Multimedia Retrieval

4 Transforms for Feature Extraction

4.3 Principal Component Analysis

Prof. Dr. Marcin Grzegorzek

Research Group for Pattern Recognition
www.pr.informatik.uni-siegen.de

Institute for Vision and Graphics
University of Siegen, Germany

Table of Contents

Table of Contents

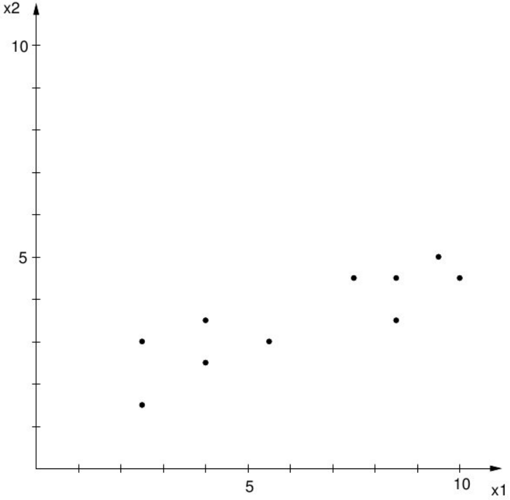
Table of Contents

Table of Contents

KLT - Allgemeines

- Minimalität und Orthogonalität innerhalb eines Medienobjekts (Fourier- & Wavelet-Transformation)
- Karhunen-Loeve-Transformation (KLT) für Minimalität und Orthogonalität bzgl. mehrerer Medienobjekten
- Analyse der Verteilungen der Feature-Werte mehrerer Medienobjekte
- Erkennung linearer Abhängigkeiten anhand erkannter *Achsen*
- andere Bezeichnung für KLT: Hauptachsentransformation (HAT), principal component analysis (PCA)

KLT - Lineare Abhängigkeit



KLT - Lineare Abhängigkeit und Minimalität

- lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz
  $\longrightarrow$ Verletzung der Forderung nach Minimalität
- Problem: Achsen oft nicht achsenparallel im Feature-Raum
- Idee der KLT: Verschiebung und Rotation des Feature-Raums
  $\longrightarrow$ Achsen entsprechen Feature-Dimensionen
  $\longrightarrow$ Erwartungswert ist Koordinatenursprung
- Entfernen von Achsen mit geringer Streuung

KLT - Erstellen der Kovarianzmatrix

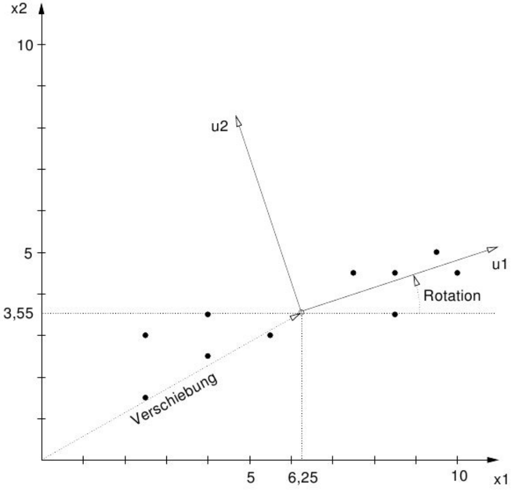
- Berechnung Kovarianzmatrix aus m-dimensionalen Feature-Vektoren
- $m \times m$-Kovarianzmatrix $\{S_{kl}^2\}$: Kovarianz zwischen Dimensionen k und l:
  - $0 \longrightarrow$ keine lineare Abhängigkeit
  - $> 0 \longrightarrow$ positive lineare Abhängigkeit
  - $< 0 \longrightarrow$ negative lineare Abhängigkeit
- Diagonalwerte entsprechen Varianzwerten einzelner Dimensionen
- Kovarianzmatrix ist symmetrisch
  $\longrightarrow$ Zerlegung in $U * L * U^T$ durch Lösen von Eigenwertproblem

KLT - Zerlegung

Kovarianzmatrix $= U * L * U^T$

- U enthält orthonormale Eigenvektoren (Achsen)
  $\longrightarrow$ Transformation in Eigenraum
- U^T entspricht Rücktransformation
- L ist Diagonalmatrix: Diagonalwerte sind Eigenwerte/Varianzwerte
  $\longrightarrow$ achsenparallele Skalierung im Eigenraum

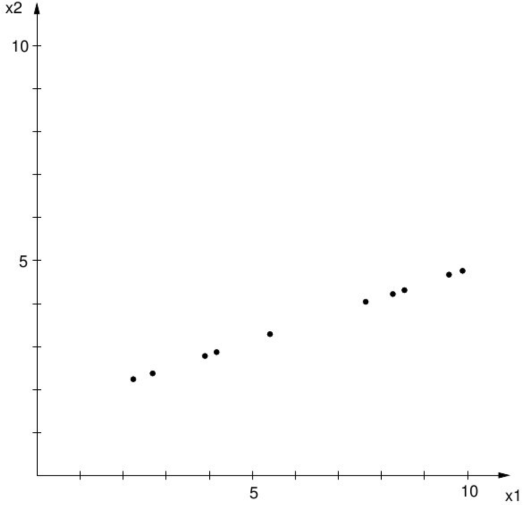
KLT - Zerlegung



KLT - Entfernen linearer Abhängigkeiten

- Transformation der Feature-Vektoren erzeugt achsenparallele Abhängigkeitsachsen
(Translation um negierten Mittelwertsvektor und Multiplikation mit U^T)
- Sortieren der Achsen nach Varianzwert
- Entfernen von Achsen mit geringer Varianz (unterhalb best. Schwellwert)
- Rücktransformation bedeutet Entfernen linearer Abhängigkeiten
(Multiplikation mit U und Translation um Mittelwertsvektor)
- Reduktionsfehler abhängig von Eigenwerten der entfernten Achsen $\longrightarrow$ Distanzen bleiben weitgehend erhalten

KLT - Entfernen linearer Abhängigkeiten



KLT - Bewertung

Vorteile der KLT

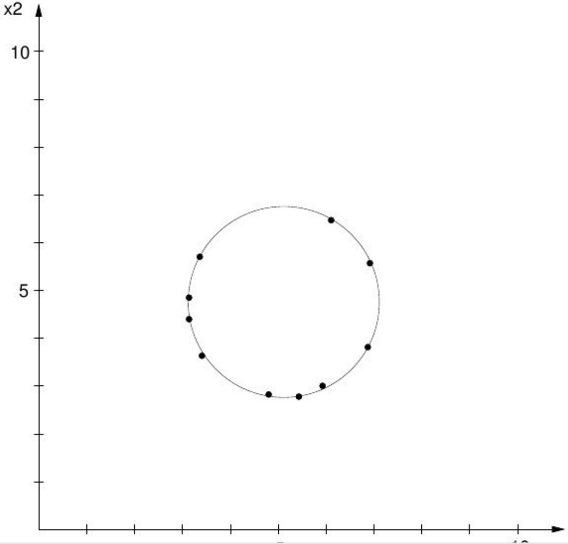
1. Orthogonalisierung:
   - lineare Abhängigkeiten werden entfernt
   - Werte der Achsendimensionen (inhärente Feature-Dimension) isoliert manipulierbar
     $\longrightarrow$ Trennung wesentlicher von unwesentlichen Dimensionen möglich
2. Minimierung: Entfernen unnötiger Dimensionen im Eigenraum
   $\longrightarrow$ minimaler Reduktionsfehler
3. Invarianzen: isolierte Analyse von linear wirkenden Invarianzen möglich

KLT - Bewertung

Probleme der KLT

- Berechnung auf Menge von Feature-Vektoren
  - Problem bei dynamischer Menge
  - Lösungsansatz: Verwendung statischer repräsentativer Untermenge
- nicht-lineare Abhängigkeiten nicht erkennbar
- orthogonale Achsen: nicht immer erwünscht
  Ausweg: ICA (independent component analysis)

KLT - Nicht-Lineare Abhängigkeiten



KLT - Berechnung

- Ausgangspunkt ist Menge von n m-dimensionalen Feature-Vektoren
  $\longrightarrow$ $m \times n$-Feature-Matrix $F = \{f_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Beispiel:
  $$F = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}5 & 4 & 4 & 5{,}5 & 7{,}5 & 8{,}5 & 8{,}5 & 9{,}5 & 10 \\ 1{,}5 & 3 & 3{,}5 & 2{,}5 & 3 & 4{,}5 & 4{,}5 & 3{,}5 & 5 & 4{,}5 \end{pmatrix}$$
- Mittelwertvektor: $\begin{pmatrix} \overline{f}_{1*} \\ \vdots \\ \overline{f}_{m*} \end{pmatrix}$ mit $\overline{f}_{i*} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}$
- Beispiel: $\begin{pmatrix} \overline{f}_{1*} \\ \overline{f}_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}25 \\ 3{,}55 \end{pmatrix}$

KLT - Berechnung

- Kovarianzmatrix: $S^2 = \{s_{kl}^2\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$s_{kl}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (f_{ki} - \overline{f}_{k*})(f_{li} - \overline{f}_{l*})$$

- Beispiel: $S^2 = \begin{pmatrix} 8{,}3472 & 2{,}6806 \\ 2{,}6806 & 1{,}1917 \end{pmatrix}$

KLT - Zerlegung der Kovarianzmatrix

da symmetrisch, Zerlegung anhand Eigenvektoren möglich:
$S^2 = U * L * U^T$

- L enthält Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$
- U ist orthonormal und Spaltenvektoren entsprechen den Achsen
- Durchführung Permutation der drei Matrizen, damit $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ gilt
- Beispiel:
  $U = \begin{pmatrix} 0{,}9488 & -0{,}316 \\ 0{,}316 & 0{,}9488 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 9{,}24 & 0 \\ 0 & 0{,}2989 \end{pmatrix}$

KLT - Transformation in den Achsenraum

Transformation von Feature-Vektor f_{*j}

- $f'_{*j} = U^T * \begin{pmatrix} f_{1j} - \overline{f}_{1*} \\ f_{2j} - \overline{f}_{2*} \\ \vdots \\ f_{mj} - \overline{f}_{m*} \end{pmatrix}$
- Beispiel: $F' =$
$\begin{pmatrix} -4{,}2 & -3{,}7 & -2{,}1 & -2{,}5 & -0{,}9 & 1{,}5 & 2{,}4 & 2{,}1 & 3{,}5 & 3{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}7 & -0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & -0{,}7 & 0{,}3 & -0{,}3 \end{pmatrix}$

KLT - Rücktransformation

$$f_{*j} = U * f'_{*j} + \begin{pmatrix} \overline{f}_{1*} \\ \overline{f}_{2*} \\ \vdots \\ \overline{f}_{m*} \end{pmatrix}$$

KLT - Entfernen von Dimensionen

- Entfernen von Achsendimensionen mit geringer Varianz
- Abschätzung über Anteil an Gesamtvarianz: $\texttt{Anteil}_i = \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j}$
- Beispiel: 1. Achse hat 97 Prozent und zweite Achse 3 Prozent $\longrightarrow$ Weglassen der zweiten Achsendimension
- f''_{*j} sei Ergebnis der Reduktion von f'_{*j}
- Rücktransformation von f''_{*j} erzeugt $\tilde{f}_{*j} \neq f_{*j}$

KLT - Rekonstruktionsfehler aufgrund Reduktion

Erhalt nur der p ersten Achsendimensionen

- Erwartungswert des quadrierten Fehlers: $R^2 = E\{\|\tilde{f}_{*j} - f_{*j}\|^2\}$
- es gilt: $R^2 = \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i$