Multimedia Retrieval

5 Distance Functions

Prof. Dr. Marcin Grzegorzek

Research Group for Pattern Recognition
www.pr.informatik.uni-siegen.de

Institute for Vision and Graphics
University of Siegen, Germany

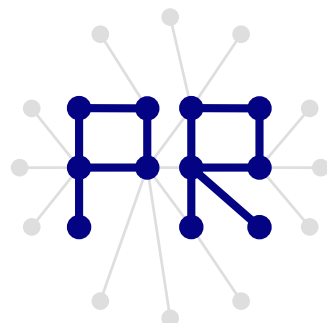


Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Overview

Overview

Eigenschaften und Klassifikation

- Abbildung Feature-Werte zweier Medienobjekte auf nichtnegative, reelle Zahl
- Distanzwert 0 bedeutet maximale Ähnlichkeit
- Invarianz einer Distanzfunktion
  $\longrightarrow$ Unabhängigkeit bzgl. Operation g:
  $d(g(o_1), g(o_2)) = d(o_1, o_2)$

Operation g ist etwa

- Translation
- Skalierung
- Rotation

Formale Eigenschaften einer Distanzfunktion

binäre Funktion $d(o_1, o_2)$ mit $d : O \times O \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ und

- Selbstidentität (Si): $\forall o \in O : d(o, o) = 0$
- Positivität (Pos): $\forall o_1 \neq o_2 \in O : d(o_1, o_2) > 0$
- Symmetrie (Sym): $\forall o_1, o_2 \in O : d(o_1, o_2) = d(o_2, o_1)$
- Dreiecksungleichung (Dreieck):

$$\forall o_1, o_2, o_3 \in O : d(o_1, o_3) \leq d(o_1, o_2) + d(o_2, o_3)$$

Klassifikation anhand Erfüllung der Eigenschaften

Klasse	Si	Pos	Sym	Dreieck
Distanzfunktion	✓	✓	✓	✓
Pseudo-Distanzfunktion	✓	–	✓	✓
Semi-Distanzfunktion	✓	✓	✓	–
Semi-Pseudo-Distanzfunktion	✓	–	✓	–

Beispiele von Distanzfunktionen

- absoluter Betrag der Differenz zweier reeller Zahlen

$$d_{abs} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{abs}(r_1, r_2) \mapsto |r_1 - r_2|$$

- euklidsche Distanzfunktion d_{L_2} auf Punkten p_i der Menge $\mathbb{R}^n$

$$d_{L_2} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{L_2}(p_1, p_2) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_1[i] - p_2[i])^2}$$

Beispiel einer Pseudo-Distanzfunktion

indiskrete Pseudo-Distanzfunktion, die jedem Elementepaar aus $O \times O$ den Wert 0 zuweist:

$$d_{indiskret} : O \times O \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{indiskret}(o_1, o_2) \mapsto 0$$

(Funktion ist praktisch sinnlos)

Beispiel einer Semi-Distanzfunktion

Semi-Distanzfunktion d_{semi} auf der Menge $\{a, b, c\}$:

d_{semi}	**a**	**b**	**c**
a	0	1	3
b	1	0	1
c	3	1	0

Die Dreiecksungleichung ist nicht garantiert:

$$\begin{aligned} d_{semi}(a,c) &\not\leq d_{semi}(a,b) + d_{semi}(b,c) \\ 3 &\not\leq 1+1 \end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften von Distanzfunktionen

folgende Eigenschaften werden an konkreten Funktionen getestet

- Invarianz bzgl.
  - Translation anhand Translationsobjekt T: $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) = d(o_1 + T, o_2 + T)$
  - Skalierung anhand Skalar S: $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) = d(o_1, S * o_2)$
  - Rotation anhand Rotationsobjekt R: $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) = d(R * o_1, R * o_2)$
- Darstellung des Einheitskreises: alle Punkte $o \in O$, für die $d(z, o) = 1$ gilt (z ist Zentrum)

Distanzeigenschaften im Einheitskreis

verschiedene Eigenschaften sind graphisch aus Einheitskreis erkennbar

- Selbstidentität: Zentrum liegt auf Kreis mit Radius 0.
- Positivität: Alle Punkte ungleich Zentrum liegen außerhalb des Kreises mit dem Radius 0
- Translationsinvarianz: Einheitskreis ändert Form nicht, wenn Zentrum verschoben wird
- Symmetrie: bei Translationsinvarianz und Symmetrie teilt Zentrum jede Diagonale zwischen zwei Randpunkten in genau zwei gleich lange Teile
- Rotationsinvarianz: Einheitskreis ist bezüglich Zentrum rotationssymmetrisch

Overview

Distanzfunktionen auf Punkten

Datentyp: `array [1..n](real)`

- Minkowski-Distanzfunktion L_m
- Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion L_m^w
- Quadratische Distanzfunktion d_q
- Quadratische Pseudo-Distanzfunktion
- Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
- Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
- Kullback-Leibler-Abstandsfunktion
- Bhattacharyya-Abstandsfunktion

Minkowski-Distanzfunktion L_m

am häufigsten eingesetzte Distanzfunktion auf Punkten mit $m > 0$

$$d_{L_m} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{L_m}(p_1, p_2) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|^m \right)^{1/m}$$

$m = 1$: Manhattan-Distanzfunktion oder Blockdistanzfunktion

$m = 2$: euklidsche Distanzfunktion

$m = \infty$: Max-Distanzfunktion oder Tschebyscheff-Distanzfunktion

Sonderfall bei $m = \infty$:

$$d_{L_\infty} = d_{L_{max}}(p_1, p_2) \mapsto \max_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|$$

Minkowski-Distanzfunktion L_m

Translationsinvarianz

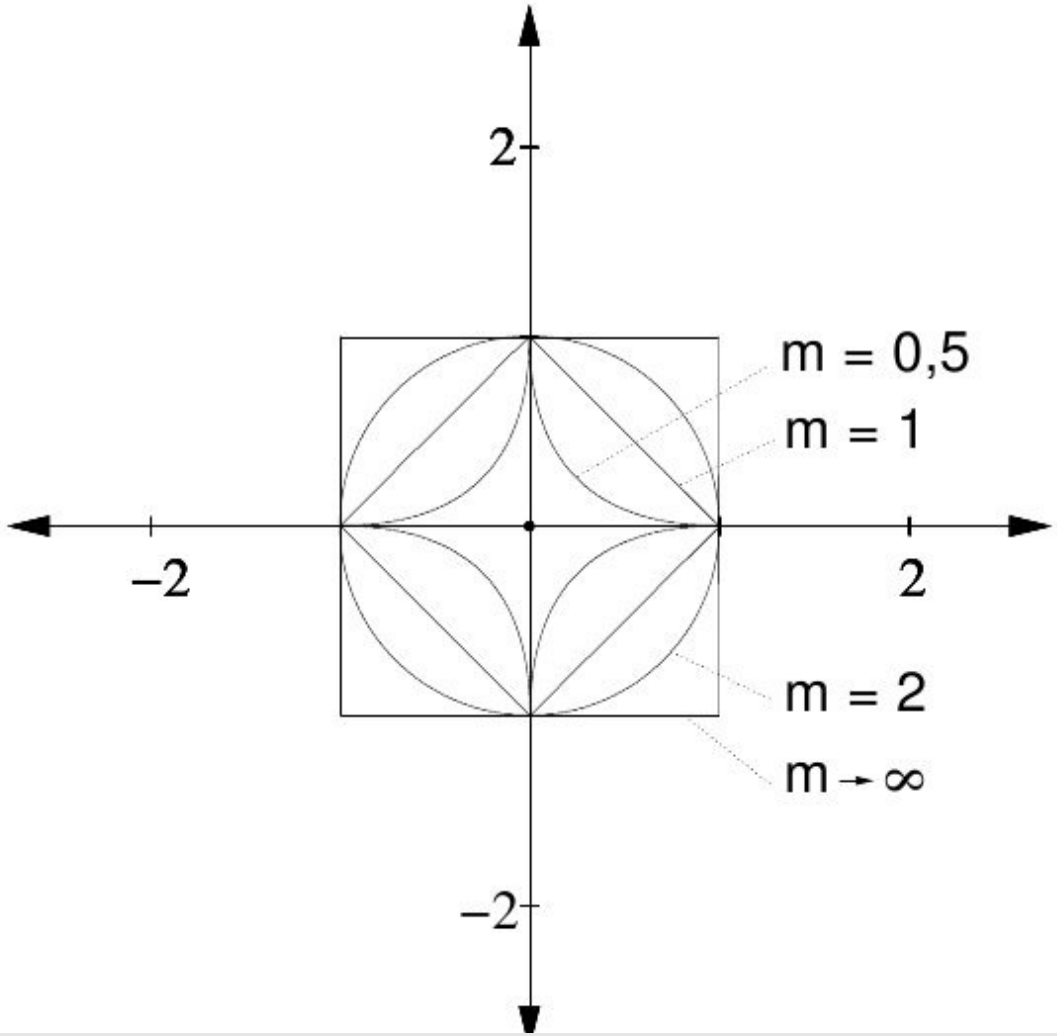
T sei ein n-dimensionaler Vektor, der durch die Differenzberechnung aus der Formel verschwindet:

$$\begin{aligned} d_{L_m}(p_1 + T, p_2 + T) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |(p_1[i] + T) - (p_2[i] + T)|^m \right)^{1/m} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|^m \right)^{1/m} \\ &= d_{L_m}(p_1, p_2) \end{aligned}$$

aber keine Skalierungs- oder Rotationsinvarianz

Minkowski-Distanzfunktion L_m

Einheitskreise



Minkowski-Distanzfunktion L_m

Holdersche Ungleichung

es gilt immer:

$$(|a_1|^{m_1}+\ldots+|a_n|^{m_1})^{1/m_1} \leq (|a_1|^{m_2}+\ldots+|a_n|^{m_2})^{1/m_2} \text{ für } m_1 \geq m_2 \geq 1$$

also: Einheitskreis mit niedrigerem m-Wert liegt innerhalb Einheitskreis mit höherem m-Wert

Minkowski-Distanzfunktion L_m

Sonderfall euklidsche Distanzfunktion ($m = 2$)

- Einheitskreis ist kreisförmig
- Rotationsinvarianz ist erfüllt, da R Orthonormalmatrix ($R^T * R = R * R^T = I$)

$$\begin{aligned} d_{L_2}(R * p_1, R * p_2) &= \sqrt{(R * p_1 - R * p_2)^T * (R * p_1 - R * p_2)} \\ &= \sqrt{(p_1 - p_2)^T * R^T * R * (p_1 - p_2)} \\ &= \sqrt{(p_1 - p_2)^T * (p_1 - p_2)} \\ &= d_{L_2}(p_1, p_2) \end{aligned}$$

- Matrizenschreibweise: $d_{L_2}(p_1, p_2) = \sqrt{(p_1 - p_2)^T * (p_1 - p_2)}$

Minkowski-Distanzfunktion L_m

Berechnung von Reihenfolgen anhand Minkowski-Distanzfunktion L_m

Achtung: versch. m-Werte erzeugen untersch. Reihenfolgen!

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } p_2 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Abstände dieser Punkte vom Koordinatenursprung O:

$$d_{L_1}(O, p_1) = 1 \text{ und } d_{L_1}(O, p_2) = 1.6$$

$$d_{L_\infty}(O, p_1) = 1 \text{ und } d_{L_\infty}(O, p_2) = 0,8$$

Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion L_m^w

achsenparallele Stauchung und Streckung durch Gewichte $w_i \geq 0$

$$d_{L_m}^w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{L_m}(p_1, p_2) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} w_i * |p_1[i] - p_2[i]|^m \right)^{1/m}$$

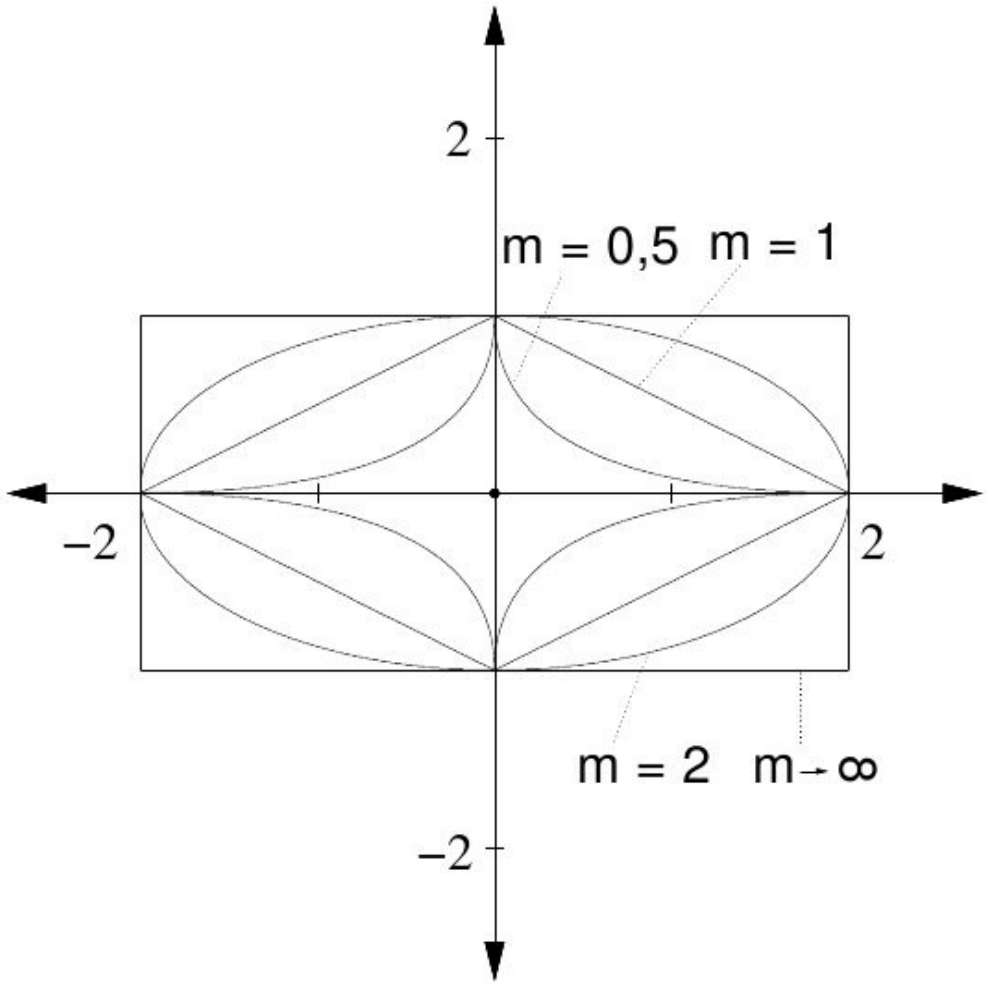
Forderung:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion L_m^w

Einheitskreis

$w_1 = 0.5, w_2 = 1$ (nicht normalisiert)



Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion L_m^w

Invarianzen

- Translationsinvarianz
- keine Skalierungsinvarianz
- keine Rotationsinvarianz

Quadratische Distanzfunktion d_q

Matrizenschreibweise:

$$d_q(p_1, p_2) = (p_1 - p_2)^T * A * (p_1 - p_2)$$

A im n-dimensionalen Raum ist symmetrische und positiv definite Matrix $\mathbb{R}^{n \times n}$

Quadratische Distanzfunktion d_q

Matrix A

- Einheitsmatrix E: d_q identisch mit $d^2_{L_2}$
- Diagonalmatrix: d_q entspricht $d^2_{L_2^w}$
  (Gewichte korrespondieren zu Diagonalelementen)
- ansonsten: nonuniforme Skalierung, Rotation, Spiegelung der Punkte

Quadratische Distanzfunktion d_q

Symmetrische und positiv definite Matrix A

es gilt immer: $A = U * L * U^T$ (Eigenwertzerlegung):

- U ist orthonormale Matrix (Rotation anhand Eigenvektoren)
- L ist Diagonalmatrix (Skalierung anhand Eigenwerten)

Quadratische Distanzfunktion d_q

Symmetrische und positiv definite Matrix A

Berechnung der Distanz mittels $d^2_{L_2}$ auf transformierten Punkten oft relativ schnell realisierbar

$$
\begin{aligned}
d_q(p_1, p_2) &= (p_1 - p_2)^T A\,(p_1 - p_2) \\
&= (p_1 - p_2)^T U L U^T (p_1 - p_2) \\
&= \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2)\right)^T \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2)\right) \\
&= \left(L^{1/2} U^T p_1 - L^{1/2} U^T p_2\right)^T \left(L^{1/2} U^T p_1 - L^{1/2} U^T p_2\right) \\
&= d^2_{L_2}(L^{1/2} U^T p_1, L^{1/2} U^T p_2)
\end{aligned}
$$

Quadratische Distanzfunktion d_q

Invarianzen

- Translationsinvarianz
- keine Skalierungsinvarianz
- keine Rotationsinvarianz

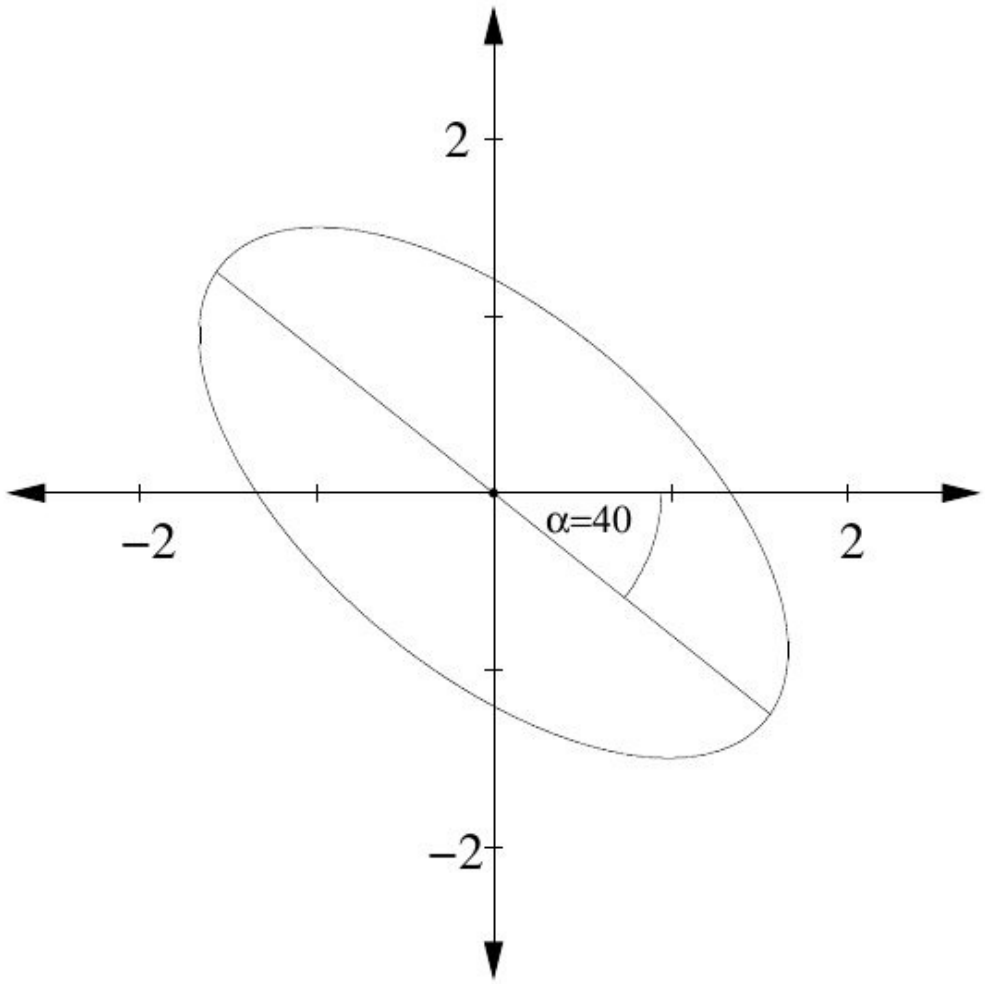
Quadratische Distanzfunktion d_q

Beispielmatrix

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0,5599 & 0,3693 \\ 0,3693 & 0,6901 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 40 & \sin 40 \\ -\sin 40 & \cos 40 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos 40 & -\sin 40 \\ \sin 40 & \cos 40 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Quadratische Distanzfunktion d_q

Einheitskreis des Beispiels



Quadratische Distanzfunktion d_q

Mahalanobis-Distanzfunktion

- Einsatz der quadratischen Distanzfunktion d_q, wenn Distanzberechnung Kombination unterschiedlicher Dimensionen erfordert
- Grundlage kann Kovarianzmatrix C auf d Dimensionen sein $\longrightarrow$ Mahalanobis-Distanzfunktion $d_M(p_1, p_2)$

$$d_M(p_1, p_2) = |det\ C|^{1/d}(p_1 - p_2)^T * C^{-1} * (p_1 - p_2)$$

Quadratische Pseudo-Distanzfunktion

- Aufgabe der Forderung nach Positiv-Definitheit für A
- Ziel: unsymmetrische Translationsinvarianz bzgl. Vektoren t des Vektorunterraums T:

$$pd_q(p_1, p_2 + t) = pd_q(p_1, p_2)$$

- Konstruktion der Matrix A aus geeigneter Orthogonalmatrix U und Diagonalmatrix L
- den U-Vektoren entsprechende Diagonalwerte auf Null setzen
- seien s_i mit $i = 1, \ldots m$ die durch l_i auf Null gesetzten U-Spaltenvektoren, dann gilt:

$$T = \left\{ t \in \mathbb{R}^n | t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i * s_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Quadratische Pseudo-Distanzfunktion

Nachweis der Translationsinvarianz

$$
\begin{aligned}
& pd_q(p_1, p_2 + t) \\
= \; & (p_1 - p_2 - t)^T U L U^T (p_1 - p_2 - t) \\
= \; & (p_1 - p_2 - t)^T U L^{1/2} L^{1/2} U^T (p_1 - p_2 - t) \\
= \; & \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2 - t)\right)^T \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2 - t)\right) \\
= \; & \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2) - L^{1/2} U^T t\right)^T \left(L^{1/2} U^T p_1 - p_2) - L^{1/2} U^T t\right) \\
= \; & \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2)\right)^T \left(L^{1/2} U^T p_1 - p_2)\right) \\
= \; & pd_q(p_1, p_2)
\end{aligned}
$$

Quadratische Pseudo-Distanzfunktion

Beispiel Quadratische Pseudo-Distanzfunktion

Konstruktion Translationsinvarianz im Winkel 40 Grad:

$$U = \begin{pmatrix} \cos 40 & -\sin 40 \\ \sin 40 & \cos 40 \end{pmatrix}$$

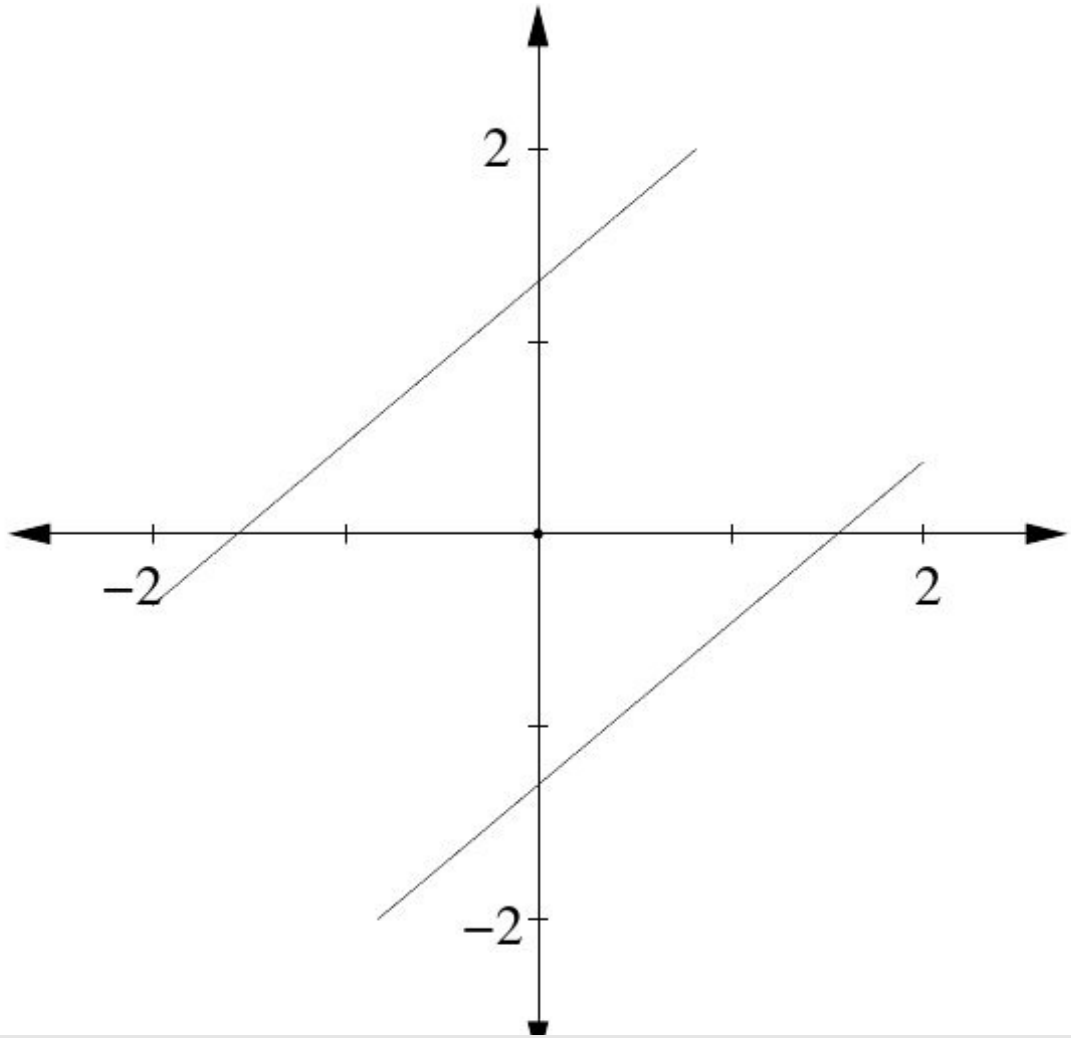
$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Kombination dieser Matrizen ergibt die gewünschte Matrix A:

$$U * L * U^T = \begin{pmatrix} 0,4132 & -0.4924 \\ -0,4924 & 0,5868 \end{pmatrix}$$

Quadratische Pseudo-Distanzfunktion

Einheitskreis des Beispiels



Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

folgende Beobachtungen Chang/Wu03 bzgl. Unähnlichkeit im hochdimensionalen Raum:

- ähnliche Objekte liegen meist nur in wenigen Dimensionen nebeneinander
- Ähnlichkeit kann häufig nicht an bestimmten Dimensionen festgemacht werden

Problem mit Minkowski-Distanzfunktion: alle Dimensionen werden berücksichigt

Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

- Berücksichtigung einer dynamischen Untermenge der Dimensionen
- p_1 und p_2 seien zwei Punkte im n-dimensionalen Raum und $\delta_i = |p_1[i] - p_2[i]|$ der Abstand in Dimension i
- nur die m kleinsten Abstände werden berücksichtigt: $\Delta_m = \{\text{die kleinsten m } \delta\text{-Werte aus } (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)\}$

$$d_{dp}^{m,r} = \left(\sum_{\delta_i \in \Delta_m} \delta_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

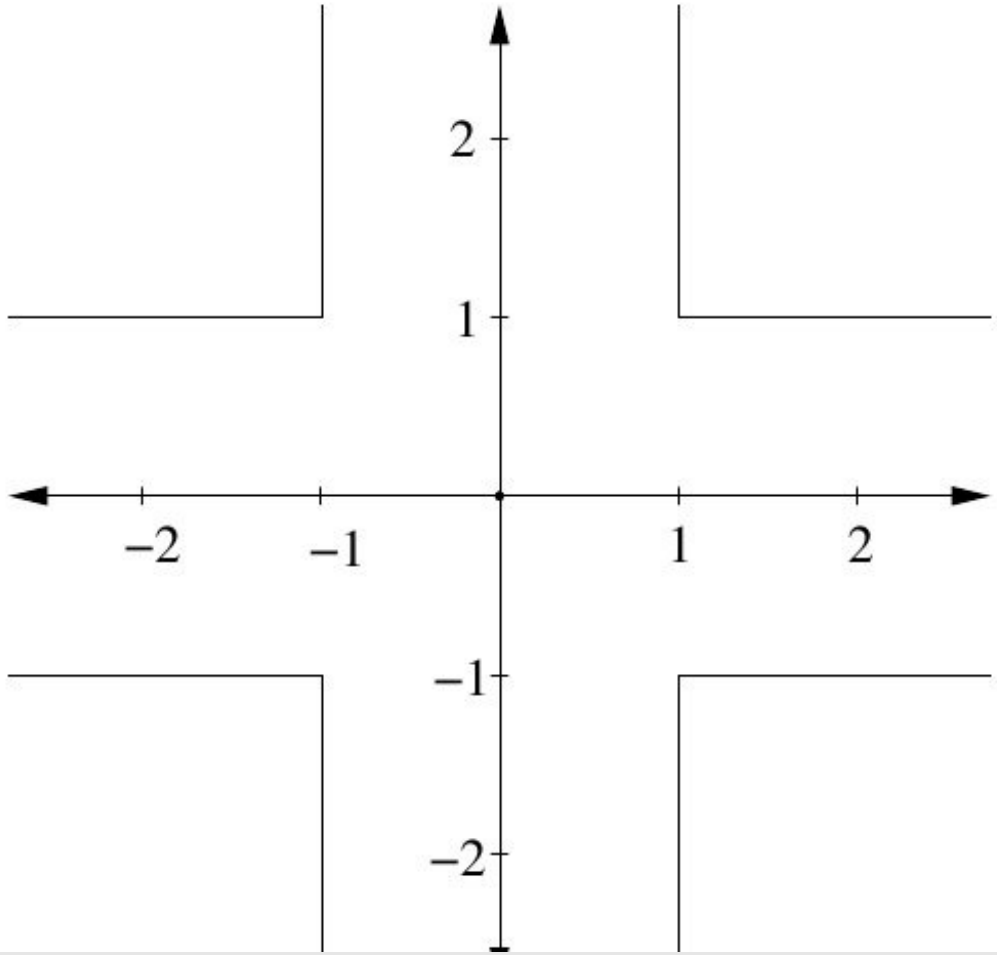
Eigenschaften

- Selbstidentität und Symmetrie sind erfüllt
- Verletzung der Positivität und Dreiecksungleichung

Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

Einheitskreis

zweidimensionaler Raum und $m = 1$



Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

- Abstand zwischen Histogrammen mit absoluten Häufigkeiten
- ursprünglich in Statistik entwickelt Untersuchung von Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen
- basiert auf Nullhypothese: Häufigkeitsverteilungen sind gleich also Differenz zwischen erwarteter und tatsächlicher Häufigkeiten sind 0

Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

$$spd_{\chi^2}(p_1, p_2) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(p_1[j] - \hat{p}_1[j])^2}{\hat{p}_1[j]} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(p_2[j] - \hat{p}_2[j])^2}{\hat{p}_2[j]} \text{ für } p_1, p_2 \in \mathbb{N}_0^n$$

erwartete Häufigkeiten:

$$\hat{p}_i[j] = \frac{(p_1[j] + p_2[j]) * \sum_{a=1}^{n} p_i[a]}{\sum_{a=1}^{n} (p_1[a] + p_2[a])}.$$

Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

Beispiel

- Test, ob Grippedoppelimpfung Grippe verhindern kann
- Befragung verschiedener Personen über Auftreten von Grippe und Impfungen
- erwartete Werte sind in Klammern notiert

	keine Impfung	**eine Impfung**	**Doppelimpfung**	$\sum$
Grippe	24 (14,398)	9 (5,014)	13 (26,588)	46
keine Grippe	289 (298,602)	100 (103,986)	565 (551,412)	954
$\sum$	313	109	578	1000

Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

Berechnung der erwarteten Häufigkeiten

- wenn kein Zusammenhang zwischen Impfung und Grippe, dann Wert jeder Zelle abschätzbar
- Beispiel Grippe/keine Impfung:
  - Wahrscheinlichkeit für Grippe ist 46/1000
  - Wahrscheinlichkeit für keine Impfung ist 313/1000
  - Wahrscheinlichkeit für Grippe/keine Impfung: 46/1000*313/1000
  - erwartete Häufigkeit: 46/1000*313/1000*1000=46*313/1000=14,398

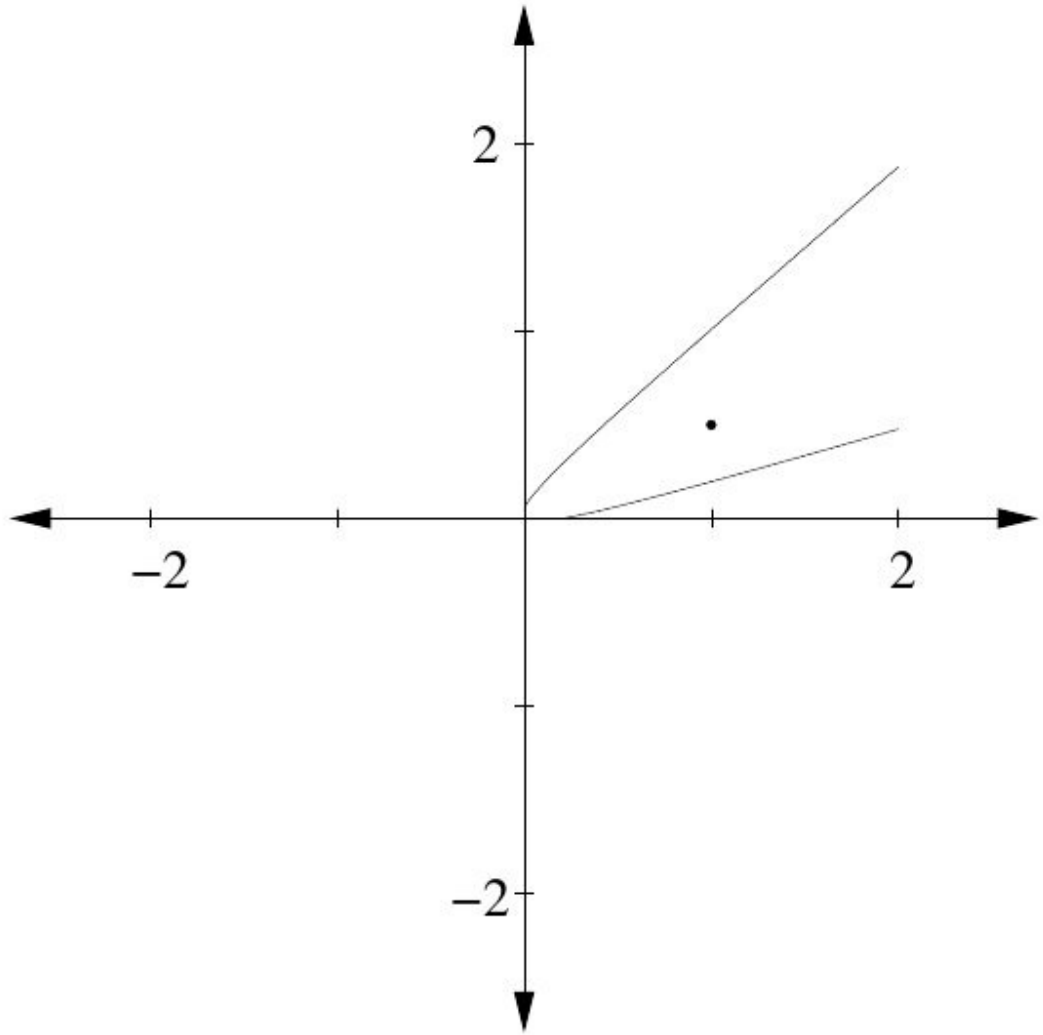
Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

Eigenschaften

- Selbstidentität und Symmetrie sind erfüllt
- Rotationsinvarianz
- keine Positivität
- keine Dreiecksungleichung

Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

Einheitskreis



Overview

Allgemeines

- Unter Binärdaten verstehen wir hier die Erfüllung bzw. Nichterfüllung bestimmter Eigenschaften von Medienobjekten.
- Zu einer vorgegebenen Menge E von n Eigenschaften und jedem Medienobjekt bekannt ist, welche Eigenschaften erfüllt sind und welche nicht.
- Graphisch lassen sich die Feature-Daten als Eckpunkte eines n-dimensionalen Hypereinheitswürfels darstellen.

Eigenschaften und Korrespondenzen

Vergleicht man zwei Punkte p_1 und p_2, ergeben sich vier verschiedene Anzahlwerte, die als Grundlage für die Distanzmessung verwendet werden:

$e \in E$	e erfüllt für p_1	e nicht erfüllt für p_1
e erfüllt für p_2	$n_{1/1}$	$n_{0/1}$
e nicht erfüllt für p_2	$n_{1/0}$	$n_{0/0}$

Beispiel:

$$p_1 = (0,0,0,0,1,1,1,1)^{\mathrm{T}} \quad p_2 = (1,1,0,1,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\Downarrow$$

$$n_{0/0} = 1 \quad n_{0/1} = 3 \quad n_{1/0} = 2 \quad n_{1/1} = 2$$

Minkowski-Distanzfunktion auf Binärdaten

In der allgemeinen Form:

$$d_{L_m}(p_1, p_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|^m \right)^{1/m}$$

Auf Binärdaten:

$$d_{L_m} = (n_{1/0} + n_{0/1})^{1/m}$$

Overview

Allgemeines

- Sequenz-Daten bestehen aus einer Liste von Datenelementen eines Datentyps.
- Die Anzahl der Elemente zur Beschreibung von verschiedenen Medienobjekten kann unterschiedlich sein.
- Klassifikation und Beispiele:
  - keine Positionskorrespondenz: Earth-Mover-Distanzfunktion
  - Positionskorrespondenz und reelle Werte: DFT-L_2-Distanzfunktion
  - Positionskorrespondenz und nominale Werte: Editierdistanzfunktion

Earth-Mover-Distanzfunktion

- Diese Distanzfunktion geht von dem Datentyp $\mathrm{tuple}(p_i : \mathrm{array}[1 \ldots n](\mathrm{real}) ; w_{p_i} : \mathrm{real})$ für das i-te Element einer Sequenz p aus.

- "Erdhügel und Erdlöcher"

  Um die Distanz zwischen der Sequenz p mit m Elementen und der Sequenz q mit n Elementen zu ermitteln, werden die Elemente von p als Erdhügel und die von q als Erdlöcher aufgefasst. Die Punkte p_i bzw. q_i geben die Position der Hügel bzw. der Löcher an, während w_{p_i} und w_{q_i} die Volumina der Hügel/Löcher beschreiben. Um die Distanz zwischen den Sequenzen zu ermitteln, wird nun versucht, die Erde der Hügel mit minimalen Transportkosten in die Löcher zu füllen.

Earth-Mover-Distanzfunktion

- Ziel ist Minimierung der Transportkosten.
- Ein konkreter Transport wird durch die Angabe der Quantitätsmatrix $F = [f_{ij}]$ definiert. Der Wert f_{ij} gibt die Menge der Erde an, die vom Hügel p_i zum Loch q_j transportiert wird.
- Die Transportkosten berechnen sich aus dem Produkt der Quantitäten mit den entsprechenden Grunddistanzwerten:

$$\text{Kosten}(p, q, F) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d(p_i, q_j) f_{ij}$$

Earth-Mover-Distanzfunktion

Diese Kosten sind unter Berücksichtigung folgender Bedingungen zu minimieren:

$$f_{ij} \leq 0 \quad : \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \leq w_{p_i} \quad : \quad 1 \leq i \leq m \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \leq w_{q_j} \quad : \quad 1 \leq j \leq n \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} = \min \left(\sum_{i=1}^{m} w_{p_i}, \sum_{j=1}^{n} w_{g_j} \right) \tag{4}$$

Earth-Mover-Distanzfunktion

Der Distanzwert nach der EM-Distanzfunktion berechnet sich nun aus der Normierung der minimalen Transportkosten bezüglich der Gesamtmenge der transportierten Erde:

$$d_{\mathrm{EM}}(p,q) = \frac{\min\limits_{|f_{ij}|} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} d(p_i, q_j) f_{ij} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij}}$$

DFT-L_2-Distanzfunktion

- Diese Distanzfunktion ist zum Vergleich von Sequenzen reeller Werte mit einer Positionskorrespondenz und fester Länge geeignet.
- Die Grundidee liegt in der Verwendung der euklidischen Distanzfunktion auf den einzelnen korrespondierenden Sequenzwerten.
- Ein typisches Beispiel für Sequenzen, bei denen diese Distanzfunktion sinnvoll angewendet werden kann, sind Zeitreihen. Z. B. können Tierpopulationen, Pegelstände, aber auch Aktienkursverläufe als zeitabhängige Werte miteinander verglichen werden.

Editierdistanz

- Ein Beispiel für eine Distanz zwischen Sequenzen mit nominalen Werten anhand einer abgeschwächten Positionskorrespondenz.
- Die Editierdistanz misst den minimalen Aufwand, um eine Zeichenkette mittels Editieroperationen in eine andere Zeichenkette zu überführen.
- Beispiel - die Editierdistanz zwischen den Wörtern “Abend” und “Robe” beträgt 4 (Ersetzen von “A” durch “R”, Einfügen von “o”, Entfernen von “n” und “d”).

Overview

Allgemeines

- Bisher waren die Datentypen der zu vergleichenden Objekte eingeschränkt. Jetzt soll ein Vergleich auf allgemeinen Mengen erfolgen.

- Beispiele:
  - die Bottleneck-Distanzfunktion,
  - die Distanzfunktion über das Volumen der symmetrischen Differenz,
  - die Hausdorff-Distanzfunktion, und
  - die Frechet-Distanzfunktion

Bottleneck-Distanzfunktion

- d_B ist auf endlichen Untermengen einer Menge X mit einer gegebenen Grunddistanz $d_X : X \times X \to \mathbb{R}_0$ definiert.

- Die Kardinalität beider Untermengen muss gleich sein

$$A, B \subset X \quad \text{mit} \quad |A| = |B|$$

- Zwischen den Elementen der Untermengen existiere eine bijektive Abbildung f. Man ist an der Distanz d_X des am weitesten auseinanderliegenden Elementepaars interessiert. Das Minimum der maximalen Elementepaardistanzen über allen möglichen Bijektionen $f \in F(A, B)$ wird gesucht:

$$d_B(A, B) = \min_{f \in F(A,B)} \max_{a \in A} d_X(a, f(a))$$