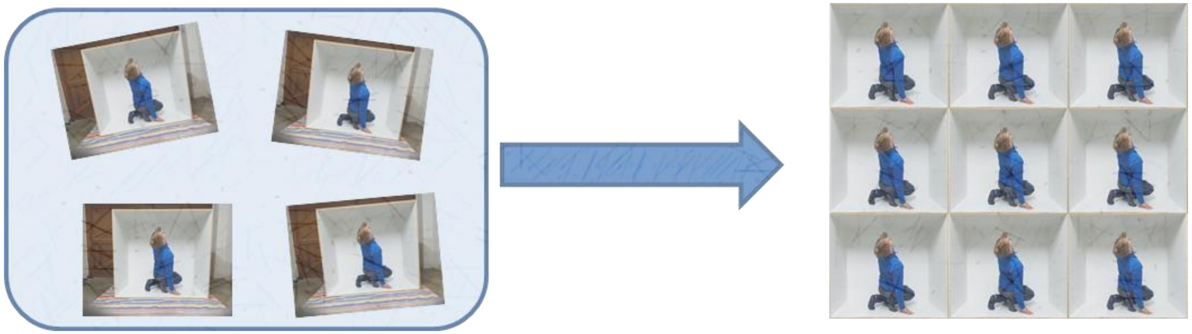
Digitale Bildverarbeitung 1

Einführung in die digitale Bilderverarbeitung
für Informatikstudierende im Bachelor

Vorlesung: Michael Möller – michael.moeller@uni-siegen.de
Übungen: Hannah Dröge – hannah.droege@uni-siegen.de



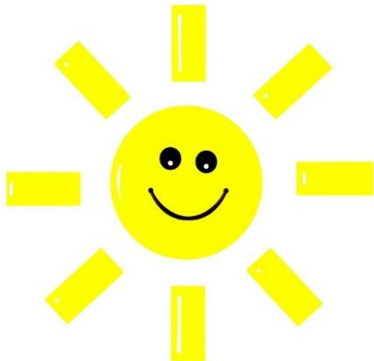
Bilddarstellung

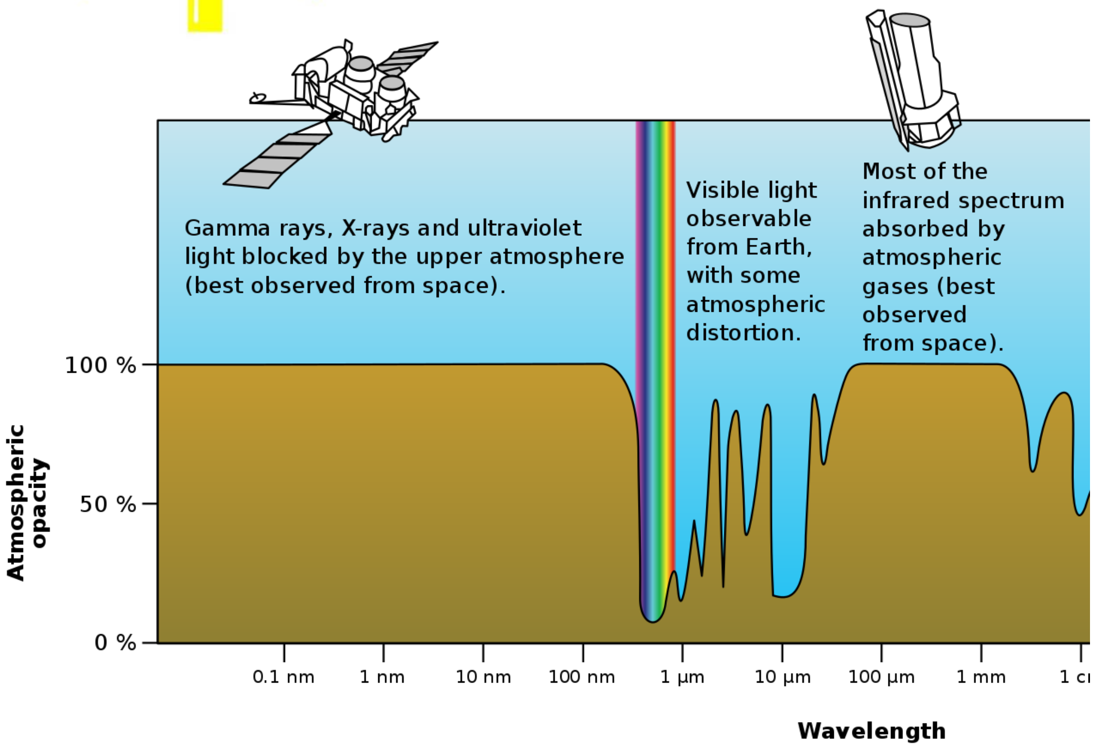
Wir wissen schon wie ein ‘fertiges’ digitales Bild dargestellt wird,

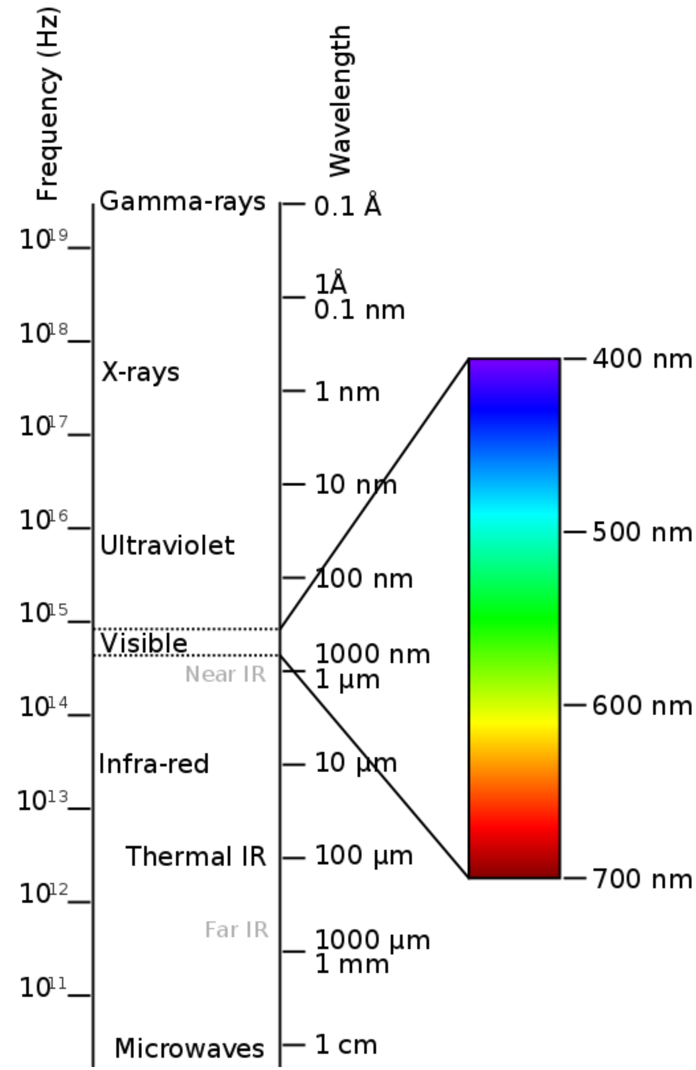
aber wie kommt es zu einem solchen Bild?

Bildentstehung

https://pixabay.com







https://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_spectrum

Bildentstehung

Die *Energie* in einem Lichtstrahl (mit fixer Wellenlänge) ist gegeben durch

$$Q = \boxed{n} \cdot \boxed{h} \cdot \boxed{f} \qquad \text{Einheit: } [Q] = J \ (\text{Joule})$$

Photonenzahl

Plancksches Wirkungsquantum

$6.6260755 \cdot 10^{-34} \mathrm{Ws}^2$

Frequenz des Lichtes

Die *Strahlungsleistung* ist Lichtenergie pro Zeit:

$$\phi = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{Einheit: } [\phi] = W \ (\text{Watt})$$

Michael Möller – michael.moeller@uni-siegen.de

Bildentstehung

Die *Strahlungsstärke* ist Strahlungsleistung pro Raumwinkel:

$$I_e = \frac{d\phi}{d\Omega} \qquad \text{Einheit: } [I_e] = W/sr \text{ (Watt pro Steradiant)}$$

Die *Strahldichte* L_E ist Strahlungsstärke pro effektive Fläche des Senders.

$$\text{Einheit: } [L_e] = W/(m^2\ sr)$$

Für all nun definierten Größen gibt es *photometrische Entsprechungen*, die die wellenlängenabhängige Empfindlichkeit des menschlichen Auges berücksichtigt!

Mehr zur menschlichen Wahrnehmung werden wir beim Thema Farbbilder später noch besprechen.

Bildentstehung

radiometrische Größe	Symbol[a)]	SI-Einheit	photometrische Entsprechung[b)]	Symbol	SI-Einheit
Strahlungsleistung Strahlungsfluss, *radiant flux*, *radiant power*	Φ_e	Watt (W)	**Lichtstrom** *luminous flux*, *luminous power*	Φ_v	Lumen (lm)
Strahlungsstärke Strahlstärke, Strahlungsintensität, *radiant intensity*	I_e	W/sr	**Lichtstärke** *luminous intensity*	I_v	Candela (cd) = lm/sr
Strahldichte Strahlungsdichte, Radianz, *radiance*	L_e	W/(m^{2}sr)	**Leuchtdichte** *luminance*	L_v	cd/m^2

Gekürzte Übersicht von https://de.wikipedia.org/wiki/Strahldichte

$$\text{Wert an einem Pixel} = K_c \left(\frac{tS}{f_s^2} \right) L_v$$

K_c Kamerakonstante

t Belichtungszeit

f_s Blende (F-stop)

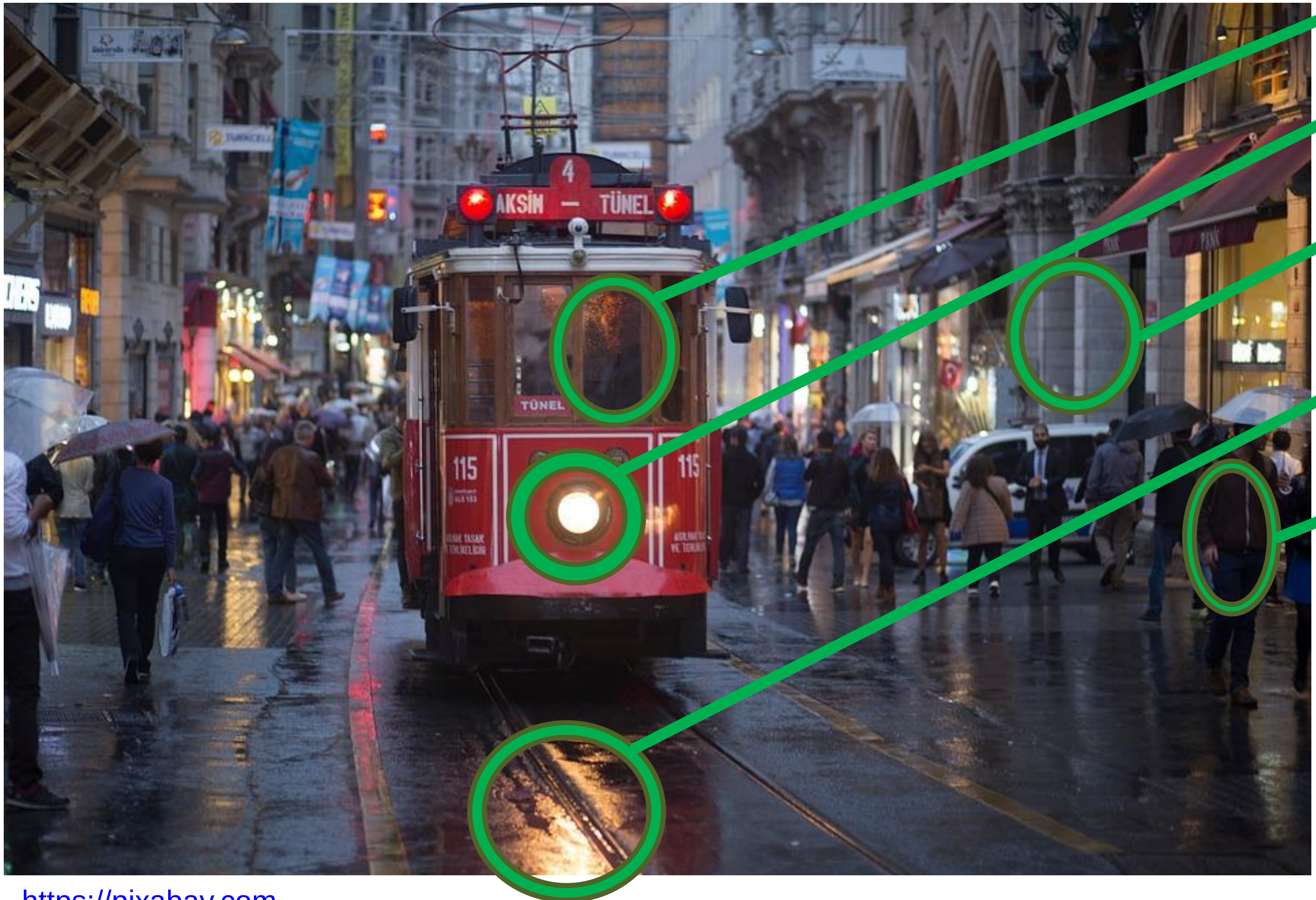
S ISO-Empfindlichkeit

L_v Leuchtdichte

Quelle: “Measuring Luminance with a Digital Camera”, Peter D. Hiscocks, P.Eng, https://www.ee.ryerson.ca/~phiscock/astronomy/light-pollution/luminance-notes-2.pdf

Bildentstehung

Auf welche Art können Objekte mit Licht umgehen?



Transmission

Emission

Streuung
(= diffuse Reflexion)

Spiegelung
(= winkelabhängige Reflexion)

Absorption

https://pixabay.com

Perfekte diffuse Reflexion: *De Lambert'scher Reflektor*

Bildentstehung

- Kameras messen elektromagnetische Wellen bestimmter Wellenlänge
- Unterschiedliche Objekte gehen unterschiedlich mit elektromagnetischen Wellen (Licht) um (Emission, Transmission, Absorption, Reflexion).

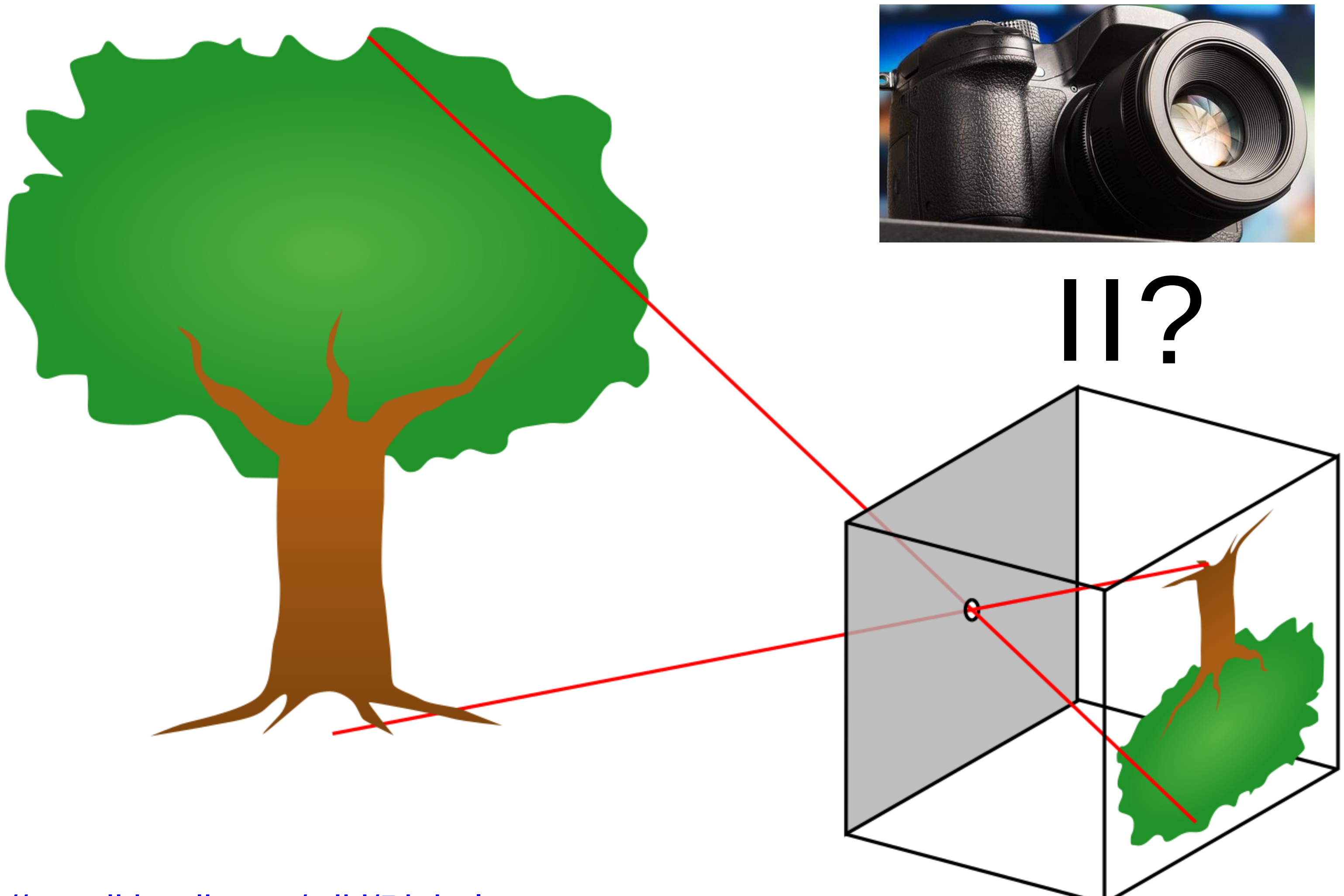
Aber wir kommt das Licht zum Sensor der Kamera?

Praktische Überlegung: Wieso sollte uns das interessieren, wenn sich Bildverarbeitung mit der Manipulation, Rekonstruktion und Analyse von digitalen Bildern befasst?

Ziel: Wir müssen verstehen wie die Kiste wieder rechteckig wird!

Bildentstehung

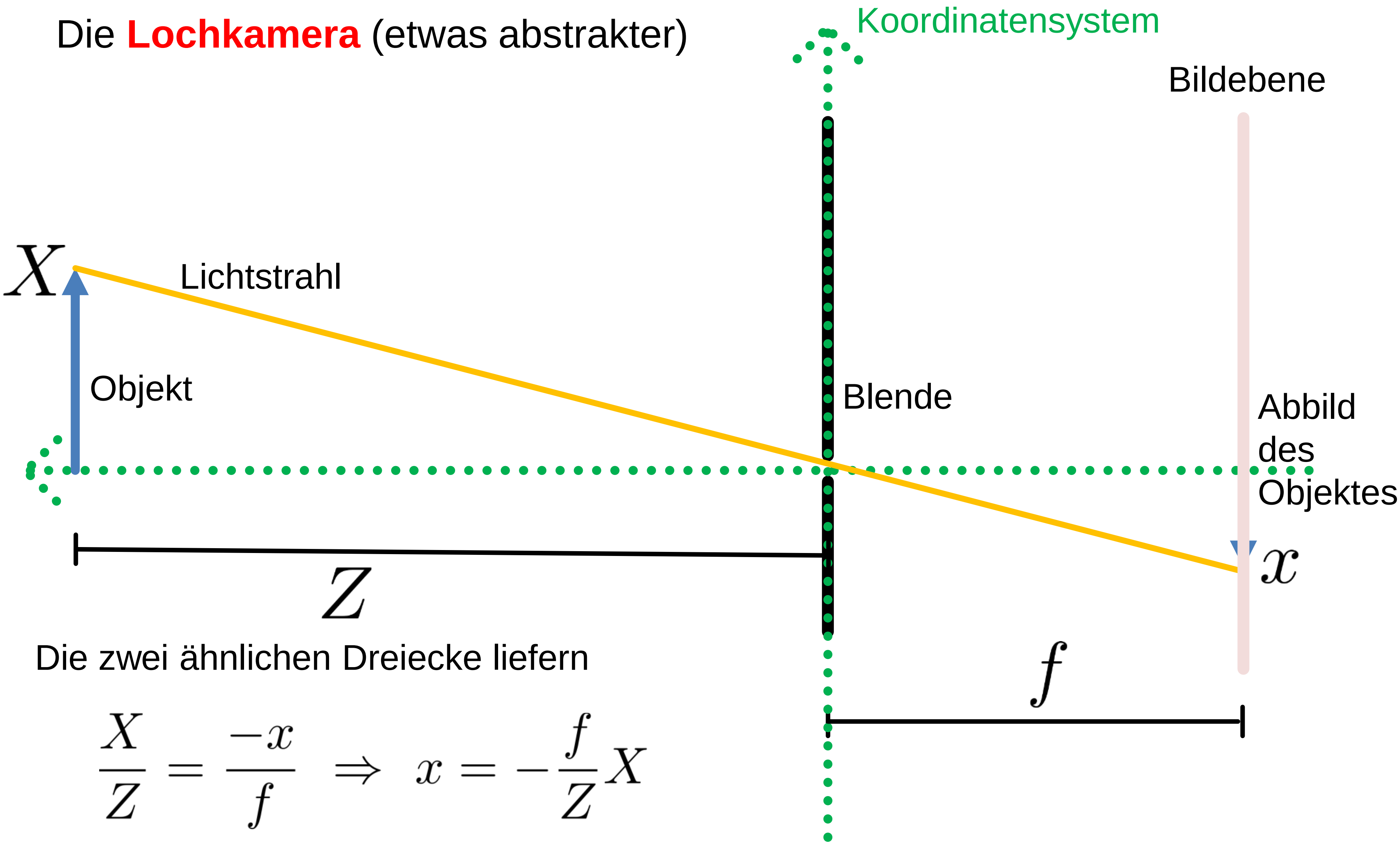
Das einfachste Modell einer Kamera: Die **Lochkamera**



https://en.wikipedia.org/wiki/Pinhole_camera

Bildentstehung

Die **Lochkamera** (etwas abstrakter)

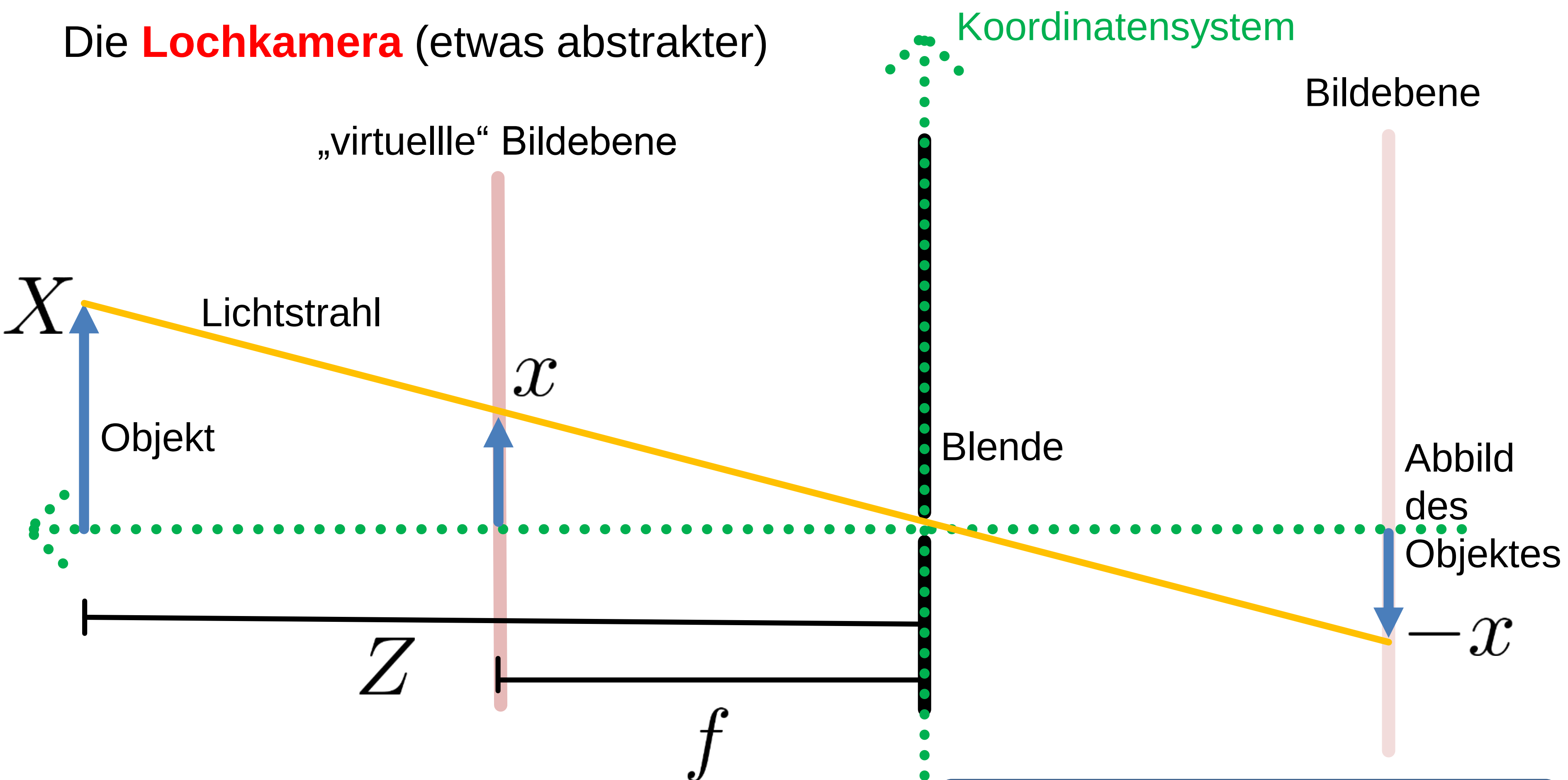


Die zwei ähnlichen Dreiecke liefern

$$\frac{X}{Z} = \frac{-x}{f} \Rightarrow x = -\frac{f}{Z} X$$

Bildentstehung

Die **Lochkamera** (etwas abstrakter)



Durch Platzieren einer virtuellen Bildebene vor der Blende, erhalten wir ein aufrechtes Bild mit exakt der gleichen Geometrie.

Hierfür ändern wir das Vorzeichen der Bildkoordinaten. $x = \frac{f}{Z} X$

Bildentstehung

Die **Lochkamera**
(in 2d bzw. 3d)

Entlang jeder Koordinate ist die Geometrie exakt die gleiche wie im zuvor betrachteten Fall!

$$x_1 = \frac{f}{Z} X_1 \qquad x_2 = \frac{f}{Z} X_2$$

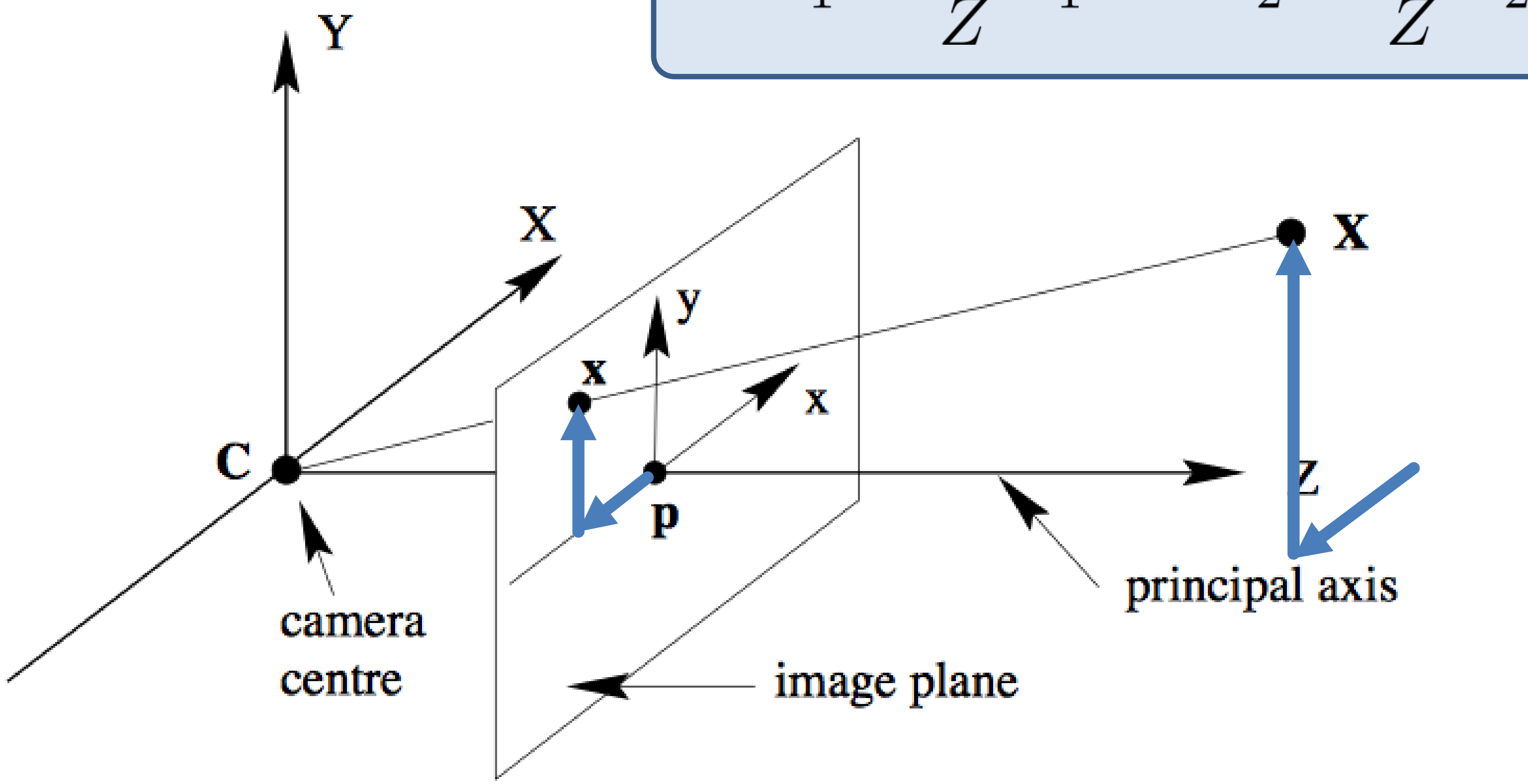
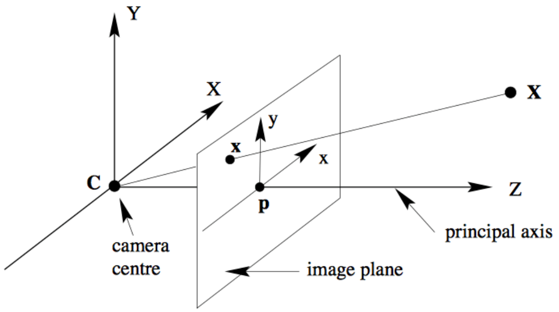


Bild von https://www.sanyamkapoor.com/machine-learning/an-introduction-to-epipolar-geometry/

Bildentstehung



Entlang jeder Koordinate ist die Geometrie exakt die gleiche wie im zuvor betrachteten Fall!

$$x_1 = \frac{f}{Z} X_1 \qquad x_2 = \frac{f}{Z} X_2$$

Typische Art dies zu schreiben:

$$Z \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Z-Koordinate des abgebildeten Punktes; Ausdruck der Tatsache, dass Skalieren von die Abbildung nicht ändert. Viele schreiben λ statt Z.

Bildpunkt in *homogenen* Koordinaten $\boldsymbol{x}$

Kameramatrix – so bildet die Kamera die 3d Welt ab. (Es gibt realistischere Modelle)

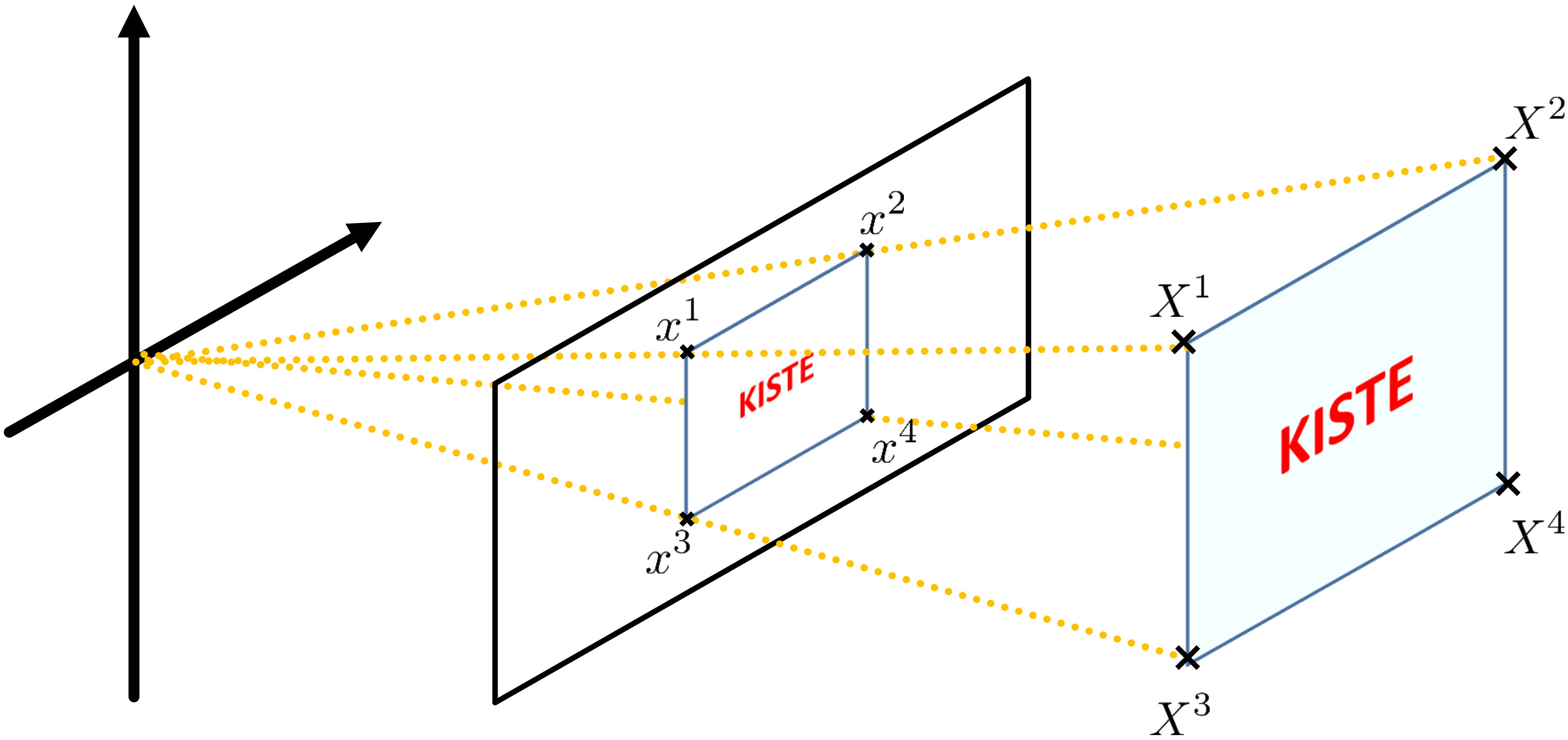
3d Koordinaten des abgebildeten Objektes

Der Einfachheit halber nehmen wir $f = 1$ an. Gegeben $\boldsymbol{x}$ heißt dies es gibt ein λ mit

$$\lambda \boldsymbol{x} = X$$

Bildentstehung

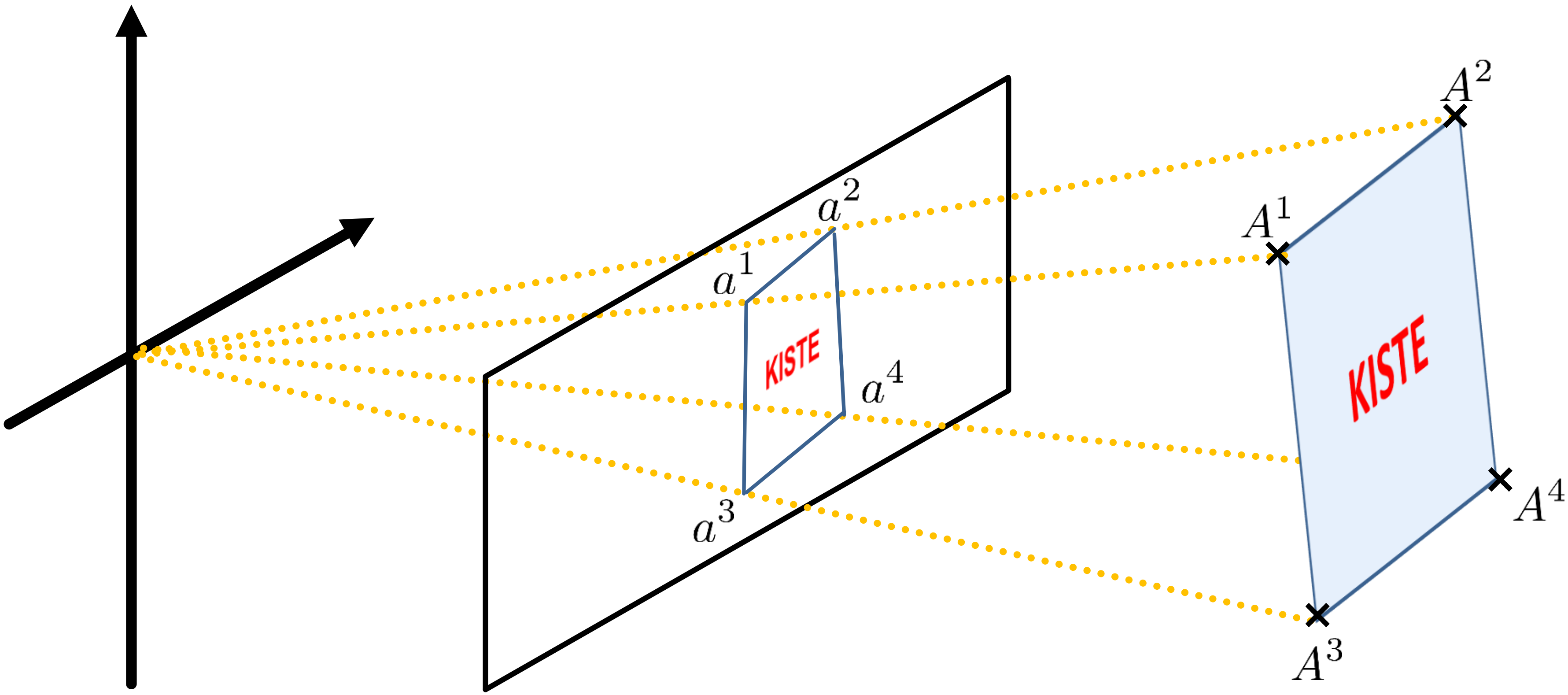
Für unseren Setzkasten – welchen Fall hätten wir gerne?



Alle Punkte in einer Ebene, die senkrecht zur optischen Ache (Z-Achse) seht und richtig rotiert ist (Kannten entlang der Achsen) $\longrightarrow$ Die Punkte werden nur skaliert! Sie bleiben ein Rechteck mit Kannten entlang der Achse!

Bildentstehung

Für unseren Setzkasten – welchen Fall haben wir meistens?

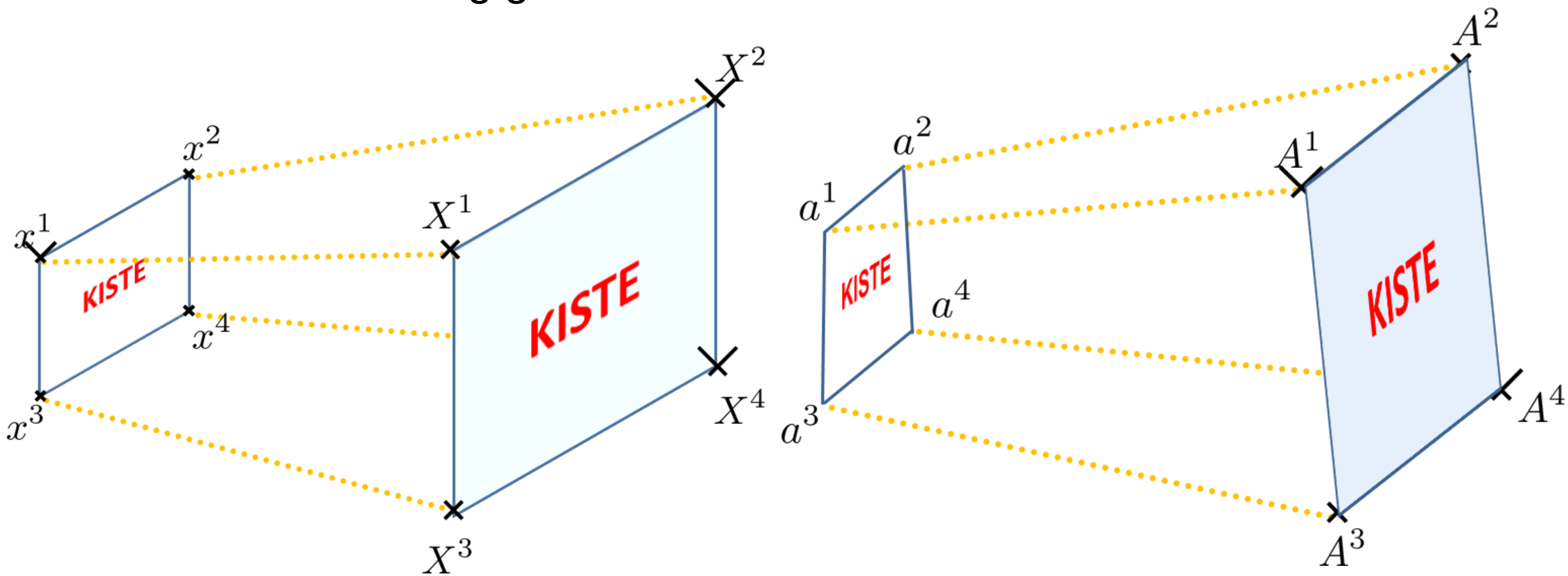


Alle Punkte in einer Ebene, die nicht senkrecht zur optischen Ache seht $\rightarrow$ Die Punkte bleiben kein Rechteck!

Bildentstehung

Für das ‚Begradigen' der Kiste:

Welche Beziehung gibt es zwischen den X^i und den A^i ?



Wir wissen bereits

$$\lambda_x^i \boldsymbol{x}^i = X^i$$

$$\lambda_a^i \boldsymbol{a}^i = A^i$$

Wir stellen uns vor die Kamera ist fix. Dann entstehen die Koordinaten A^i durch Rotation und Translation der gewünschten Koordinaten X^i :

$$X^i = RA^i + \vec{t} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Bildentstehung

Einschub – was ist eine Rotationsmatrix?

Vermutlich bekannt aus 2d. Typische Darstellung

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

In 3d, z.B. Zusammensetzen aus Einzeldrehungen um die Achsen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formal:

1. Längen- und Winkelerhaltend, also *orthogonal:* $R^T R = R R^T = I$
2. Orientierungserhaltend $\det(R) = 1$

Michael Möller – michael.moeller@uni-siegen.de

Bildentstehung

Wir rechnen:

$$X^i = RA^i + t$$

Da alle Punkte A^i in einer Ebene liegen:

$$n^T A^i = d \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{d} n^T A^i$$

Somit gilt

$$X^i = RA^i + t\left(\frac{1}{d} n^T A^i\right) = \underbrace{\left(R + \frac{1}{d} t n^T\right)}_{=:H} A^i$$ also $$X^i = H A^i$$

Wir verwenden nun

$\lambda_x^i \boldsymbol{x}^i = X^i \qquad \lambda_a^i \boldsymbol{a}^i = A^i$, sodass

$$\lambda_x^i \boldsymbol{x}^i \;=\; \lambda_a^i H \boldsymbol{a}^i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^i = \frac{\lambda_a^i}{\lambda_x^i} H \boldsymbol{a}^i$$

Bildentstehung - affin

$$\boxed{\lambda_x^i \boldsymbol{x}^i = \lambda_a^i H \boldsymbol{a}^i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^i = \frac{\lambda_a^i}{\lambda_x^i} H \boldsymbol{a}^i \qquad (*)}$$

Wir wissen bereits, dass die X^i in einer Ebene liegen, die senkrecht zur optischen Ache seht, sodass

$$\lambda_x^i = Z_x \qquad \text{für alle} \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

Falls wir das Gleiche auch für die Punkte A^i annehmen dürfen, also

$$\lambda_a^i = Z_a \qquad \text{für alle} \quad i \in \{1,2,3,4\}$$

So wird $(*)$ zu

$$\boldsymbol{x}^i = \underbrace{\frac{Z_x}{Z_a} H}_{:=\tilde{H}} \boldsymbol{a}^i \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{x}^i = \tilde{H} \boldsymbol{a}^i}$$

Bildentstehung - affin

Oder nur für die Bildkoordinaten ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{H}_{13} \\ \tilde{H}_{23} \end{pmatrix}$$

Es gibt also einen affin linearen Zusammenhang zwischen den Bildkoordinaten.

Bei bekannten Korrespondenzen von Punkten $\begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \end{pmatrix}$

liefert obige Relation zwei lineare Gleichungen pro Korrespondenz zur Bestimmung der unbekannten $\tilde{H}_{kl}$

Somit reichen 3 korrespondiere Punkte (die nicht auf einer Linie liegen) um eine affine Transformation eindeutig zu bestimmen.

Michael Möller – michael.moeller@uni-siegen.de

Bildentstehung - projektiv

Falls die A^i nicht in einer Ebene senkrecht zur optischen Achse liegen, kehren wir zurück zu:

$$\lambda_x^i \boldsymbol{x}^i = \lambda_a^i H \boldsymbol{a}^i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^i = \frac{\lambda_a^i}{\lambda_x^i} H \boldsymbol{a}^i \qquad (*)$$

Wir definieren

$$\hat{\boldsymbol{x}}^i = \begin{pmatrix} 0 & -x_3^i & x_2^i \\ x_3^i & 0 & -x_1^i \\ -x_2^i & x_1^i & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \hat{\boldsymbol{x}}^i \boldsymbol{x}^i = \begin{pmatrix} 0 & -x_3^i & x_2^i \\ x_3^i & 0 & -x_1^i \\ -x_2^i & x_1^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix} = 0$$

Und finden durch Multiplikation:

$$0 = \hat{\boldsymbol{x}}^i \boldsymbol{x}^i = \hat{\boldsymbol{x}}^i \left(\frac{\lambda_x^i}{\lambda_a^i} H \boldsymbol{a}^i \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = \hat{\boldsymbol{x}}^i H \boldsymbol{a}^i \qquad (**)}$$

Weitere Strategie:

1. Bestimme die unbekannte Matrix H mittels $(**)$
2. Bestimme die Skalierung mittels $(*)$

Ergebnis: Wissen wie wir die Koordinaten von einem Bild in das andere umrechnen!

Bildentstehung - projektiv

Betrachten wir die Gleichung $0 = \hat{\boldsymbol{x}}^i H \boldsymbol{a}^i$ näher. Es gilt

$$H\boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{a}_1^i H_{:,1} + \boldsymbol{a}_2^i H_{:,2} + \boldsymbol{a}_3^i H_{:,3}$$

wobei die Notation mit dem Doppelpunkt Spalten der Matrix bezeichnet.

Also ist

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}^i H \boldsymbol{a}^i &= \boldsymbol{a}_1^i \hat{\boldsymbol{x}}^i H_{:,1} + \boldsymbol{a}_2^i \hat{\boldsymbol{x}}^i H_{:,2} + \boldsymbol{a}_3^i \hat{\boldsymbol{x}}^i H_{:,3} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^i \hat{\boldsymbol{x}}^i & \boldsymbol{a}_2^i \hat{\boldsymbol{x}}^i & \boldsymbol{a}_3^i \hat{\boldsymbol{x}}^i \end{pmatrix}}_{=: B^i \in \mathbb{R}^{3\times 9}} \underbrace{\begin{pmatrix} H_{:,1} \\ H_{:,2} \\ H_{:,3} \end{pmatrix}}_{=: \vec{H} \in \mathbb{R}^9} \\
&= B^i \vec{H}
\end{aligned}$$

Bildentstehung - projektiv

Wir wissen nun

$$0 = B^i \vec{H} \quad \text{mit} \quad B^i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^i \hat{\boldsymbol{x}}^i & \boldsymbol{a}_2^i \hat{\boldsymbol{x}}^i & \boldsymbol{a}_3^i \hat{\boldsymbol{x}}^i \end{pmatrix}$$

Wir haben 4 Punkte (Eckpunkte der Kiste), also $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Wir setzen zusammen

$$B = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \\ B^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 9}$$

Und finden

$$0 = B\vec{H}$$

Welchen Vektor $\vec{H} \neq 0$ kann man mit B multiplizieren, sodass man 0 erhält?

Bildentstehung - projektiv

$$0 = B\vec{H}$$

Welchen Vektor $\vec{H} \neq 0$ kann man mit B multiplizieren, sodass man 0 erhält?

Trick: $$0 = \underbrace{B}_{\in\mathbb{R}^{12\times 9}} \vec{H} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \underbrace{B^T B}_{\in\mathbb{R}^{9\times 9}} \vec{H}$$

.

Konsequenz: Wir suchen den Eigenvektor von $B^T B$ zum Eigenwert 0!

(Der Übergang von B zu $B^T B$ führt zur sogenannten Singulärwertzerlegung)

Der volle Zusammenhang ist nun gegeben durch

$$\boldsymbol{x}^i = \frac{\lambda_x^i}{\lambda_a^i} H\boldsymbol{a}^i$$

Hierfür musste angenommen werden, dass alle Punkte in einer Ebene liegen

Bildentstehung - projektiv

Angenommen wir kennen H. Der volle Zusammenhang ist nun gegeben durch

$$\boldsymbol{x}^i = \frac{\lambda_x^i}{\lambda_a^i} \, H\boldsymbol{a}^i$$

Was ist der (für jeden Punkt individuelle) Skalierungsfaktor $\frac{\lambda_a^i}{\lambda_x^i}$?

Antwort aus homogenen Koordinaten:

Der Vektor $z^i := H\boldsymbol{a}^i$

muss mit dem Faktor multipliziert werden, der danach in der letzten Komponente eine 1 liefert, also

$$\boldsymbol{x}^i = \frac{1}{z_3^i} z^i = \frac{1}{(H\boldsymbol{a}^i)_3} H\boldsymbol{a}^i$$

Zusammenfassung

Aus der Geometrie von 3d Welt und Kamera haben wir 2 Arten von Transformationen zwischen den Koordinaten zweier Bilder hergeleitet

Affine Transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad x = H\boldsymbol{a}$$

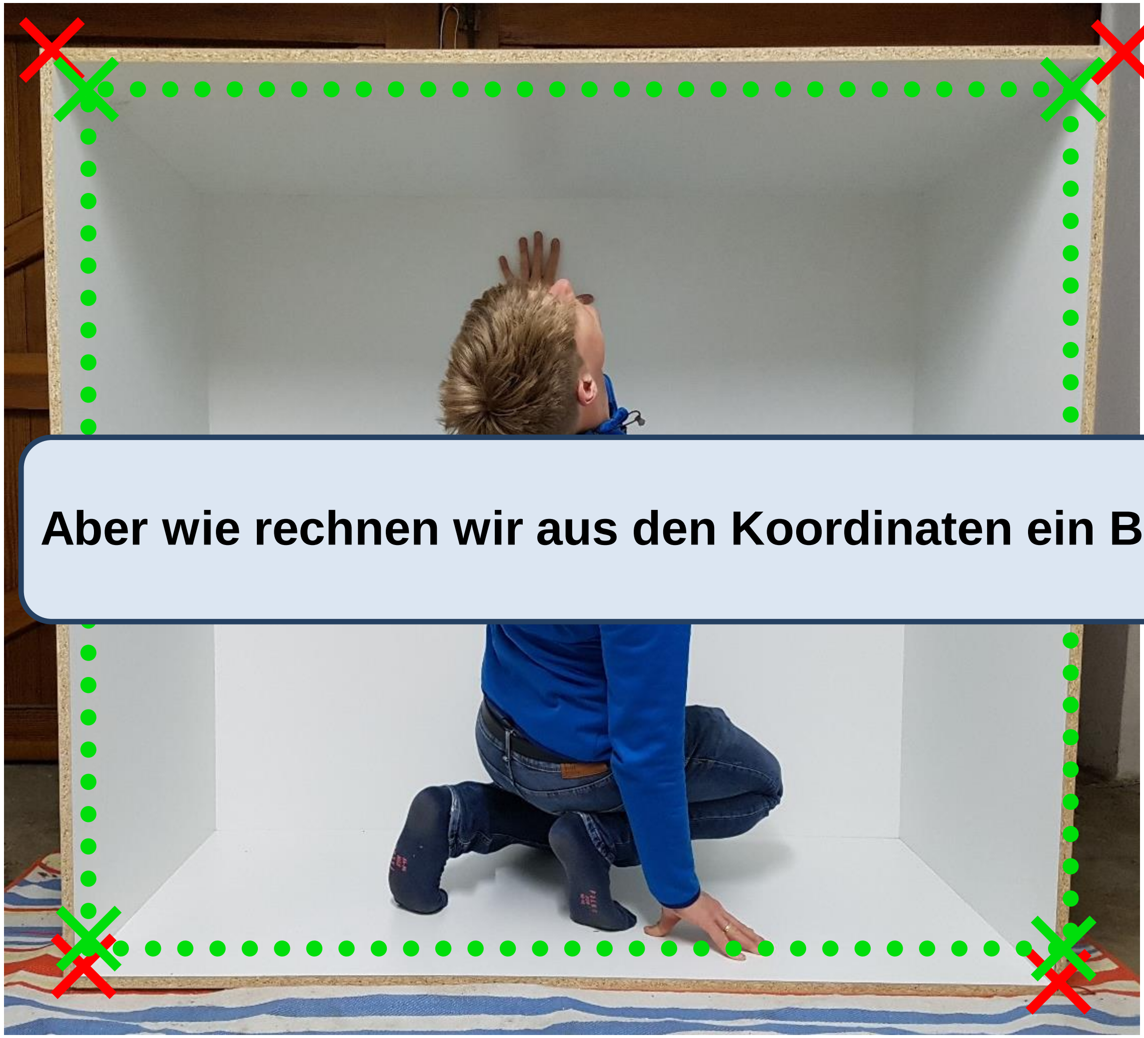
Die Matrix H kann aus 3 Punktkorrespondenzen durch Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden.

Projektive Transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{H_{31}a_1 + H_{32}a_2 + H_{33}} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{x} = \frac{1}{(H\boldsymbol{a})_3} H\boldsymbol{a}$$

Die Matrix H kann aus 4 Punktkorrespondenzen durch Lösung eines Eigenwertproblems bestimmt werden.

Übergang zur Bildinterpolation



Aber wie rechnen wir aus den Koordinaten ein Bild?

Durch einen noch zu diskutierenden Algorithmus, oder durch „klicken“

Zuvor festgelegte Zielkoordinaten, z.B.

$$x^1 = (1, 1)^T$$

$$x^2 = (500, 1)^T$$

$$x^3 = (1, 500)^T$$

$$x^4 = (500, 500)^T$$

Dank der heutigen Vorlesung können wir Abbildungen bestimmen, die jeder Pixelkoordinate neue Koordinaten (nach der Korrektur) zuweist!

Kleine Warnung vorab

Die Transformationen nehmen an, dass alle Objekte in einer Ebene sind!

Michael Möller – michael.moeller@uni-siegen.de