

# Cyfrowe Przetwarzanie Obrazów

## Digital Image Processing



Aurelio A. Heckert

Copyright (c) 2008 Cezary Bołdak

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License"



## Wykład 5

# Morfologia matematyczna (mathematical morphology)



- **morfologia matematyczna** jest teoretycznym modelem przetwarzania obrazów cyfrowych w nieliniowy sposób
- swoje źródła ma w teorii zbiorów Minkowskiego (suma Minkowskiego), topologii
- podstawowe operacje:
  - **dylacja** (*dilation*),
  - **erozja** (*erosion*),
  - **szkieletyzacja** (*skeletonization*)
- pozostałe operacje:
  - **otwarcie** (*opening*),
  - **zamknięcie** (*closing*),
  - **zmniejszanie** (*shrinking*),
  - **ścienianie** (*thinning*),
  - **pogrubianie** (*thickening*),
  - **obcinanie** (*pruning*),
  - **transformata odległościowa** (*distance transform*)
- ma zastosowanie głównie do **obrazów binarnych**
- ale istnieje rozszerzenie dla obraz w skali szarości
- różne cele: filtracja obrazu, segmentacja, detekcja cech, ...
- swoje źródła ma we Francji



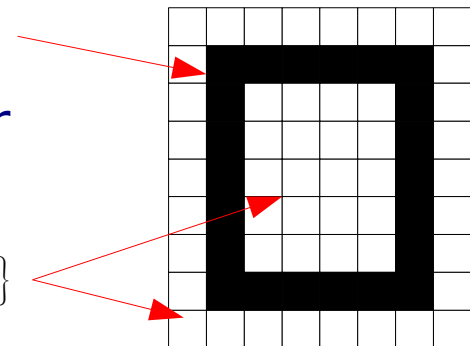
## Obraz binarny – tło i pierwszy plan (background, foreground)

- obraz cyfrowy, którego piksele mogą przyjmować tylko 2 wartości
  - (0,1), (0,255), (1,256), (-1,1), (True, False), ...
- jedna z wartości uznawana jest za tło, druga za pierwszy plan (obiekt w obrazie)
- kwestia umowna, który
  - tło: 0 (czarny), obiekt: 1(biały)
  - tło: 1 (biały), obiekt: 0(czarny) – tak będzie na wykładzie
- konwencji raz wybranej trzeba się trzymać
- **suportem** (wsparciem, *support*) nazywamy zbiór wszystkich pikseli o wartości odpowiadającej pierwszemu planowi

$$\text{supp}(I) = \{p = (x, y) \in I : I(p) = fg\}$$

- **dopełnieniem** (*complement*) suportu nazywamy zbiór wszystkich pozostałych pikseli (o wartościach tła)

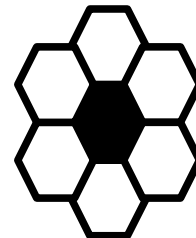
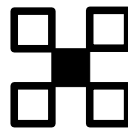
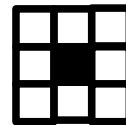
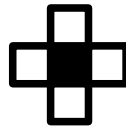
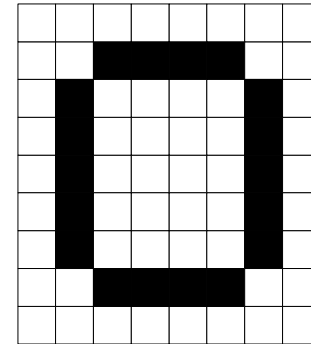
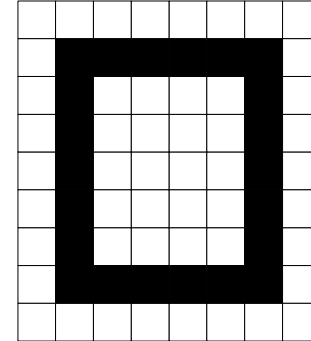
$$\{\text{supp}(I)\}^c = \{p = (x, y) \in I : I(p) = bg\}$$





## Pojęcie łączności

- Co właściwie przedstawia obraz obok ?
  - wszyscy się zgodzą, że na jasnym jest czarny prostokąt
  - obraz podzielony jest na 3 części:
    - zewnętrzne
    - wnętrze
    - kontur
- A kolejny obraz ?
  - jeden obiekt – prostokąt bez rogów ?
  - 4 linie ?
- Wszystko zależy od przyjętego kryterium łączności
  - łączność poczwórnej, (*4-connectivity*)
  - łączność ośmiokrotna (*8-connectivity*)
- można wyobrazić inne kryteria łączności, w innych topologiach:





## Suma Minkowskiego

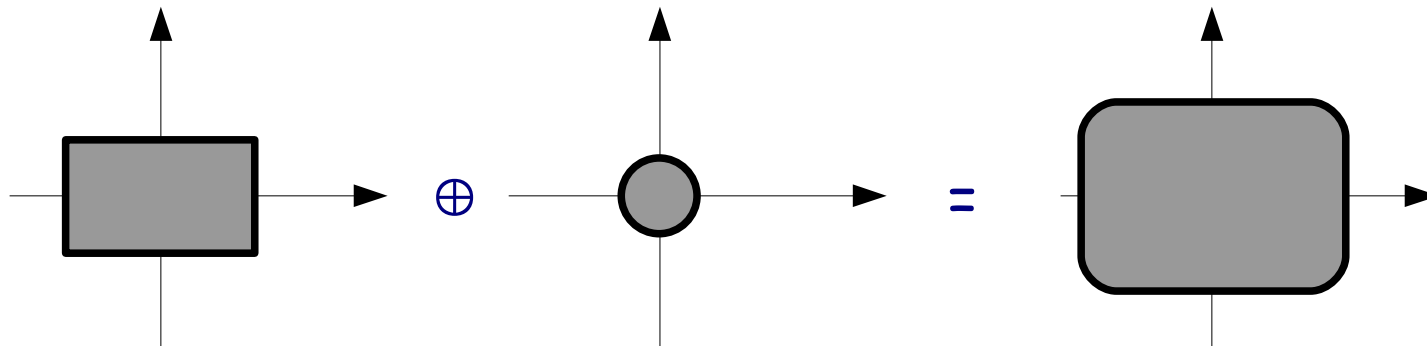
- określona na 2 zbiorach punktów (pikseli)

$$A \oplus B = \{p + q : p \in A \wedge q \in B\}$$

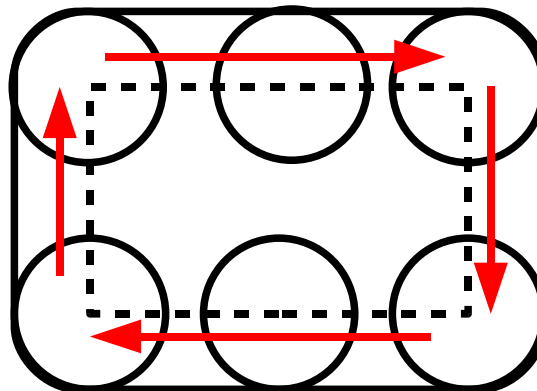
lub

$$A \oplus B = \{z \in \mathbb{R}^n : A \cap (z - B) \neq \emptyset\}$$

- przykład 2D



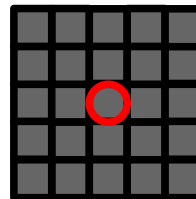
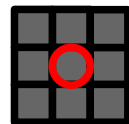
- sposób konstrukcji:



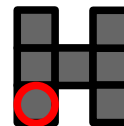
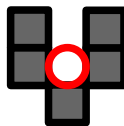
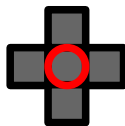


## Element strukturalny (SE, structural element)

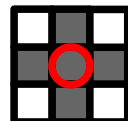
- w morfologii matematycznej operacje są dwuargumentowe:
  - pierwszym argumentem jest obraz do przetworzenia
  - drugim argumentem jest mniejszy obraz: element strukturalny
- element strukturalny jest dużej części zastosowań kwadratem o boku  $2N+1$  (3x3, 5x5) i wszystkich wartościach '1' (*foreground*)



- jeden punkt/piksel jest wyróżniony i nosi nazwę punktu centralnego lub początkowego (*origin*) – nie musi on leżeć w środku (choć b. często leży)
- element strukturalny może mieć inny kształt i położenie punktu początkowego:



- w niektórych zastosowaniach pewne piksele mogą mieć wartość tła

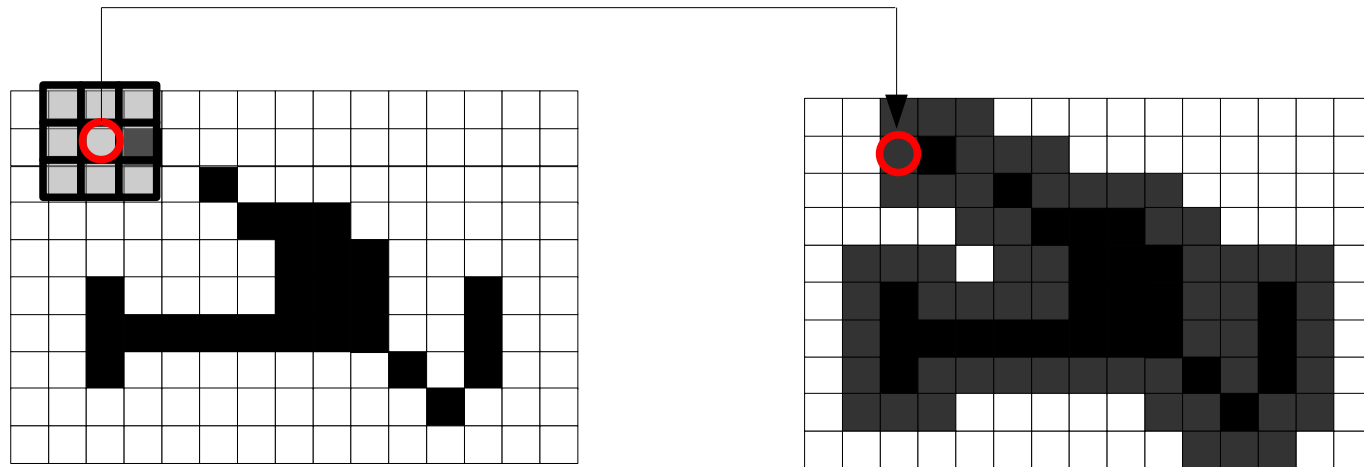




## Operator dylacji (dilation)

- operacja dylacji jest zastosowaniem sumy Minkowskiego do obrazów cyfrowych
- pierwszym argumentem jest obraz
- drugim element strukturalny
- zasada działania:
  - do każdego piksela obrazu przykładamy element strukturalny (SE) w jego punkcie centralnym
  - jeśli choć jeden piksel sąsiedztwa przykryty przez SE ma wartość '1', piksel bieżący też przyjmuje wartość '1' (obiektu pierwszoplanowego)

w otoczeniu zdefiniowanym przez SE jest co najmniej 1 piksel '1'



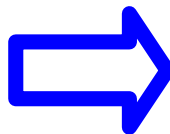
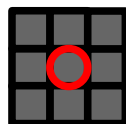




# Dylacja



- jednorodny SE 3x3
- jednokrotna dylacja

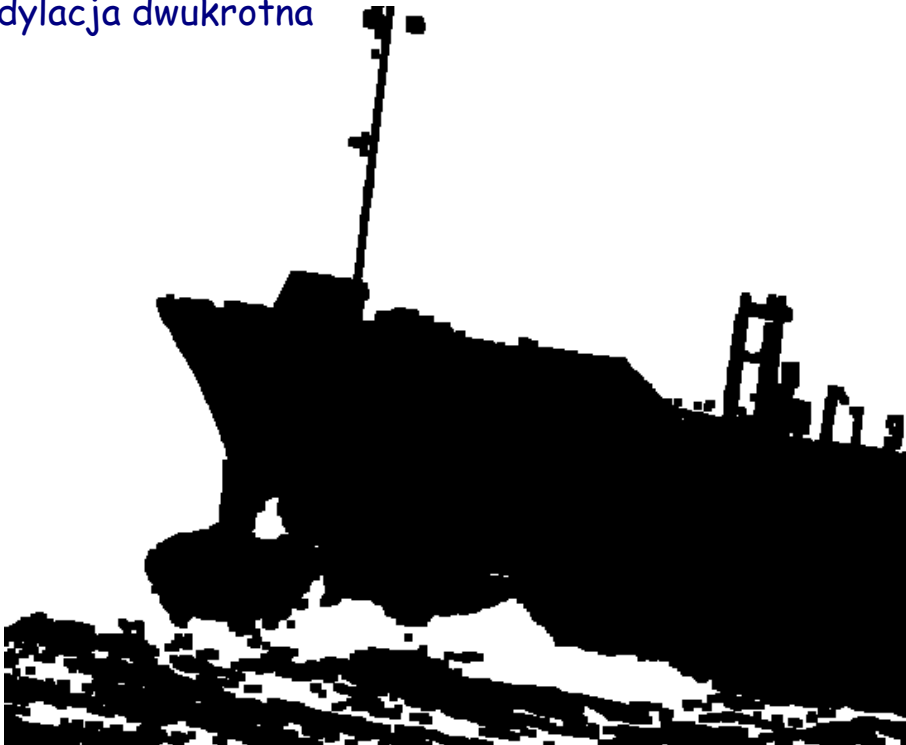




# Dylacja wielokrotna

- obiekty zwiększają rozmiary
- zanikają detale
- „dziury” są wypełniane
- obiekt staje się lepiej widoczny - rośnie

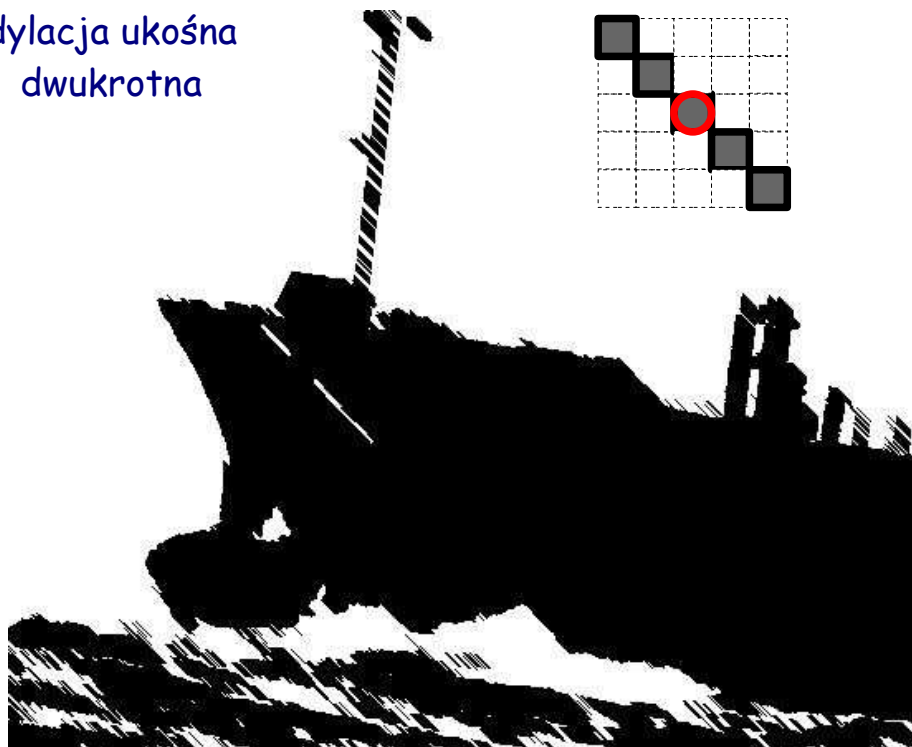
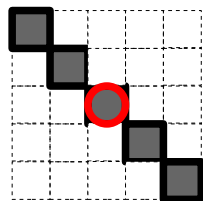
dylacja dwukrotna



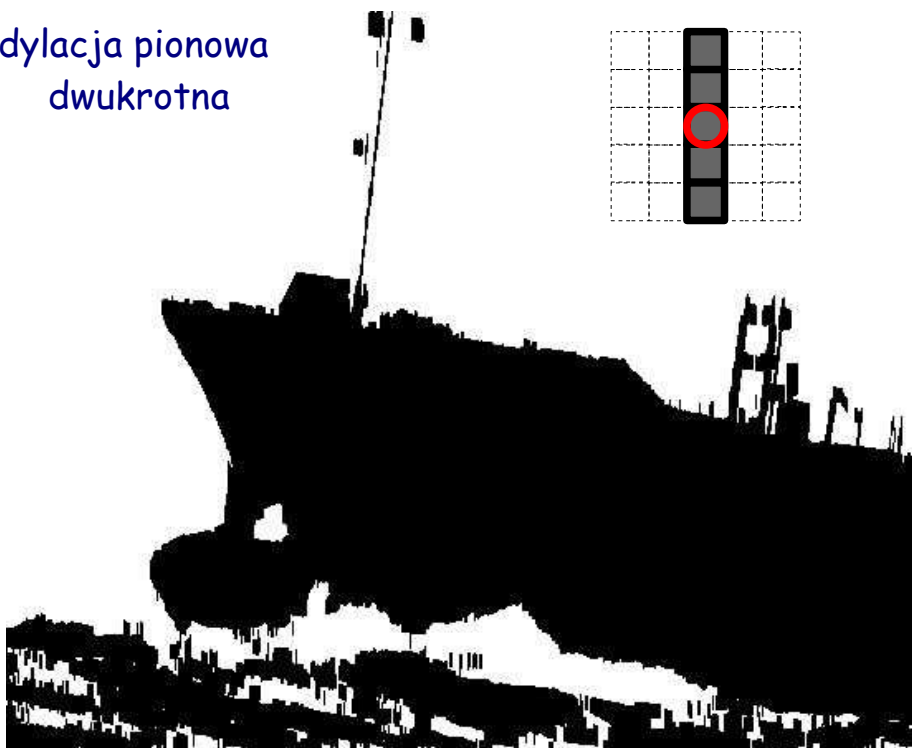
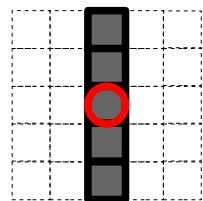
dylacja pięciokrotna



dylacja ukośna  
dwukrotna



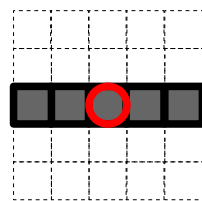
dylacja pionowa  
dwukrotna



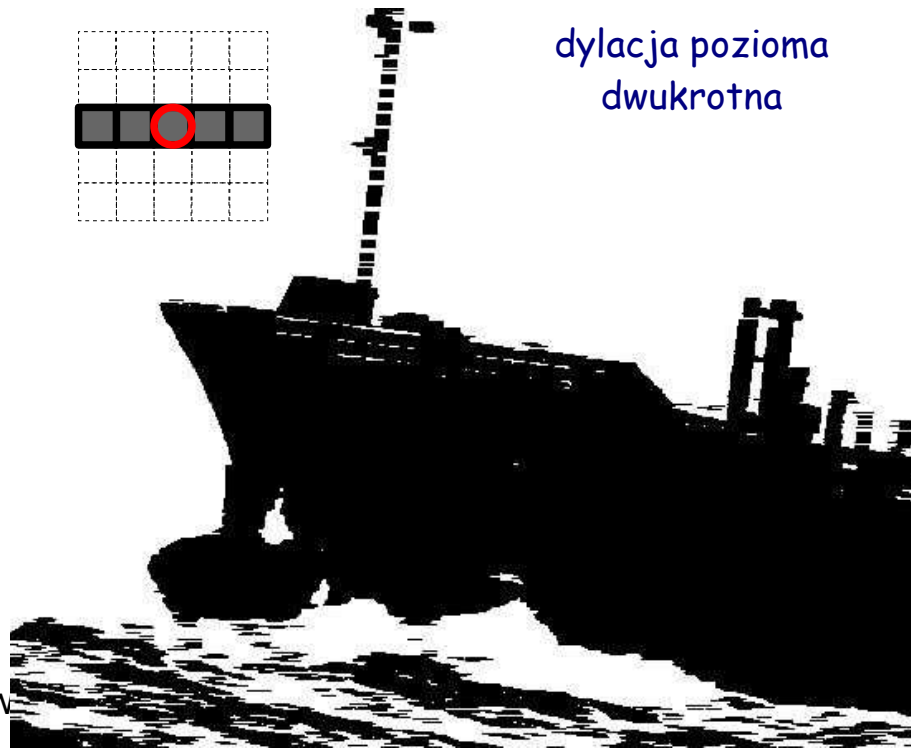
## Dylacja z niestandardowymi SE



- rozrost obiektu może być kierunkowy
- pozycja początkowa może nie leżeć w środku obszary – rozrost niesymetryczny



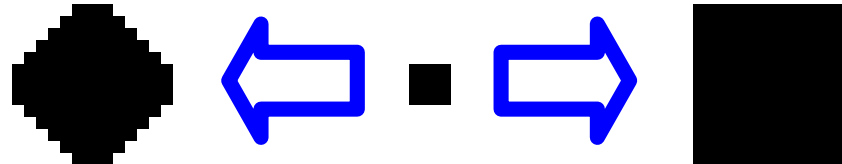
dylacja pozioma  
dwukrotna





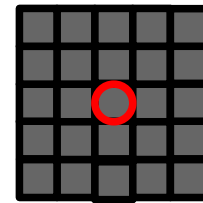
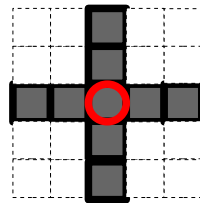
## Porównanie łączności 4-krotnej i 8-krotnej

dylacja pięciokrotna

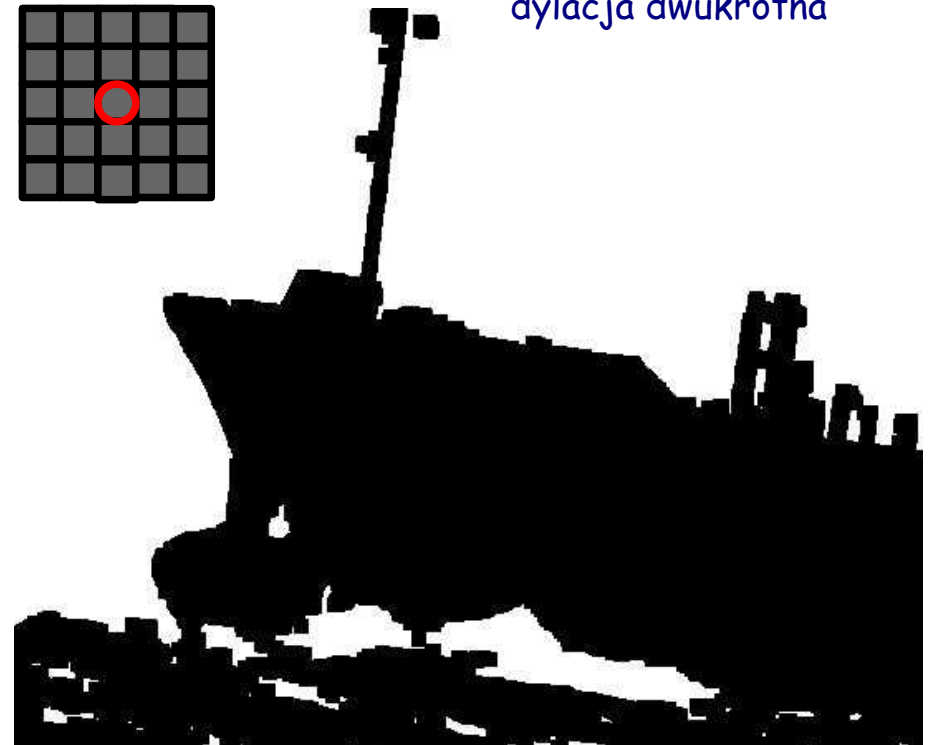
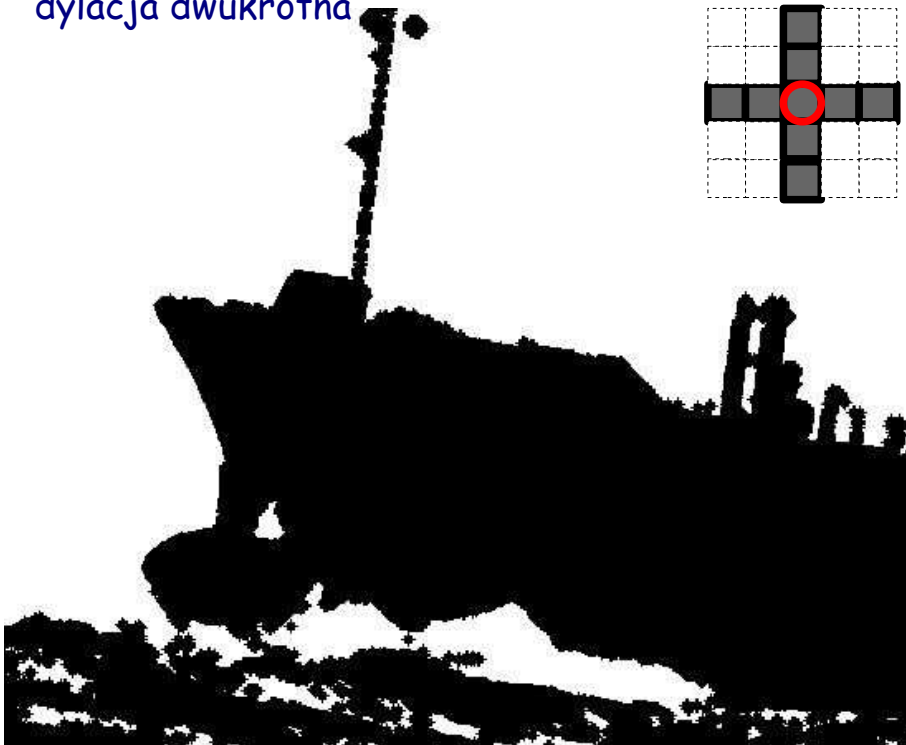


dylacja pięciokrotna

dylacja dwukrotna



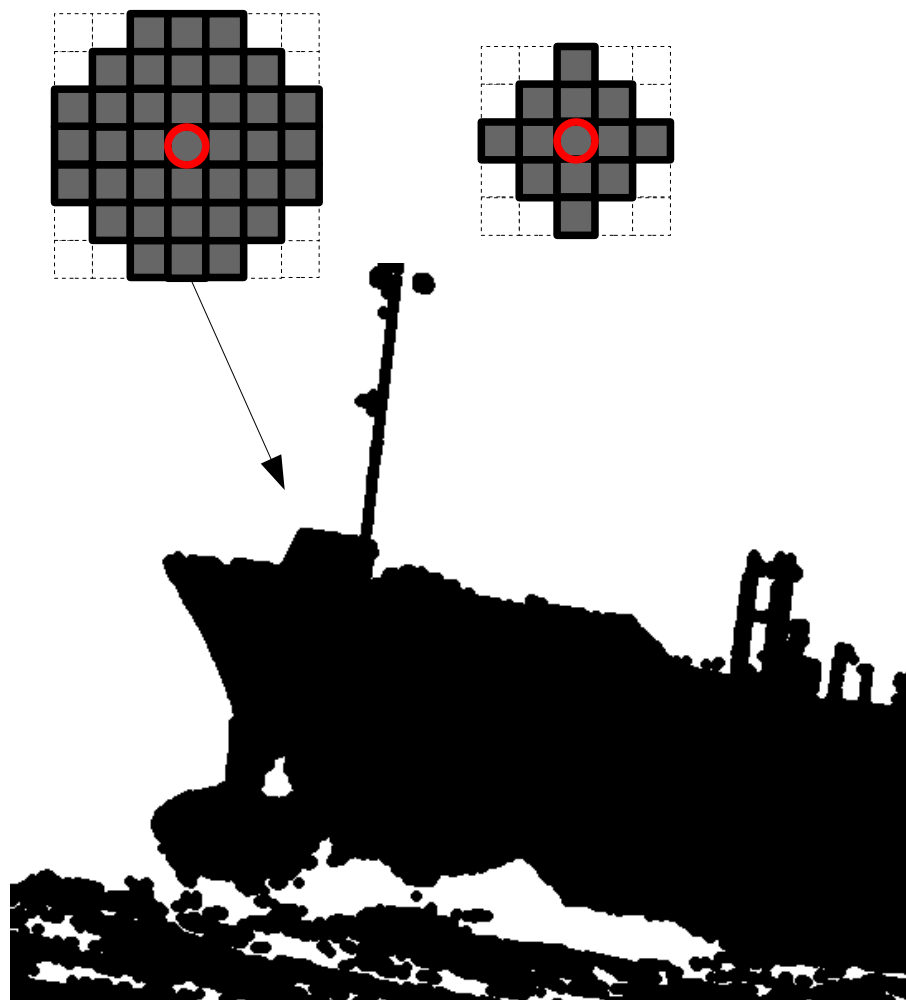
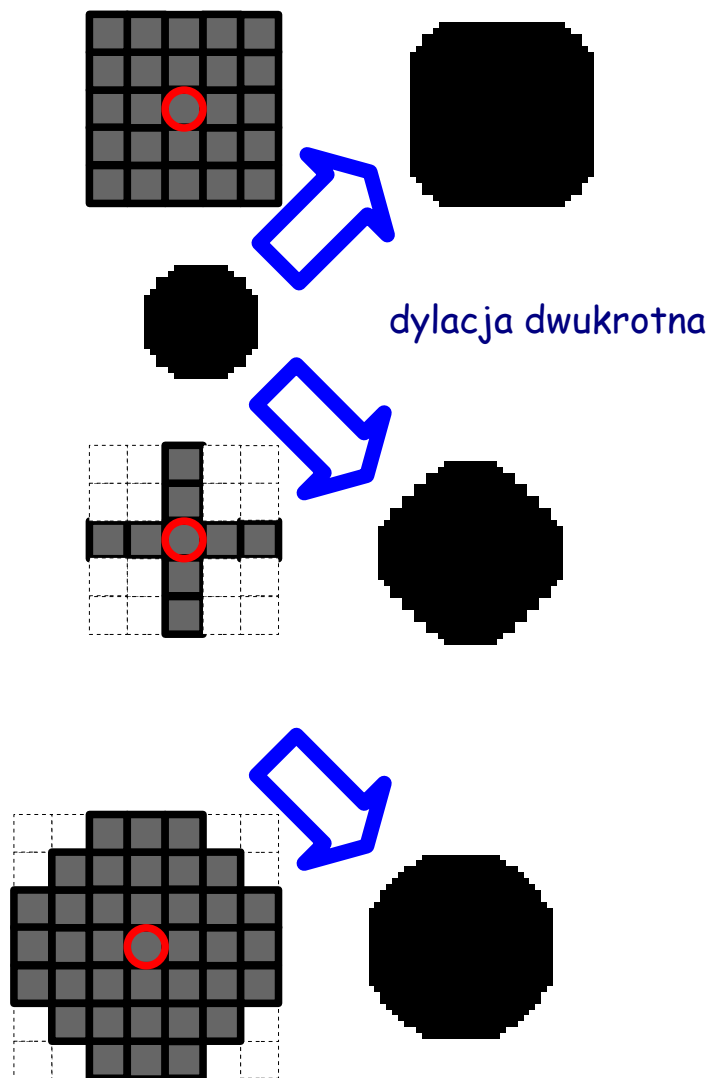
dylacja dwukrotna



# Problemy z zachowanie kształtów



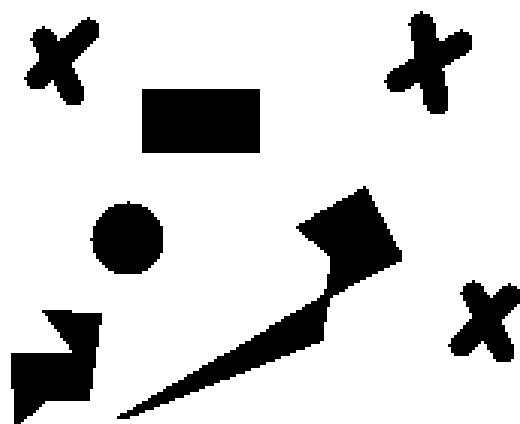
- duży wpływ kształtu SE na wynik dylacji
- neutralny SE – zbliżony do koła



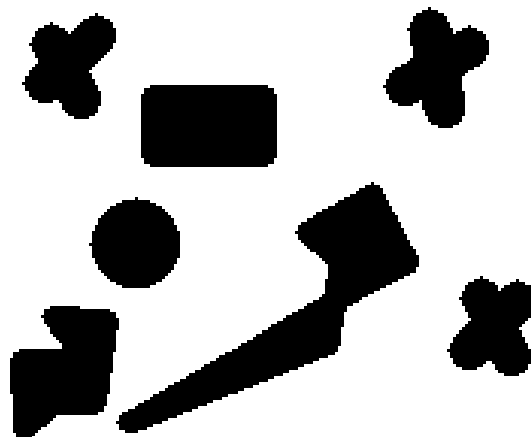
# Dylacja z „kołowym” SE



obraz oryginalny



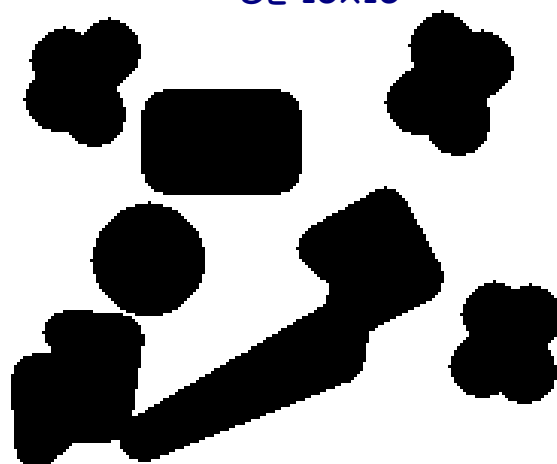
SE 7x7



SE 11x11



SE 15x15



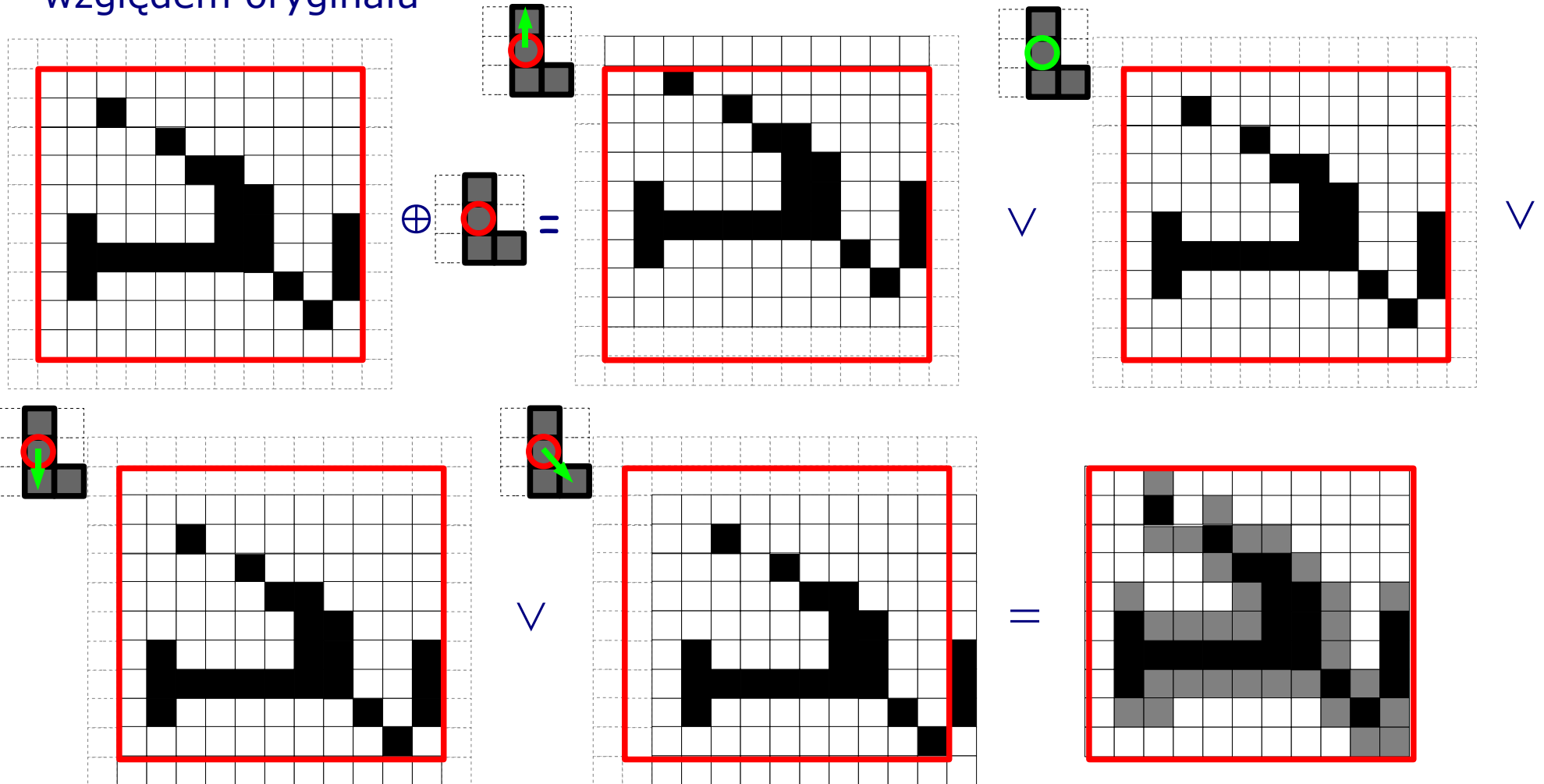
SE 21x21





# Efektywne liczenie dylacji

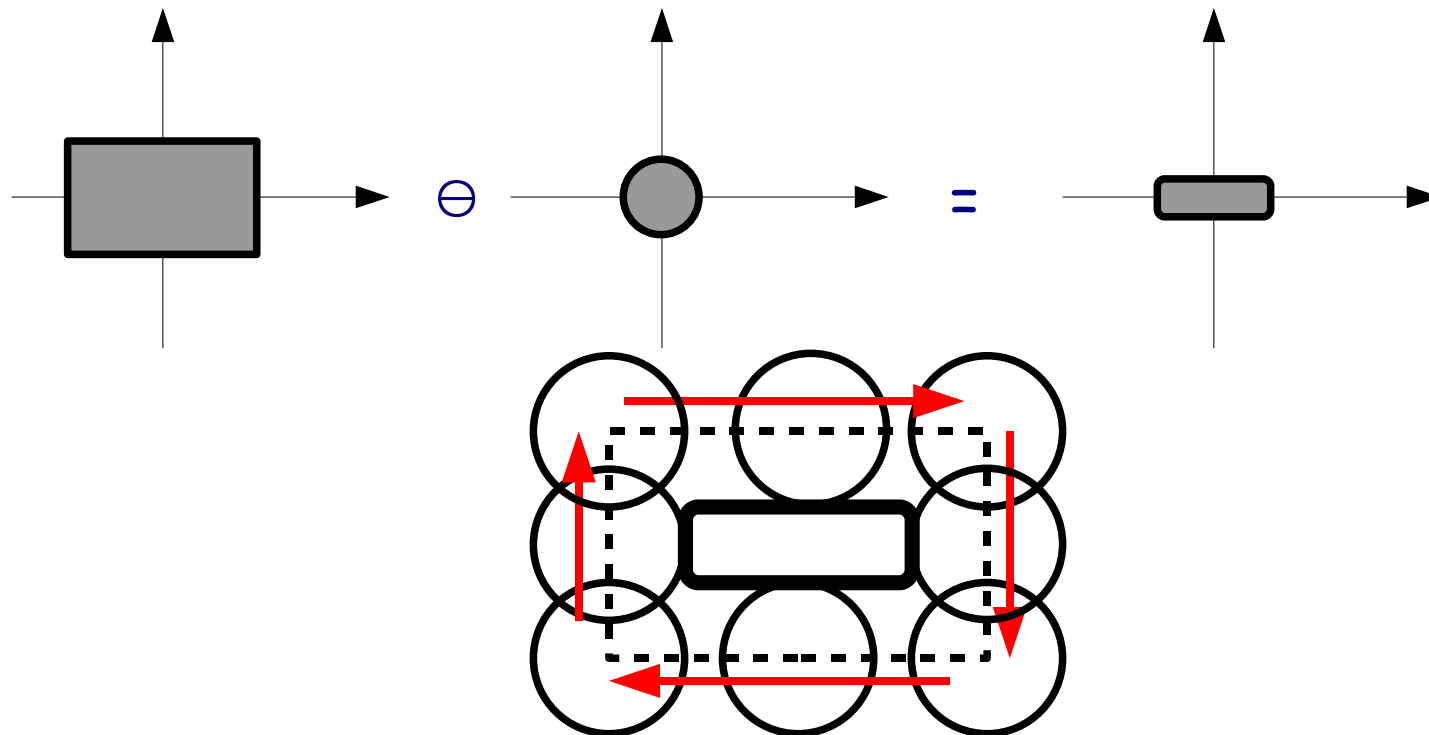
- schemat „przesuń i dodaj” (logiczne OR)
- obraz powiększa się o marginesy
- każdy piksel SE powoduje uwzględnienie jednego obrazu  $I'$  przesuniętego względem oryginału





## Operator erozji (erosion)

- analogiczny do dylacji
- pierwszym argumentem jest obraz, drugim element strukturalny
- zasada działania:
  - do każdego piksela obrazu przykładamy element strukturalny (SE) w jego punkcie centralnym
  - jeśli choć jeden piksel sąsiedztwa przykryty przez SE ma wartość '0', piksel bieżący też przyjmuje wartość '0' (tła)



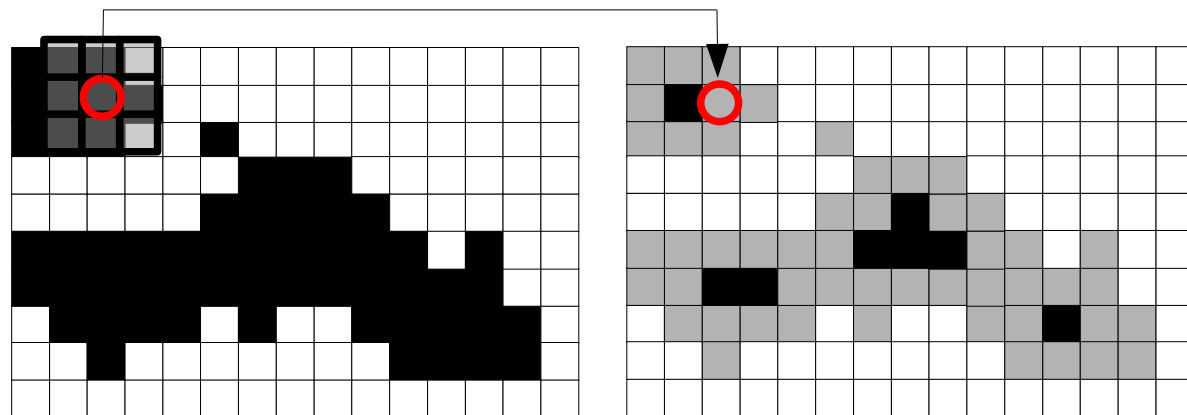




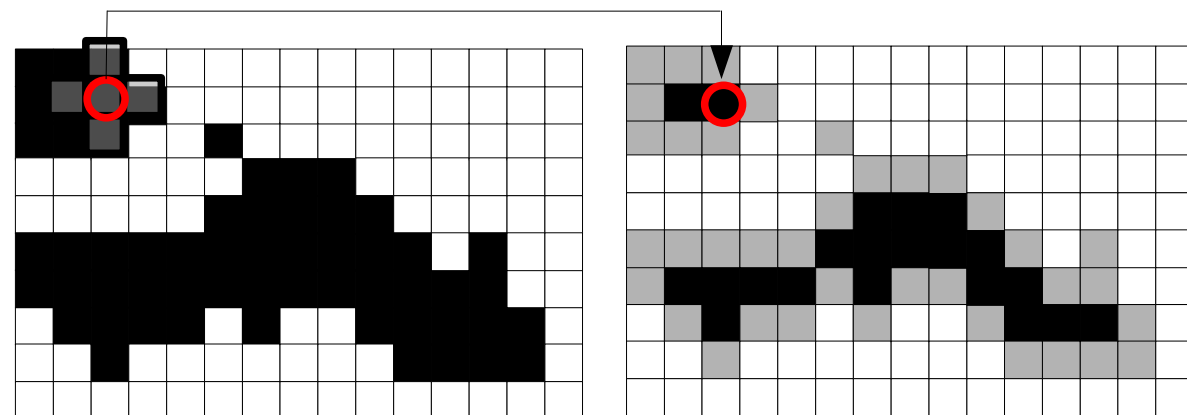
## Obliczanie erozji

- analogiczny do dylacji
- działanie zależy od kształtu elementu strukturalnego
  - łączność 4-krotna
  - łączność 8-krotna
- możliwość efektywnego obliczania erozji (jak dylacji): zamiast sumy logicznej (alternatywy) obrazów używamy iloczynu logicznego (koniunkcji)
- znika szum
- jednocześnie obiekt zmniejsza się
- niektóre gałęzie zanikają

w otoczeniu zdefiniowanym przez SE jest co najmniej 1 piksel '0'



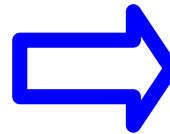
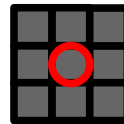
w otoczeniu zdefiniowanym przez SE nie ma żadnego piksela '0'





# Erozja

- jednorodny SE 3x3
- jednokrotna erozja





## Erozja wielokrotna

- obiekty zmniejszają rozmiary
- również zanikają detale, ale inaczej niż w dylacji
- „dziury” rozszerzają się
- obiekt znika
- widać wpływ kwadratowego SE: dziury mają podobny kształt

erozja dwukrotna

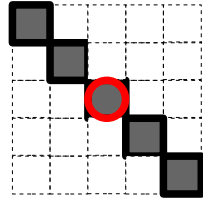


erozja pięciokrotna





erozja ukośna  
dwukrotna

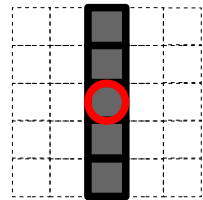


## Erozja kierunkowa

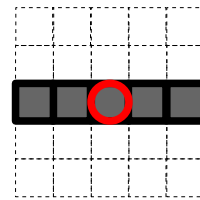
obraz oryginalny



erozja pionowa  
dwukrotna



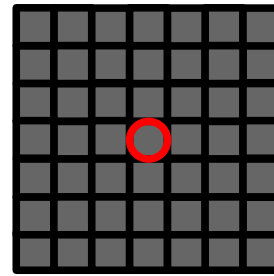
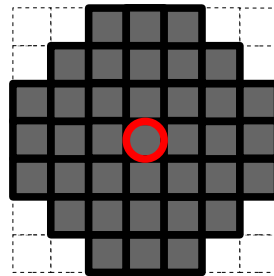
erozja pozioma  
dwukrotna





## Erozja z „kołowym” SE

- SE o kształcie zbliżonym do koła daje bardziej naturalne wyniki
- aby dobrze oddać kształt koła, SE musi mieć większy rozmiar
- większy rozmiar powoduje bardziej „drastyczną” erozję (dylację)



obraz oryginalny





## Wyodrębnianie granic obiektu

obraz 1. - początkowy



obraz 2. - po dylacji



(obraz 1. - obraz 2.) - granica zewnętrzna obiektu



# Wyodrębnianie granic obiektu



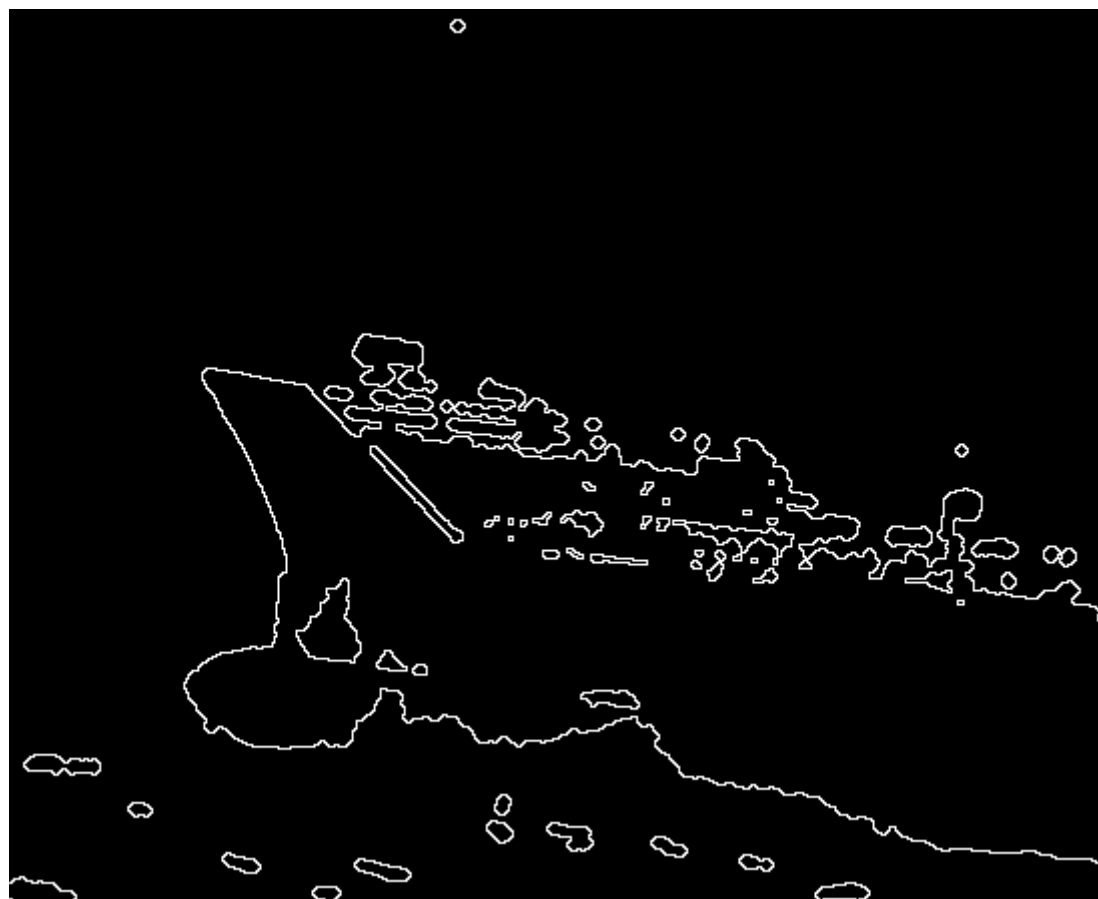
obraz 1. - początkowy



obraz 2. - po erozji



(obraz 1. - obraz 2.) - granica wewnętrzna obiektu





## Operacje złożone

- 2 poprzednie operacje (erozja i dylacja) zmieniały rozmiary obiektu
- miały też interesujące właściwości (usuwanie detali, szumu)
- 2 te operacje wykonane jedna po drugiej zachowują rozmiary obiektu:
  - **otwarcie morfologiczne (*opening*)** jest dylacją erozji

$$I \circ SE = (I \ominus SE) \oplus SE$$

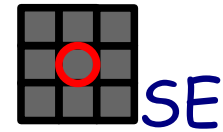
- **zamknięcie morfologiczne (*closing*)** jest erozją dylacji

$$I \bullet SE = (I \oplus SE) \ominus SE$$

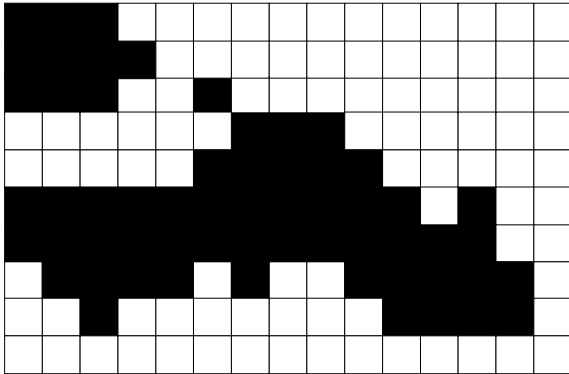
- elementy strukturalne w obu fazach operacji muszą być takie same



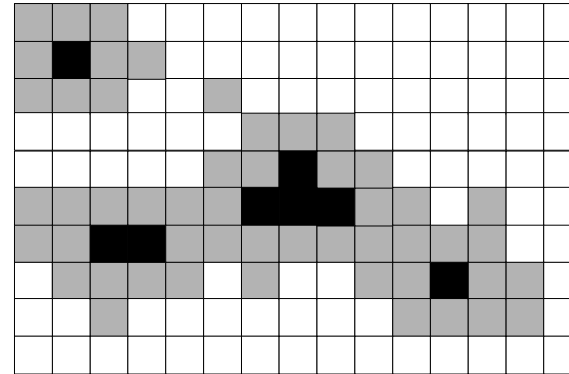
# Otwarcie morfologiczne



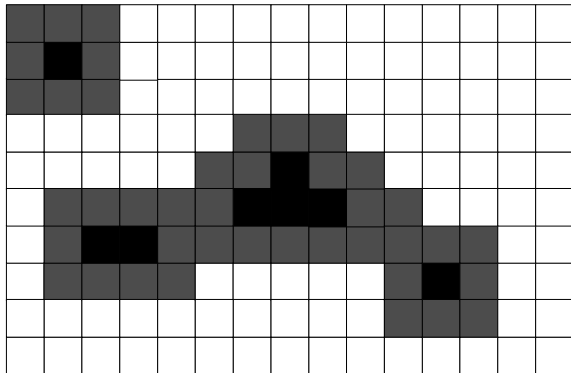
$I \circ SE =$



$\ominus) \oplus SE =$



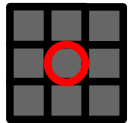
$\oplus SE =$



- obiekt zachował rozmiary
- wszystkie wystające fragmenty zostały usunięte
- właściwość idempotencji  
(kolejne otwarcia nie mają znaczenia):

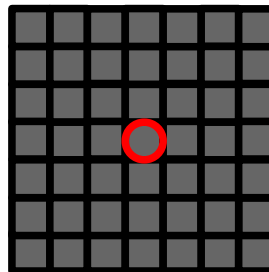
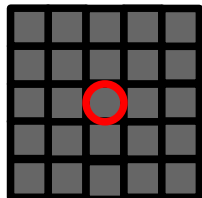
$$(I \circ SE) \circ SE = I \circ SE$$

# Wyniki otwarcia



- im większy rozmiar SE tym efekt usuwania detali silniejszy (znika więcej większych szczegółów)
- tym większy również wpływ kształtu SE (kwadratowe obszary)

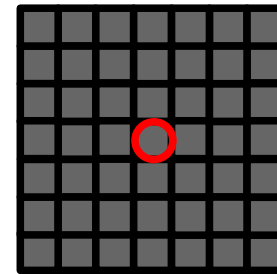
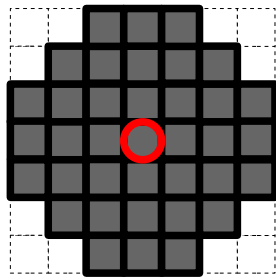
obraz oryginalny





## Otwarcie z „kołowym” SE

- tu również kształt SE zbliżony do koła daje bardziej naturalne wyniki
- szczegóły podobnej wielkości są usuwane z obu wyników, ale pozostałe obszary mają inny kształt



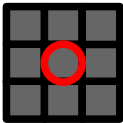


## Otwarcie „wielopoziomowe”

$$(I \ominus SE \ominus SE \ominus SE) \oplus SE \oplus SE \oplus SE$$

- kilkukrotne powtarzanie erozji a następnie dylacji ma ten same efekt co użycie większego SE

trzykrotna erozja, potem trzykrotna dylacja

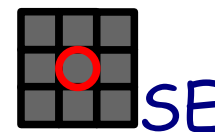


obraz oryginalny

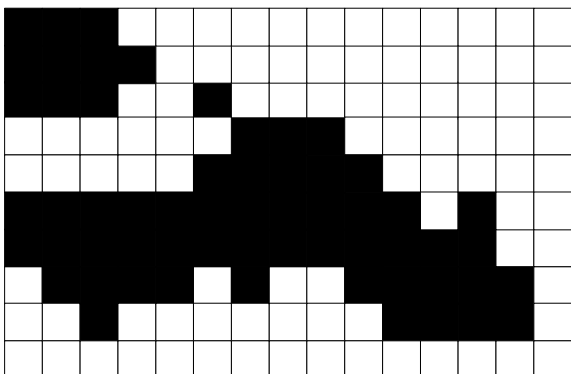
obraz po otwarciu z SE 7x7



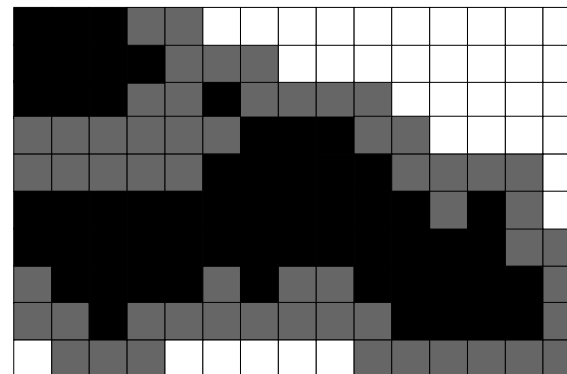
# Zamknięcie morfologiczne



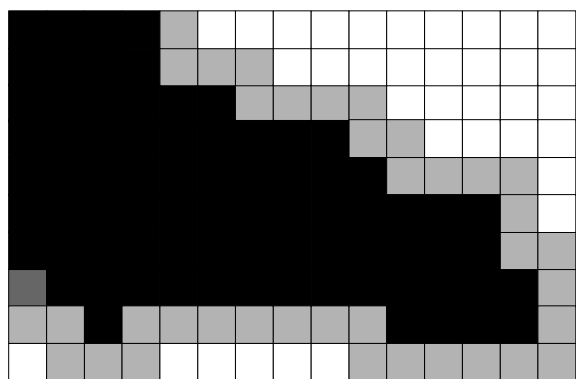
$I \bullet SE =$



$\oplus) \ominus SE =$



$\ominus SE =$

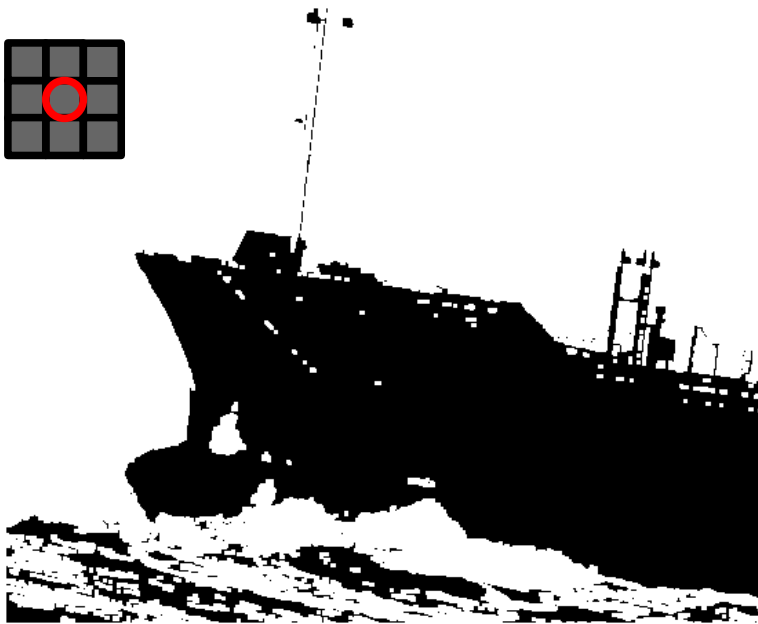
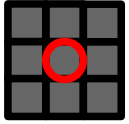


- obiekt zachował rozmiary
- wszystkie wklęsłe obszary zostały włączone do obiektu
- specjalne traktowanie brzegów (tu: obraz jest czasowo powiększany)
- właściwość idempotencji (kolejne otwarcia nie mają znaczenia):

$$(I \bullet SE) \bullet SE = I \bullet SE$$

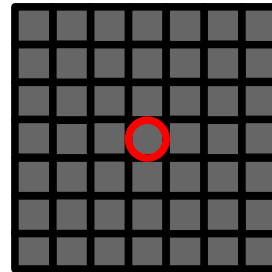
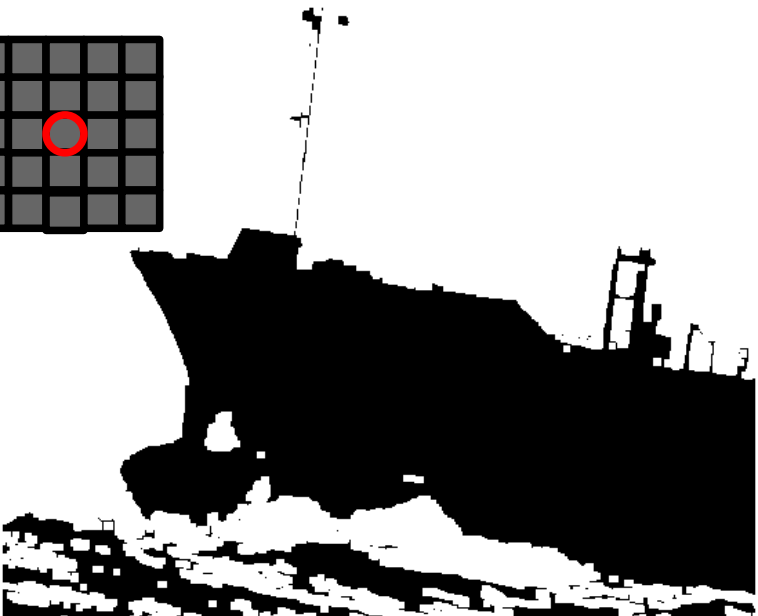
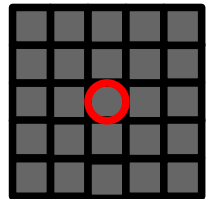


## Wyniki zamknięcia



- im większy rozmiar SE tym efekt usuwania detali silniejszy:
- tym większe „dziury” są wypełniane
- tym większy również wpływ kształtu SE (kwadratowe obszary)
- tym bliższe małe detale łączą się

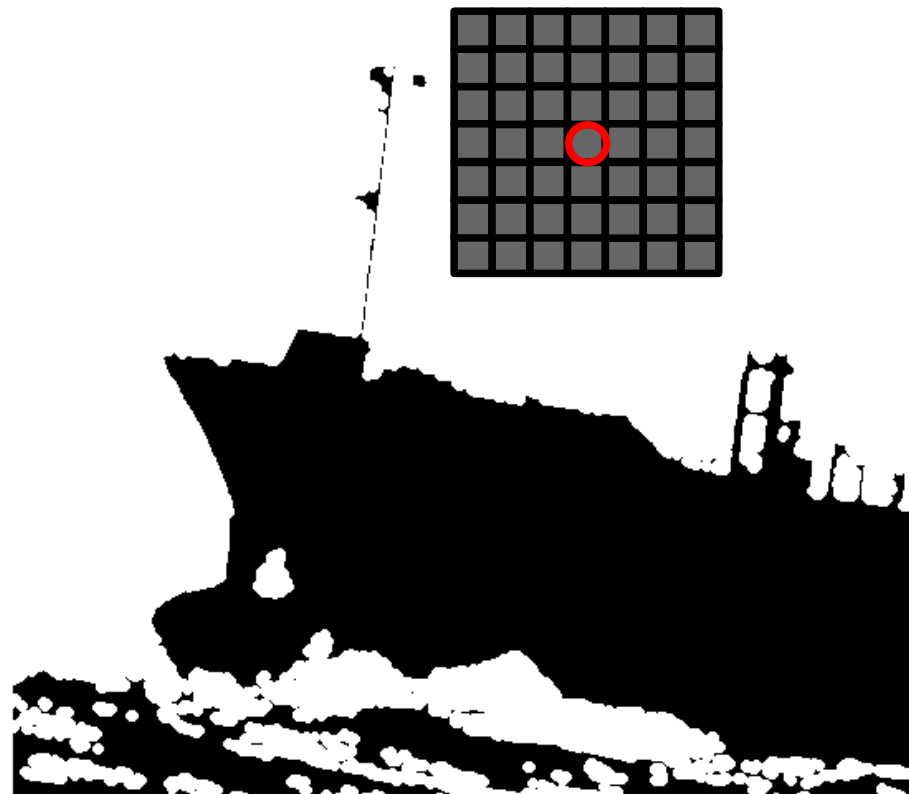
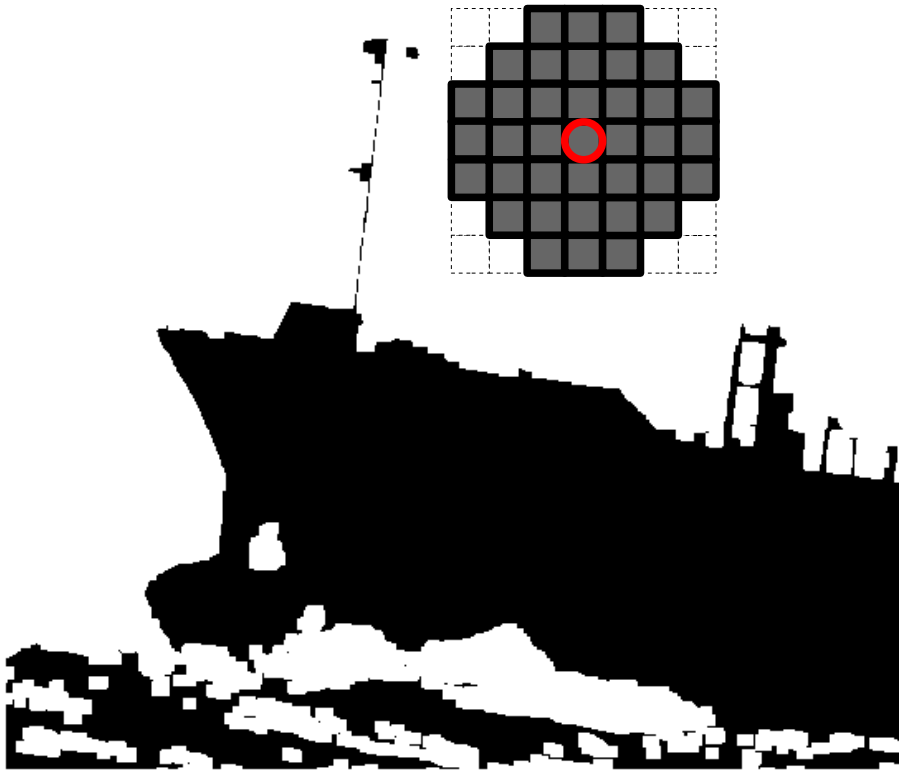
obraz oryginalny





## Zamknięcie z „kołowym” SE

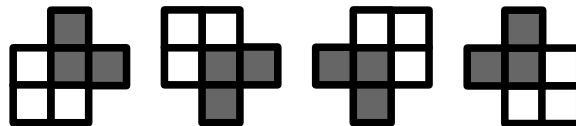
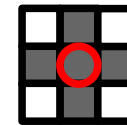
- tu również kształt SE zbliżony do koła daje bardziej naturalne wyniki
- szczegóły podobnej wielkości są usuwane z obu wyników, ale niewypełnione obszary mają inny kształt



# Operacja „Hit-and-Miss” („Hit-or-Miss”)

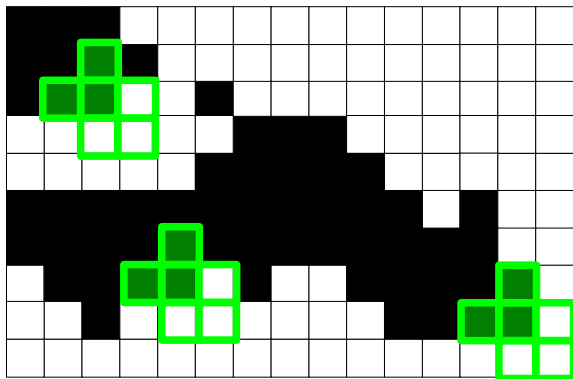


- bazowa operacja morfologii matematycznej
- z niej można wywieść wszystkie inne
- element strukturalny ma tu 3 rodzaje pól/pikseli:
  - piksele obiektu ('1')
  - piksele tła ('0')
  - piksele nieokreślone – niebrane pod uwagę
- obraz wejściowy jest przeglądany piksel po pikselu, jeśli konfiguracja pikseli sąsiednich jest identyczna jak w SE, jest on ustawiany na wartość '1' ('0'), w przeciwnym przypadku na '0' ('1')
- aby wykryć daną cechę wyniki kilku SE mogą się sumować/mnożyć

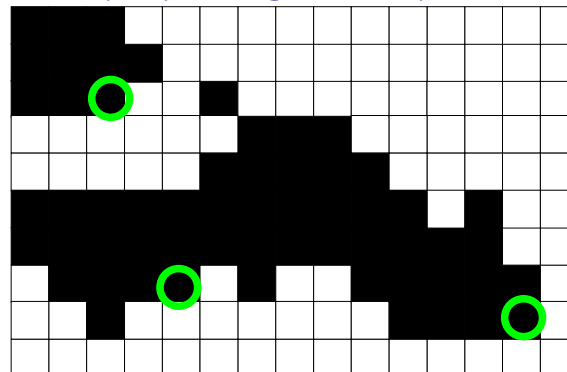


grupa SE wykrywająca rogi

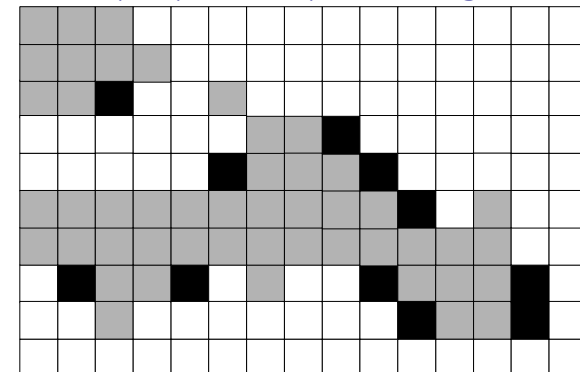
dopasowanie SE rogu dolnego-prawego



wykryte rogi dolne-prawe



wykryte wszystkie rogi

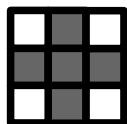




## Operacja „Hit-and-Miss”



- rezultat operacji może być bardziej złożony, jeśli porównanie się powiedzie, analizowany piksel może:
  - przyjąć wartość '1' – operacje addytywne
  - przyjąć wartość '0' – operacje substraktywne
  - zachować swoją oryginalną wartość
- dla SE 3x3 może być  $2^9=512$  różnych możliwych SE, dla 5x5 –  $2^{25}$
- operacja **erozji**: przyporządkowanie wartości '1' dla jednej kombinacji SE (same piksele '1' w otoczeniu) i wartości '0' dla 511 pozostałych
- operacja **dylacji**: przyporządkowanie wartości '0' dla jednej kombinacji SE (same piksele '0' w otoczeniu) i wartości '1' dla 511 pozostałych
- zwykle jednej logicznej kombinacji/konfiguracji do wykrycia odpowiada wiele konkretnych SE  $\Rightarrow$  buduje się warunki logiczne które je zastępują:



$$X_0 \rightarrow X_0 \wedge X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3 \wedge \neg X_4 \wedge X_5 \wedge \neg X_6 \wedge X_7 \wedge \neg X_8$$

usunięcie czarnego piksela ('1') otoczonego przez 8 białych ('0')

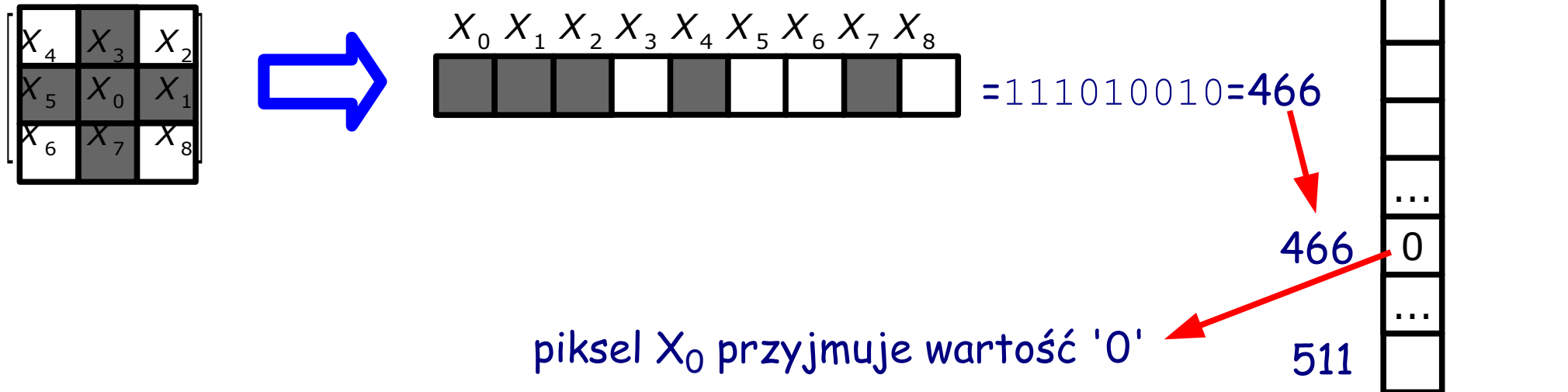
$$X_0 \rightarrow X_0 \wedge (X_1 \text{ lub } X_2 \text{ lub } X_3 \text{ lub } X_4 \text{ lub } X_5 \text{ lub } X_6 \text{ lub } X_7 \text{ lub } X_8)$$

$$\begin{bmatrix} X_4 & X_3 & X_2 \\ X_5 & X_0 & X_1 \\ X_6 & X_7 & X_8 \end{bmatrix}$$



## „Hit-and-Miss” za pomocą LUT

- każde blok obrazu kodowany jest za pomocą liczby od 0 do 511 wg pikseli traktowanych jako pozycje bitowe
- w tablicy LUT zapisany jest wynik operacji „Hit-and-Miss”
- znaczne przyspieszenie czasu operacji





## Operacje „większość białych” i „większość czarnych”

- w blokach 3x3 liczy się, ile jest pikseli czarnych i białych ('1' i '0')
- piksel centralny przyjmuje taką wartość, jaka jest większość w jego sąsiedztwie
- zbliżone w działaniu do erozji i dylacji



## Operacje pogrubiania (thickening, fattening)

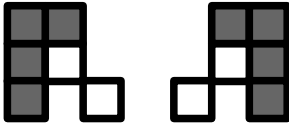
- obiekt jest zwiększany, podobnie jak w dylacji i otwarciu
- nakładanych jest szereg warunków, aby oddzielne obiekty nie połączyły się
- oparty jest na operacji „hit-and-miss”

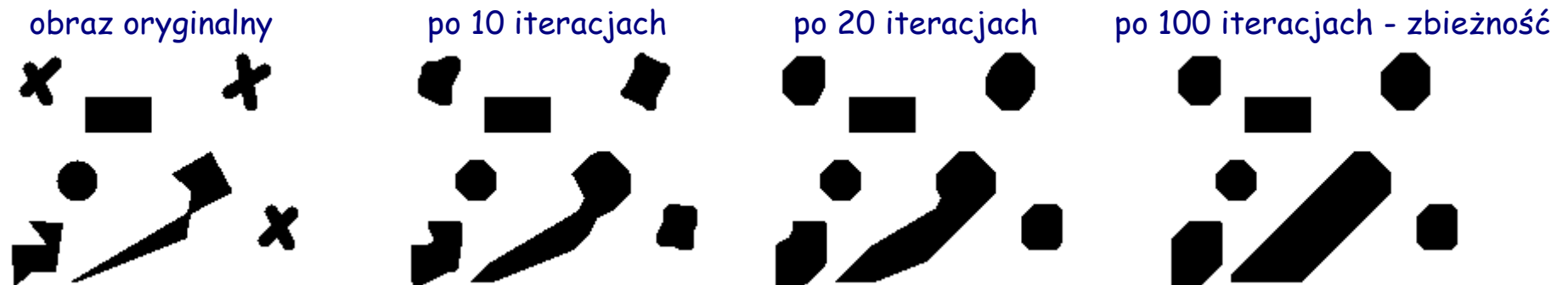
$$\text{pogrubienie}(I, SE) = I \cup \text{hit-and-miss}(I, SE)$$

- zamiast jednego SE używana jest ich cała kolekcja
- piksel centralny SE zawsze jest równy zero
- czasami wyróżnia się 2 podoperacje, z angielskiego nazywane:
  - *fattening* – proste pogrubianie, oparte na kilku SE, w pewnych konfiguracjach obiekty mogą się połączyć
  - *thickening* – bardziej zaawansowana technika, pozbawiona wad poprzedniej



## Operacja pogrubiania – wypukły kształt (convex hull)

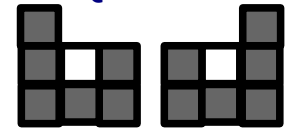
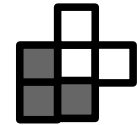
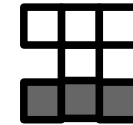
- celem jest znalezienie wypukłej otoczki obiektów
- używanych jest 8 SE:
  - 2 wzorcowe: 
  - po 3 SE z każdego wzorcowego obrócone o 90, 180, 270 stopni
- procedura iteracyjna: po osiągnięciu zbieżności kolejne iteracje nie zmieniają wyniku (procedura zatrzymuje się sama)



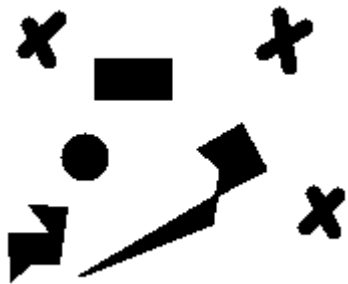


## Operacja pogrubiania – szkielet strefy wpływu (SKIZ – skeleton by zone of influence)

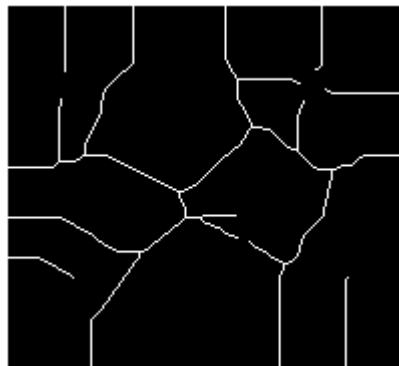
- celem jest znalezienie rozgraniczenia obiektów
- inna nazwa – **diagram Voronoi**
- procedura 2-etapowa:
  - rozrost obiektów – 8 SE powstałych z obrotów 2S E:  
(aby uniknąć połączenia 2 obiektów każdy z 8 SE jest analizowany o oddzielnym przejściu przez wszystkie piksele obrazu !!!)
  - pruning – dalszy rozrost aby zlikwidować wszystkie niezamknięte kontury  
(na tej samej zasadzie – 8 SE powstałe z 2 następujących:
- procedura złożona obliczeniowo
- po osiągnięciu zbieżności kolejne iteracje nie zmieniają wyniku  
(procedura zatrzymuje się sama)



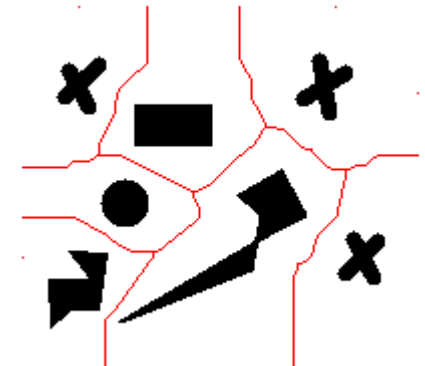
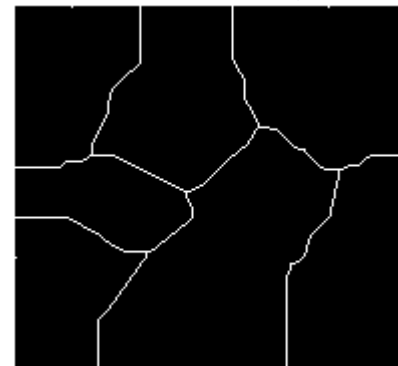
obraz oryginalny



rozrost obiektów  
(ok 130 iteracji)



pruning  
(ok 30 iteracji)



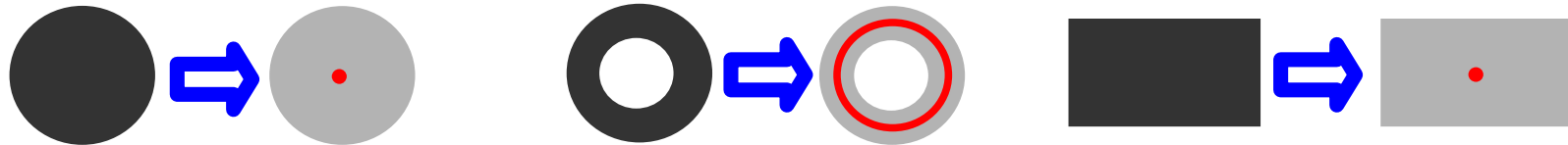


## Operacje pocieniania (thinning)

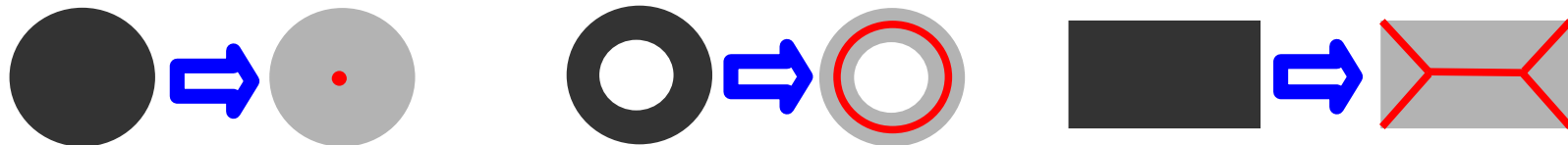
- obiekt jest zmniejszany, podobnie jak w erozji i zamknięciu
- nakładanych jest szereg warunków, aby obiekty nie zanikły
- oparty jest na operacji „hit-and-miss”

$$\text{pocienienie}(I, SE) = I - \text{hit-and-miss}(I, SE)$$

- zamiast jednego SE używana jest ich cała kolekcja
- piksel centralny SE zawsze jest równy jeden
- czasami wyróżnia się 2 podoperacje, z angielskiego nazywane:
  - *shrinking* – obiekty zanikają bez dziur zanikają do pojedynczego punktu  
obiekty z dziurami do zamkniętych krzywych



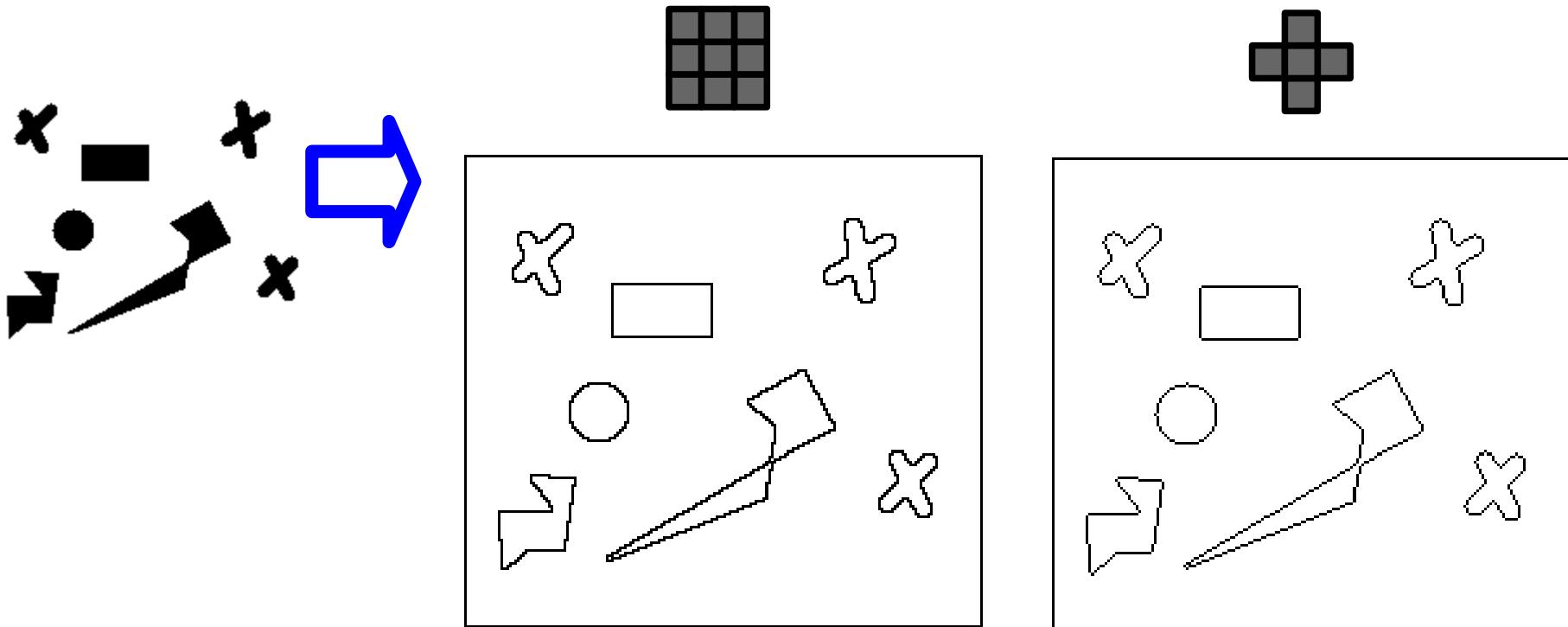
- *thinning* – obiekty zanikają do swoich szkieletów (szkieletyzacja)





## Operacje pocieniania - znajdowanie krawędzi obiektu

- celem jest znalezienie otoczki obiektu
- iteracyjne zmniejszanie obiektów 2 SE do wyboru (łączność 4-krotna lub 8-krotna)
- po osiągnięciu zbieżności kolejne iteracje nie zmieniają wyniku (procedura zatrzymuje się sama)

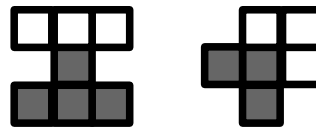






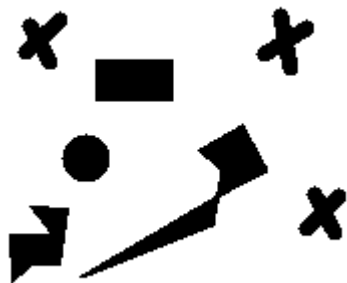
## Operacje pocieniania - znajdowanie szkieletu obiektu

- celem jest znalezienie szkieletu obiektu – linii reprezentujących obiekt
- iteracyjne zmniejszanie obiektów – 8 SE powstałych z obrotów 2 SE:

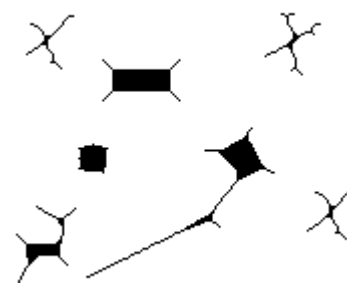


- aby uniknąć jednoczesnego usunięcia 2 ostatnich pikseli przez 2 różne SE, każdy z 8 SE jest stosowany w oddzielnym przejściu przez wszystkie piksele obrazu !!! (każda iteracja kryje w sobie 8 kompletnych iteracji)
- po osiągnięciu zbieżności kolejne iteracje nie zmieniają wyniku (procedura zatrzymuje się sama)

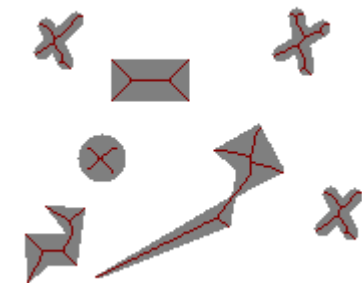
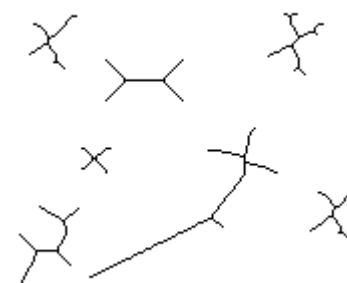
obraz oryginalny



po 5 iteracjach



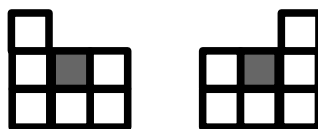
po 20 iteracjach



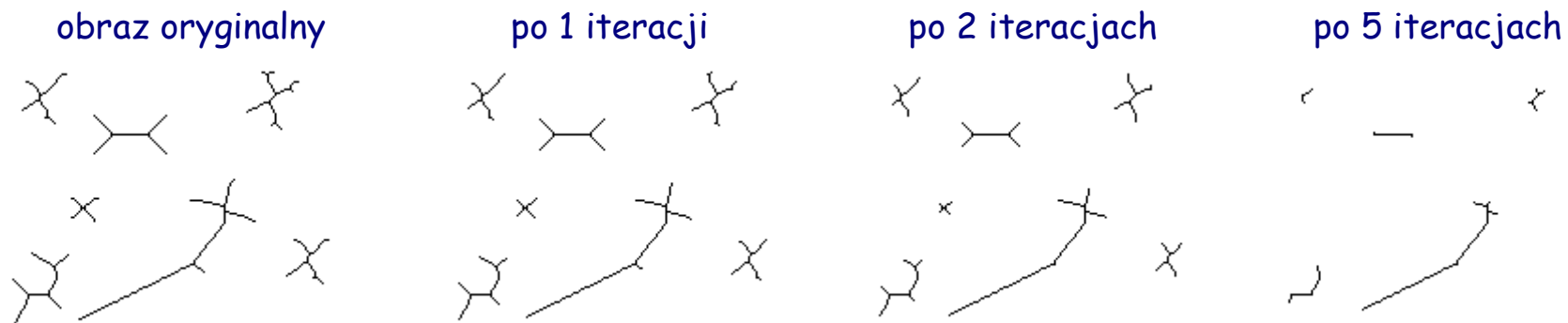


## Operacje pocieniania – pruning (przycięcie)

- celem jest znalezienie i oczyszczenie szkieletu z krótkich „odnóg”
- iteracyjne zmniejszanie obiektów – 8 SE powstałych z obrotów 2 SE:



- aby uniknąć jednoczesnego usunięcia 2 ostatnich pikseli przez 2 różne SE, każdy z 8 SE jest stosowany w oddzielnym przejściu przez wszystkie piksele obrazu !!! (każda iteracja kryje w sobie 8 kompletnych iteracji)
- procedura wykonywana określoną liczbę kroków – dostateczna liczba iteracji usunie wszystkie otwarte linie !!!



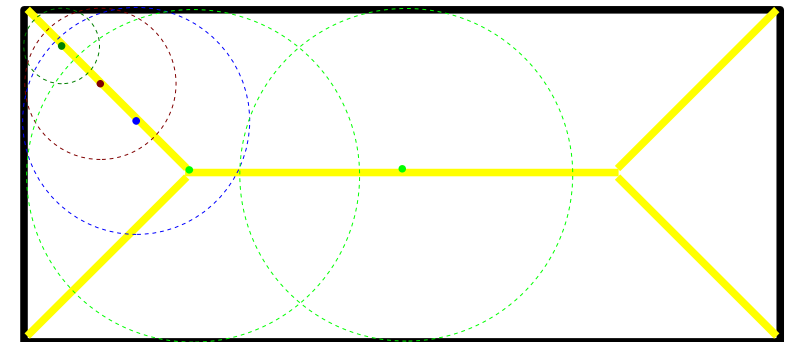


# Szkieletyzacja

- szkielet jest to liniowa reprezentacja obiektu
- linie powinny dobrze obrazować wnętrze obiektu (leżeć w równej odległości od brzegów)
- można sobie wyobrazić: obiekt powoli spalany począwszy od wszystkich swoich brzegów – punkty, do których linia ognia dojdzie z co najmniej 2 kierunków uznaje się za punkty szkieletu:



- inna interpretacja:  
zbiór środków okręgów stycznych  
w co najmniej 2 punktach do krawędzi obiektu:

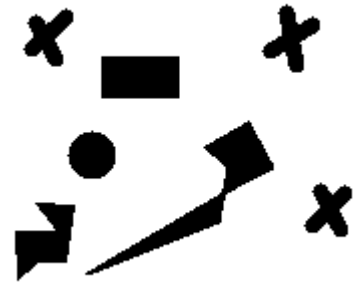


- w zasadzie są 2 rodzaje szkieletu:
  - **szkielet binarny** – obliczany przez pocienianie obiektu
  - szkielet, którego piksele mają wartość proporcjonalną do odległości od krawędzi obiektu – **MAT (Medial Axis Transform)** – obliczany jest przez **transformatę odległościową**



## Transformata odległościowa

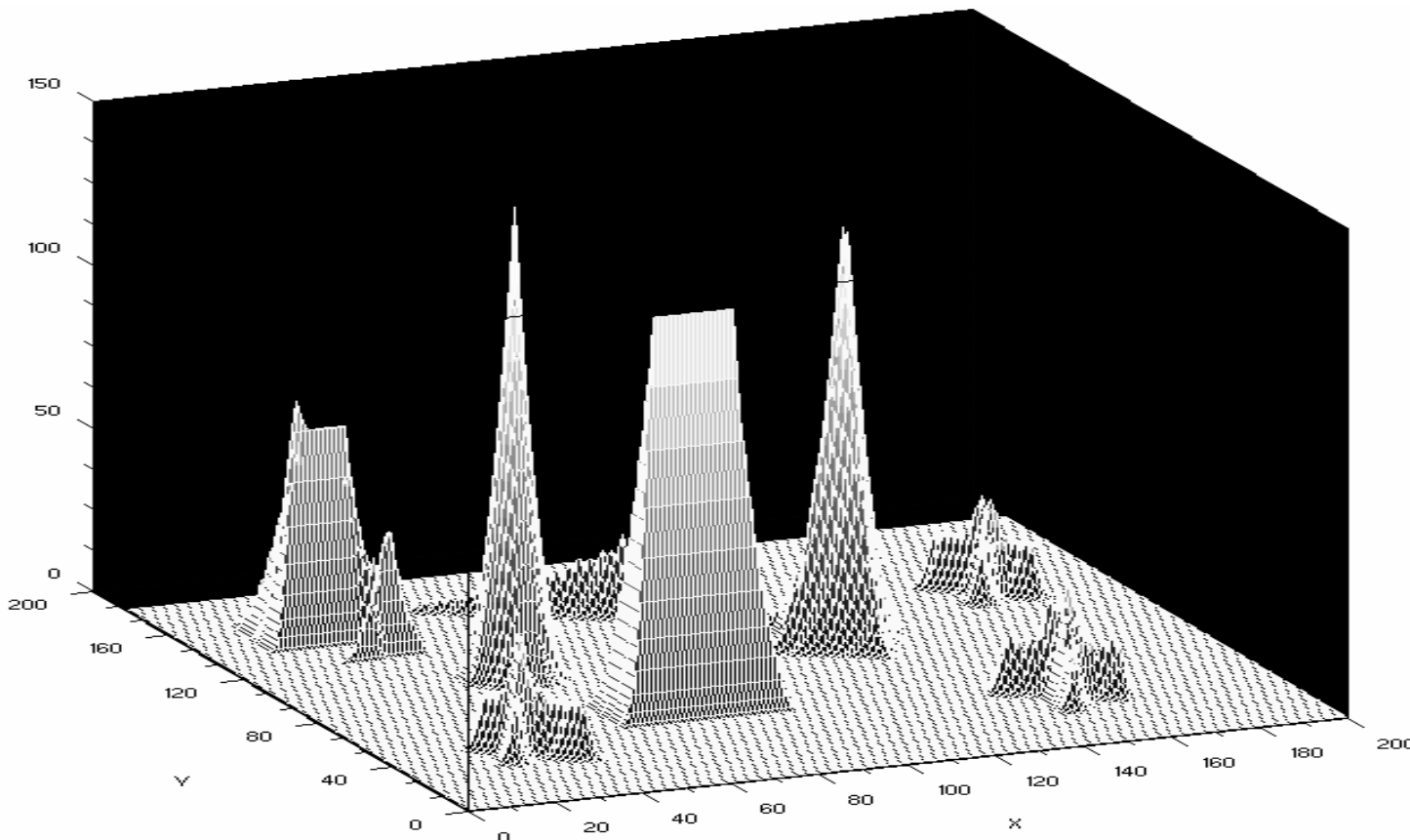
- jej celem jest podanie dla każdego piksela obiektu odległości do najbliższej krawędzi obiektu
- możliwe są różne metryki: euklidesowa, *city block*, *chessboard*,
- różne algorytmy:
  - proste, oparte na erozji:
    - nr iteracji która usuwa dany piksel jest jego odległością do krawędzi
    - metryka zależy od użytego SE:
      - SE 3x3 złożony z jedynek – metryka *chessboard*
      - SE 3x3 w kształcie krzyża – metryka *city block*
      - SE zbliżony do koła – metryka euklidesowa
  - bardziej zaawansowane algorytmy:
    - *Fast Marching* (z teorii *Level Sets*) – jedna iteracja
    - Rosenfeld and Pfaltz 1968 – 2 iteracje – rekursywna morfologia



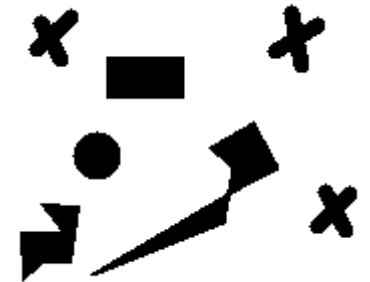


# Wyznaczanie MAT z transformaty odległościowej

- transformatę odległościową można przedstawić jako płaszczyznę 3D (współrzędna Z jest wartością transformaty – odległością do krawędzi)
- krawędzie tej płaszczyzny wyznaczają szkielet binarny (można je zlokalizować licząc krzywiznę transformaty)
- wartości MAT są wartościami transformaty w miejscu krawędzi



obraz oryginalny



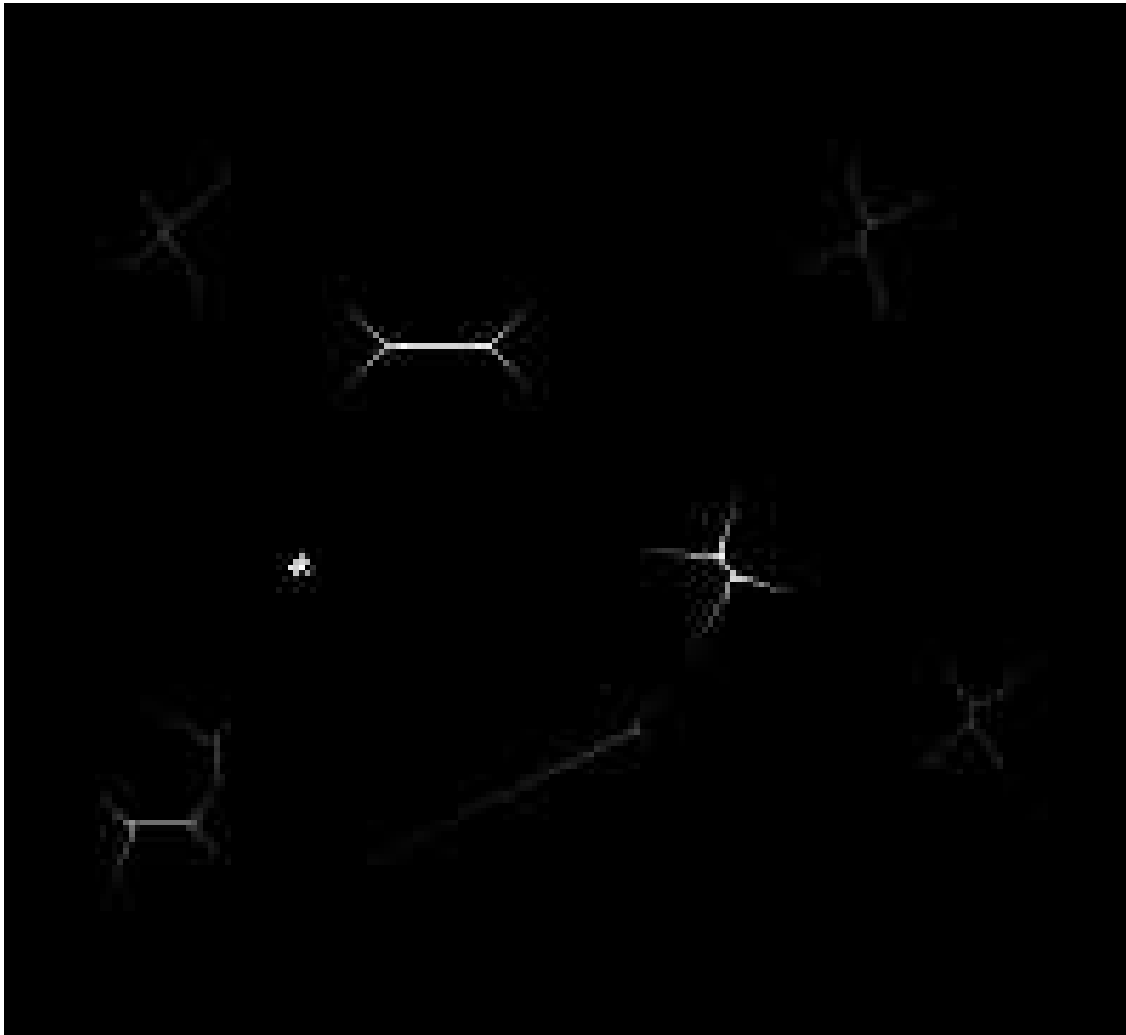
transformata odległościowa



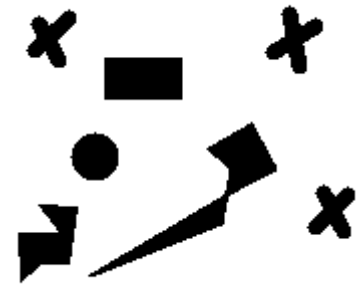


# Wyznaczanie MAT z transformaty odległościowej

szkielet MAT, jako krawędzie transformaty odległościowej



obraz oryginalny



transformata odległościowa





## Szczegółowość szkieletu

- Scilab oblicza szkielet z zaznaczeniem odległości od zakończeń szkieletu:
- poprzez progowanie można dopasować poziom szczegółowości szkieletu

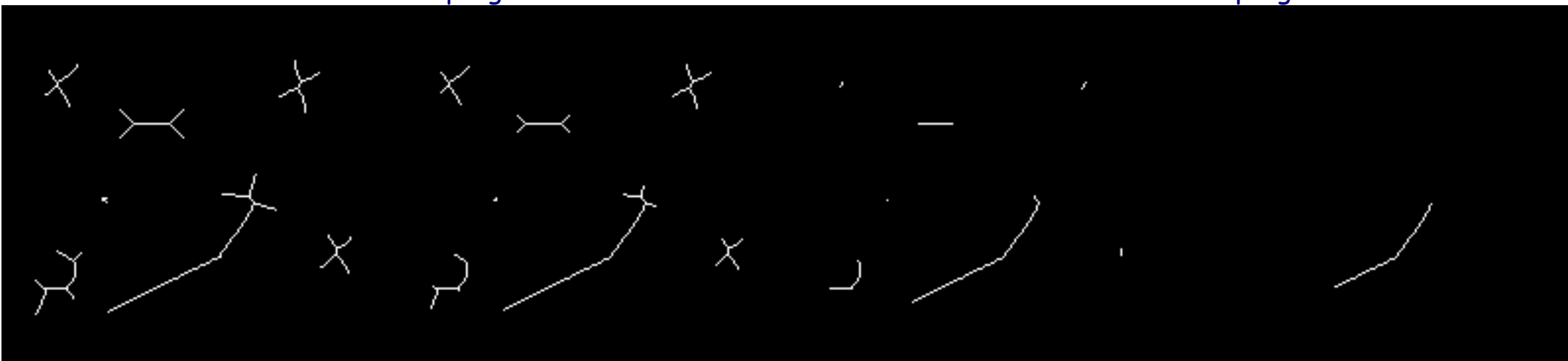


próg = 1% wart. maks

próg = 10% wart. maks

próg = 25% wart. maks

próg = 25% wart. maks





## Rozszerzenie morfologii matematycznej na obrazy w skali szarości

- obraz w skali szarości  $I(x,y)$  może być traktowany jako bryła pod powierzchnią 3D:  $(I,y,I(x,y))$  (podobnie jak w przypadku transformaty odległościowej)
- morfologia w skali szarości jest uważana za rozszerzenie morfologii do przypadku trójwymiarowego:

$$A \oplus B = \{p+q : p \in A \wedge q \in B\}$$

gdzie zbiory A i B (obraz i SE) są trójwymiarowe





## Dylacja w skali szarości

$$I(x, y) \rightarrow \max_{i=-1, \dots, +1, j=-1, \dots, +1} I(x+i, y+j)$$

obraz oryginalny



obraz po 1 dylacji



- „rosną” obszary jasne
- znikają detale

# Dylacja w skali szarości



2 iteracje



3 iteracje



5 iteracji



10 iteracji



## Erozja w skali szarości

$$I(x, y) \rightarrow \min_{i=-1, \dots, +1, j=-1, \dots, +1} I(x+i, y+j)$$

obraz oryginalny



obraz po 1 dylacji



- „rosną” obszary ciemne
- znikają detale

# Erozja w skali szarości



2 iteracje



3 iteracje



5 iteracji



10 iteracji



# Zamknięcie w skali szarości



obraz oryginalny



zamknięcie w skali szarości



- erozja dylacji
- zanikają ciemne szczegóły
- jasne detale pozostają bez zmian

zamknięcie z większym SE



# Otwarcie w skali szarości



obraz oryginalny



otwarcie w skali szarości



- dylacja erozji
- zanikają jasne szczegóły
- ciemne detale pozostają bez zmian

otwarcie z większym SE



# GNU Free Documentation License



Version 1.2, November 2002

Copyright (C) 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.  
51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA  
Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies  
of this license document, but changing it is not allowed.

## 0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.



### 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

### 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

- \* A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- \* B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- \* C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- \* D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- \* E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- \* F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- \* G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- \* H. Include an unaltered copy of this License.
- \* I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- \* J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- \* K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- \* L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- \* M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- \* N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- \* O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties--for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.





## 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## 7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## 8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## 9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

## 10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

## 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements."

(not as a draft) by the Free Software Foundation.