS

1.3 Applications of MMDBMS

2 Fundamentals of Information Retrieval

2.1 Introduction

2.2 Information Retrieval Models

2.3 Relevance Feedback

2.4 Evaluation of Retrieval Systems

2.5 User Profiles

Table of Contents

3 Fundamentals of Multimedia Retrieval

- 3.1 Characteristics of MM Management and Retrieval
- 3.2 Processing Pipeline of a Multimedia Retrieval Systems
- 3.3 Data of a Multimedia Retrieval System
- 3.4 Features
- 3.5 Applicability of Different Retrieval Models
- 3.6 Multimedia Similarity Model

4 Transforms for Feature Extraction

- 4.1 Fourier Transform
- 4.2 Wavelet Transform
- ▶ 4.3 Principal Component Analysis
- 4.4 Singular Value Decomposition

Table of Contents

5 Distance Functions

- 5.1 Properties and Classification
- 5.2 Distance Functions for Points
- 5.3 Distance Functions for Binary Data
- 5.4 Distance Functions for Sequences
- 5.5 Distance Functions for Sets

6 Similarity Measures

- 6.1 Introduction
- 6.2 Distance versus Similarity
- 6.3 Range of Similarity Measures
- 6.4 Concrete Similarity Measures
- 6.5 Aggregation of Similarity Values
- 6.6 Conversion of Distances into Similarity Values
- 6.7 Partial Similarity

Table of Contents

7 Efficient Algorithms and Data Structures

7.1 High-Dimensional Index Structures

7.2 Algorithms for Aggregation of Similarity Values

8 Query Processing

8.1 Introduction

8.2 Concepts of Query Processing

8.3 Database Model

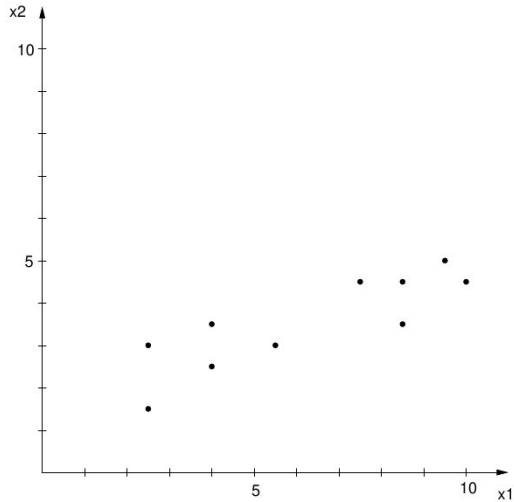
8.4 Languages

9. Summary and Conclusions

KLT - Allgemeines

- Minimalität und Orthogonalität **innerhalb eines** Medienobjekts (Fourier- & Wavelet-Transformation)
- Karhunen-Loeve-Transformation (KLT) für Minimalität und Orthogonalität bzgl. **mehrerer** Medienobjekten
- Analyse der Verteilungen der Feature-Werte **mehrerer** Medienobjekte
- Erkennung linearer Abhängigkeiten anhand erkannter *Achsen*
- andere Bezeichnung für KLT: **Hauptachsentransformation** (HAT), **principal component analysis** (PCA)

KLT - Lineare Abhängigkeit



KLT - Lineare Abhängigkeit und Minimalität

- lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz
 - Verletzung der Forderung nach Minimalität
- Problem: Achsen oft **nicht achsenparallel** im Feature-Raum
- Idee der KLT: **Verschiebung** und **Rotation** des Feature-Raums
 - Achsen entsprechen Feature-Dimensionen
 - Erwartungswert ist Koordinatenursprung
- Entfernen von Achsen mit geringer Streuung

KLT - Erstellen der Kovarianzmatrix

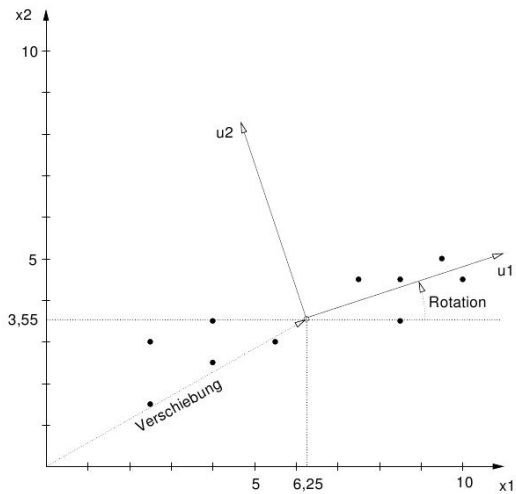
- Berechnung **Kovarianzmatrix** aus m -dimensionalen Feature-Vektoren
- $m \times m$ -Kovarianzmatrix $\{S_{kl}^2\}$: Kovarianz zwischen Dimensionen k und l :
 - $0 \longrightarrow$ keine lineare Abhängigkeit
 - $> 0 \longrightarrow$ positive lineare Abhängigkeit
 - $< 0 \longrightarrow$ negative lineare Abhängigkeit
- Diagonalwerte entsprechen Varianzwerten einzelner Dimensionen
- Kovarianzmatrix ist symmetrisch
 \longrightarrow **Zerlegung in $U * L * U^T$** durch Lösen von Eigenwertproblem

KLT - Zerlegung

$$\text{Kovarianzmatrix} = U * L * U^T$$

- U enthält orthonormale Eigenvektoren (Achsen)
→ Transformation in Eigenraum
- U^T entspricht Rücktransformation
- L ist Diagonalmatrix: Diagonalwerte sind Eigenwerte/Varianzwerte
→ achsenparallele Skalierung im Eigenraum

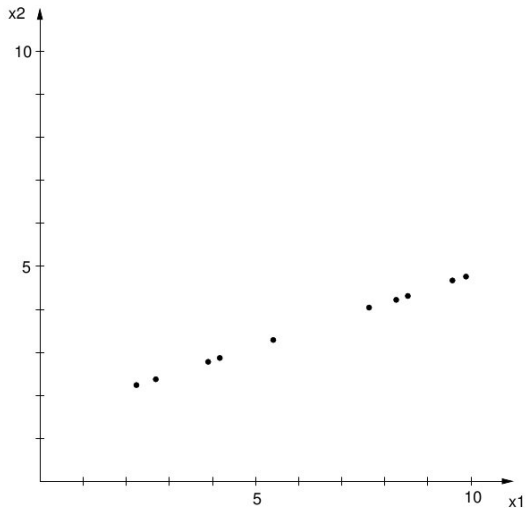
KLT - Zerlegung



KLT - Entfernen linearer Abhängigkeiten

- Transformation der Feature-Vektoren erzeugt achsenparallele Abhängigkeitsachsen
(Translation um negierten Mittelwertsvektor und Multiplikation mit U^T)
- Sortieren der Achsen nach Varianzwert
- Entfernen von Achsen mit geringer Varianz (unterhalb best. Schwellwert)
- Rücktransformation bedeutet Entfernen linearer Abhängigkeiten
(Multiplikation mit U und Translation um Mittelwertsvektor)
- Reduktionsfehler abhängig von Eigenwerten der entfernten Achsen → Distanzen bleiben weitgehend erhalten

KLT - Entfernen linearer Abhängigkeiten



KLT - Bewertung

Vorteile der KLT

1 Orthogonalisierung:

- lineare Abhängigkeiten werden entfernt
- Werte der Achsendimensionen (inhärente Feature-Dimension) isoliert manipulierbar
 - Trennung wesentlicher von unwesentlichen Dimensionen möglich

2 Minimierung: Entfernen unnötiger Dimensionen im Eigenraum

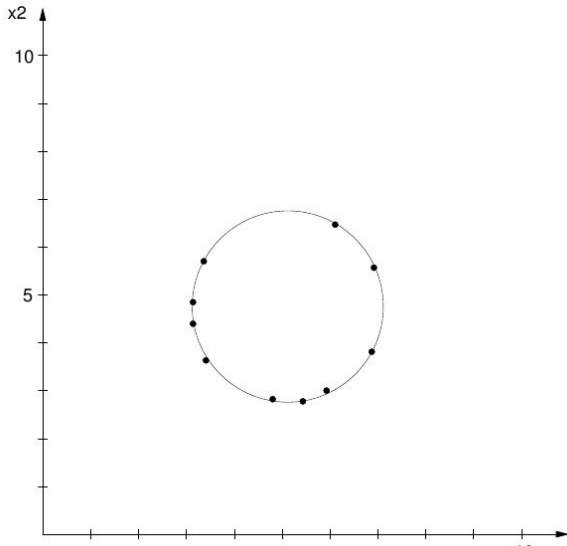
→ minimaler Reduktionsfehler

3 Invarianzen: isolierte Analyse von linear wirkenden Invarianzen möglich

Probleme der KLT

- Berechnung auf **Menge** von Feature-Vektoren
 - Problem bei dynamischer Menge
 - Lösungsansatz: Verwendung statischer repräsentativer Untermenge
- nicht-lineare Abhängigkeiten nicht erkennbar
- orthogonale Achsen: nicht immer erwünscht
Ausweg: ICA (independent component analysis)

KLT - Nicht-Lineare Abhängigkeiten



KLT - Berechnung

- Ausgangspunkt ist Menge von n m -dimensionalen Feature-Vektoren

→ $m \times n$ -Feature-Matrix $F = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Beispiel:

$$F = \begin{pmatrix} 2,5 & 2,5 & 4 & 4 & 5,5 & 7,5 & 8,5 & 8,5 & 9,5 & 10 \\ 1,5 & 3 & 3,5 & 2,5 & 3 & 4,5 & 4,5 & 3,5 & 5 & 4,5 \end{pmatrix}$$

- Mittelwertvektor: $\begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \vdots \\ \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$ mit $\bar{f}_{i*} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_{ij}$

- Beispiel: $\begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \bar{f}_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,25 \\ 3,55 \end{pmatrix}$

KLT - Berechnung

- Kovarianzmatrix: $S^2 = \{s_{kl}^2\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$s_{kl}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f_{ki} - \bar{f}_{k*})(f_{li} - \bar{f}_{l*})$$

- Beispiel: $S^2 = \begin{pmatrix} 8,3472 & 2,6806 \\ 2,6806 & 1,1917 \end{pmatrix}$

KLT - Zerlegung der Kovarianzmatrix

da symmetrisch, Zerlegung anhand Eigenvektoren möglich:

$$S^2 = U * L * U^T$$

- L enthält Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$
- U ist orthonormal und Spaltenvektoren entsprechen den Achsen
- Durchführung Permutation der drei Matrizen, damit $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ gilt
- Beispiel:

$$U = \begin{pmatrix} 0,9488 & -0,316 \\ 0,316 & 0,9488 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 9,24 & 0 \\ 0 & 0,2989 \end{pmatrix}$$

KLT - Transformation in den Achsenraum

Transformation von Feature-Vektor f_{*j}

$$\blacksquare f'_{*j} = U^T * \begin{pmatrix} f_{1j} - \bar{f}_{1*} \\ f_{2j} - \bar{f}_{2*} \\ \vdots \\ f_{mj} - \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$$

■ Beispiel: $F' =$

$$\begin{pmatrix} -4,2 & -3,7 & -2,1 & -2,5 & -0,9 & 1,5 & 2,4 & 2,1 & 3,5 & 3,8 \\ -0,8 & 0,7 & 0,7 & -0,3 & -0,3 & 0,5 & 0,2 & -0,7 & 0,3 & -0,3 \end{pmatrix}$$

KLT - Rücktransformation

$$f_{*j} = U * f'_{*j} + \begin{pmatrix} \bar{f}_{1*} \\ \bar{f}_{2*} \\ \vdots \\ \bar{f}_{m*} \end{pmatrix}$$

KLT - Entfernen von Dimensionen

- Entfernen von Achsendimensionen mit geringer Varianz
- Abschätzung über Anteil an Gesamtvarianz: $\text{Anteil}_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^m \lambda_j}$
- Beispiel: 1. Achse hat 97 Prozent und zweite Achse 3 Prozent
→ Weglassen der zweiten Achsendimension
- f''_{*j} sei Ergebnis der Reduktion von f'_{*j}
- Rücktransformation von f''_{*j} erzeugt $\tilde{f}_{*j} \neq f_{*j}$

KLT - Rekonstruktionsfehler aufgrund Reduktion

Erhalt nur der p ersten Achsendimensionen

- Erwartungswert des quadrierten Fehlers:

$$R^2 = E\{\|\tilde{f}_{*j} - f_{*j}\|^2\}$$

- es gilt: $R^2 = \sum_{i=p+1}^m \lambda_i$